سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

مخروطی تراشیں

تصنیف

چارلس اسمتھ ایم۔اے

ترجمہ

محمد نذیر الدّین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی

سنہ ۱۳۶۰ھ سنہ ۱۳۵۰ف سنہ ۱۹۴۱ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی حیدرآباد دکن

صفحہ	مضمون

مضمون

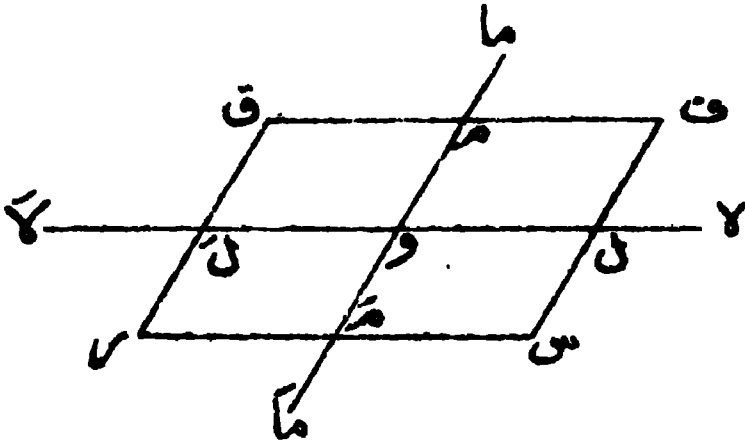
چودھواں باب — متکافی قطبی — ظل

مضمون	صفحہ
پندرھواں باب - غیر متغیر	۶۰۲
غیر متغیر	۶۰۳
پندرھویں باب پر مثالیں	۶۲۳
متفرق مثالیں	۶۲۸

پہلا باب

محدد

(۱)

۱- اگر ایک مستوی میں دو ثابت خطوطِ مستقیم لا و لاَ ، ما و مَا لیے جائیں اور مستوی کے کسی نقطۂ ف میں سے دو خطوطِ مستقیم ف مرَ ، ف ل علی الترتیب لا و لاَ ، ما و مَا کے متوازی کھینچے جائیں جہاں ف ل اور ف مرَ لا و لاَ اور ما و مَا سے علی الترتیب ل اور مرَ پر ملتے ہیں تو نقطہ ف کا محل معلوم ہو سکتا ہے جبکہ خطوط ف مر اور ف ل کے

طول دیے گئے ہوں۔ کیونکہ ہمیں صرف و ل ، و م کو علی الترتیب معلومہ خطوط م ف ، ل ف کے مساوی لینا اور متوازی الاضلاع ل و م ف کی تکمیل کرنا ہوگا۔

یہ طول م ف اور ل ف ، یا و ل اور و م ، جو اس طرح نقطہ ف کے محل کو خطوط و لا ، و ما کے حوالہ سے مقرر کرتے ہیں نقطہ ف کے محدد بحوالہ محاور و لا ، و ما کہلاتے ہیں۔ محوروں کا نقطۂ تقاطع مبدا کہلاتا ہے۔

(۲) جب محوروں کا درمیانی زاویہ زاویۂ قائمہ ہوتا ہے تو محوروں کو قائم محاور کہا جاتا ہے لیکن جب یہ درمیانی زاویہ زاویۂ قائمہ نہیں ہوتا تو محوروں کو مائل محاور کہتے ہیں۔

و ل کو بالعموم نقطہ ف کا فصلہ اور ل ف کو معین کہتے ہیں۔

وہ محدد جس کی پیمایش محور و لا پر عمل میں آتی ہے حرف لا سے تعبیر کیا جاتا ہے اور وہ محدد جس کی پیمایش محور و ما پر کی جاتی ہے حرف ما سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر شکل میں ، و ل طول کی ا اکائیاں اور و م ، ب اکائیاں ہوں تو نقطہ ف پر لا = ا اور ما = ب اور اس لیے اس نقطہ کو اکثر اختصاراً نقطہ (ا ، ب) کہا جاتا ہے۔

۲ــــ فرض کرو کہ و مَ کو طول میں و م کے مساوی اور و لَ کو و ل کے مساوی لیا گیا ہے اور مَ ، لَ میں سے محوروں کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں (دیکھو شکل دفعہ ۱)۔ اب تین نقطوں ق ، ر ، س کے محدد مقدار میں ف کے محددوں کے مساوی ہونگے۔ پس خطوط و ل ، ل ف کے طولوں کا جان لینا ہی کافی نہیں ہے بلکہ وہ سمتیں بھی معلوم ہونی چاہیئں جن میں ان کی پیمایش کی گئی ہے۔

اگر ایک سمت میں پیمایش کردہ خطوں کو مثبت لیا جائے تو سمت مخالف میں پیمایش کردہ خطوں کو منفی لینا چاہیے۔ ہم ان خطوں کو جن کی پیمایش و لا یا و ما کی سمتوں میں کی گئی ہو مثبت سمجھینگے اور اس لیے وہ خطوط جن کی پیمایش و لاَ یا و ماَ کی سمتوں میں کی گئی ہو منفی متصور ہونے چاہییں۔

اب ہم نقاط ف، ق، ر، س کے محددوں میں تمیز کر سکتے ہیں۔
ر کے محدد و ل، ل ر ہیں اور یہ دونوں منفی سمت میں پیمایش کیے گئے ہیں، اس لیے اگر ف کے محدد ا، ب ہوں تو ر کے محدد۔ ا، ۔ب ہوں گے۔ س کے محدد ا، ۔ب اور ق کے۔ ا، ب ہوں گے۔
چنانچہ ف، ق، ر، س علی الترتیب نقاط (ا، ب)، (۔ا، ب)، (۔ا، ۔ب)، اور (ا، ۔ب) ہیں۔ نیز ل، م، ل، م نقاط (ا، ۰)، (۰، ب)، (۔ا، ۰)، (۰، ۔ب) ہیں۔
جب کسی نقطہ کے محددوں کو معلوم سمجھا جاتا ہے تو انہیں بالعموم حروف تہجی کے ابتدائی حروں سے تعبیر کیا جاتا ہے مثلاً (ا، ب)، (ج، د)، وغیرہ لیکن جب ایک سے زیادہ نقطے ہوں تو ترقیم (لا، ما)، (لا، ما) وغیرہ یا (لا، ما)، (لا، ما) وغیرہ بالعموم استعمال کی جاتی ہے۔
(۴) ۳ — اس کو بڑی احتیاط سے ذہن نشین رکھنا چاہیے کہ کسی خط کا مثبت یا منفی ہونا اُس سمت پر منحصر ہے جس میں وہ کھینچا گیا ہے اور وہ مبداء کے محل پر منحصر نہیں ہے مثلاً دفعہ ا کی شکل میں خط ل و منفی ہے کیونکہ سمت ل تا و اُس سمت کے مخالف ہے جو و تا لا ہے۔
اگر کوئی دو نقطے ک، ل لیے جائیں اور خط ک ل میں ایک نقطہ و لے کر فاصلوں وک، و ل کو علی الترتیب ا اور ب سے تعبیر کیا جائے تو فاصلہ ک ل کو ک و + و ل یا ۔وک + و ل ہونا چاہیے یعنے ۔ا + ب اور یہ درست ہوگا خواہ نقطہ و خط ک ل پر کہیں واقع ہو۔

اگر و ا = ۔۳، و ب = ۴ تو

ا ب = ا و + و ب = ۔ و ا + و ب = ۔(۔۳) + ۴ = ۷

اگر و ا = ۳، و ب = ۔۴ تو ا ب = ۔۳ + (۔۴) = ۔۷

طالب علم اس کو ایک شکل کی مدد سے واضح کرے۔
مثال ۱۔ اگر ایک خطِ مستقیم میں کوئی چار نقطے ا، ب، ج، د ہوں تو

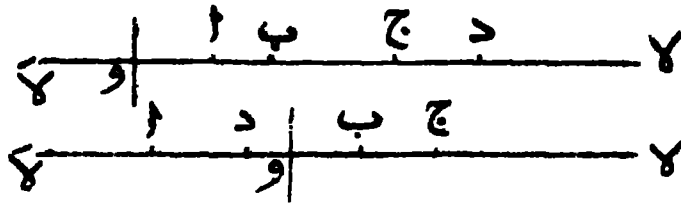
ا ب × ج د + ب ج × ا د = ا ج × ب د

اُس خطِ مستقیم کو جس پر یہ نقطے واقع ہیں لا کا محور فرض کرو اور اس پر کسی نقطہ و کو مبداء قرار دو۔ اب اگر وا = $لا_{1}$، وب = $لا_{2}$، وج = $لا_{3}$ اور ود = $لا_{4}$ تو

$$اب = او + وب = -وا + وب = -لا_{1} + لا_{2}$$

$$جد = جو + ود = -وج + ود = -لا_{3} + لا_{4}$$

نیز $بج = -لا_{2} + لا_{3}$ ، $اد = -لا_{1} + لا_{4}$

$اج = -لا_{1} + لا_{3}$ ، $بد = -لا_{2} + لا_{4}$

اس لیے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $لا_{1}$، $لا_{2}$، $لا_{3}$، $لا_{4}$ کی تمام قیمتوں کے لیے

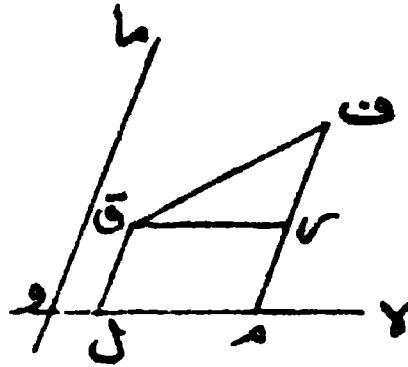
$$(-لا_{1}+لا_{2})(-لا_{3}+لا_{4}) + (-لا_{2}+لا_{3})(-لا_{1}+لا_{4}) = (-لا_{1}+لا_{3})(-لا_{2}+لا_{4})$$

درست ہے۔ خطوطِ وحدانی دور کرنے سے یہ واضح ہے۔

مثال ۲۔ ایک خطِ مستقیم پر کوئی تین نقطے ا، ب، ج ہیں اور ف کوئی اور نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ف ا^{2} \times ب ج + ف ب^{2} \times ج ا + ف ج^{2} \times ا ب + ب ج \times ج ا \times ا ب = ۰$$

(۴) ۴۔ دو نقطوں کے درمیانی فاصلہ کو ان کے محددوں کی رقوم میں بیان کرنا۔

فرض کرو کہ ف نقطہ (لاَ، ماَ) اور ق نقطہ (لاً، ماً) ہے اور فرض کرو کہ محاور زاویہ سہ پر مائل ہیں۔

ف م اور ق ل کو و ما کے متوازی اور ق س کو و لا کے متوازی کھینچو حسب شکل۔

تب و ل = لاً، ل ق = ماً، و م = لاَ، م ف = ماَ

علم مثلث سے

ف ق² = ق س² + س ف² ـ ۲ ق س × س ف جم ق س ف

لیکن ق س = ل م = و م ـ و ل = لاَ ـ لاً

س ف = م ف ـ م س = م ف ـ ل ق = ماَ ـ ماً

اور زاویہ ق س ف = زاویہ و م ف = π ـ زاویہ لا و ما = π ـ سہ

اس لیے ف ق² = (لاَ ـ لاً)² + (ماَ ـ ماً)² + ۲ (لاَ ـ لاً) (ماَ ـ ماً) جم سہ

یا ف ق = ± √[(لاَ ـ لاً)² + (ماَ ـ ماً)² + ۲ (لاَ ـ لاً) (ماَ ـ ماً) جم سہ]

اگر محاور علی القوائم ہوں تو

ف ق = ± √[(لاَ ـ لاً)² + (ماَ ـ ماً)²]

ہم مبدا و سے ف کے فاصلہ کو راست معلوم کر سکتے ہیں یا اس کو اوپر کے ضابطہ میں لاَ = ٠، ماَ = ٠ رکھنے سے معلوم کیا جا سکتا ہے چنانچہ

$$\text{وف} = \pm \sqrt{\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 + 2\,\text{لاَ ماَ جم سہ}}$$

یا محاور قائم ہوں تو

$$\text{وف} = \pm \sqrt{\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2}$$

(۵) سوائے اُن خطوطِ مستقیم کے جو محوروں کے متوازی ہوں دیگر خطوں کی سمت کے متعلق کوئی قرارداد اختیار نہیں کی گئی ہے کہ کونسی سمت کو مثبت سمجھا جائے۔ اِس لیے ہم ف ق یا ق ف میں سے کسی ایک کو مثبت فرض کر سکتے ہیں۔ لیکن اگر ایک ہی خطِ مستقیم میں تین یا زیادہ نقطے ف، ق، ر، . . . ہوں تو ایک ہی سمت کو مثبت سمجھنا چاہیے تاکہ تمام صورتوں میں

$$\text{ف ق} + \text{ق ر} = \text{ف ر}$$

حسب ذیل مثالوں میں محاور قائم ہیں:۔

مثال ۱۔ ایک شکل میں نقطہ لا = ۱، ما = ۲ اور نقطہ لا = -۳، ما = -۱ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اِن کے درمیان فاصلہ ۵ ہے۔

مثال ۲۔ اُن خطوں کے طول معلوم کرو جو نقطوں کے حسب ذیل جوڑوں کو ملاتے ہیں:

(۱) (۱، -۱) اور (-۱، ۱)، (۲) (وَ، -و) اور (-ب، ب)

(۳) (۳، ۴) اور (۱، -۱)

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ تین نقطے (۱، ۱)، (-۱، -۱) اور ($-\sqrt{3}$، $\sqrt{3}$)، ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ چار نقطے (۰، ۱-)، (-۲، ۳)، (۶، ۷) اور (۸، ۳)، ایک مستطیل کے راس ہیں۔

مثال ۵۔ ایک ہی شکل میں نقطوں (۰، ۱-)، (۱، ۴)، (۴، ۰) اور (۱، ۲-) ومرتسم کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک مربع کے راس ہیں۔
یہی بات نقطوں (۲، ۱)، (۴، ۳)، (۲، ۵) اور (۰، ۳) کی صورت میں ی ثابت کرو۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ چار نقطے (۲، ۱)، (۵، ۴)، (۴، ۷) اور (۱، ۴) ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

مثال ۷۔ اگر نقطہ (لا، ما) دو نقطوں (۳، ۴) اور (۱، ۲-) سے مساوی فاصلے پر ہو تو ثابت کرو کہ لا + ۳ ما = ۵

[کیونکہ (لا - ۳)^۲ + (ما - ۴)^۲ = (لا - ۱)^۲ + (ما + ۲)^۲
اور اس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔]

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۷، ۱۰) تین نقطوں (۱۰-، ۹-)، (۳۲، ۵)، اور (۱۸، ۳۴) سے مساوی فاصلے پر ہے۔

مثال ۹۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۰، ۰)، (۳۲، ۱۰) اور (۴۲، ۰) سے مساوی فاصلے پر ہو۔ جواب: (۲۱، ۱۱-)

مثال ۱۰۔ اُس مثلث کے اضلاع کے طول معلوم کرو جس کے راس (۱۰، ۸)، (۱۳، ۴) اور (۴، ۸) ہیں۔
ثابت کرو کہ نقطہ (۷، ۶، ۴، ۲) ہر راس سے فاصلہ ۶۵ پر ہے۔
جواب: اضلاع ۱۳، ۱۲، ۵ ہیں۔

(۶) ۵۔ اُس نقطہ کے محدد معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم کی تقسیم ایک معلومہ نسبت میں کرے۔

فرض کرو کہ ف کے محدد لا₁، ما₁ اور ق کے محدد لا₂، ما₂ ہیں اور فرض کرو کہ س (لا، ما) وہ نقطہ ہے جو ف ق کو نسبت ک₁ : ک₂ میں تقسیم کرتا ہے۔

ف ل، ر ن، ق م کو محور ما کے متوازی اور ف س ت کو محور لا کے متوازی کھینچو حسب شکل۔

تب ل ن : ن م = ف س : س ت = ف ر : ر ق = $ک_1 : ک_2$

∴ $ک_2 \times$ ل ن $- ک_1 \times$ ن م $= ۰$

یا $ک_2 (لا - لا_1) - ک_1 (لا_2 - لا) = ۰$

$$\therefore \quad لا = \frac{ک_1 لا_2 + ک_2 لا_1}{ک_1 + ک_2}$$

$$اسی\ طرح \quad ما = \frac{ک_1 ما_2 + ک_2 ما_1}{ک_1 + ک_2}$$

سب سے زیادہ مفید صورت وہ ہے جب کہ خط ف ق کی تنصیف کی گئی ہو چنانچہ نقطۂ تنصیف کے محدد

$$\tfrac{1}{2}(لا_1 + لا_2)،\ \tfrac{1}{2}(ما_1 + ما_2)$$

ہیں۔

اگر خط نسبت ک۱ : ۔ک۲ میں خارجاً منقطع ہو تو

ل ں : ں م = ک۱ : (۔ک۲)

اور اس لیے $لا = \frac{ک_۱ لا_۲ - ک_۲ لا_۱}{ک_۱ - ک_۲}$ ، $ما = \frac{ک_۱ ما_۲ - ک_۲ ما_۱}{ک_۱ - ک_۲}$

مندرجۂ بالا نتیجے درست رہتے ہیں خواہ محددوں کے محوروں کے درمیان کوئی زاویہ ہو۔ لیکن بہت سی صورتوں میں ضابطے ذرا پیچیدہ ہو جاتے ہیں جب کہ محاور علی القوائم نہ ہوں۔

ہم آیندہ محوروں کو تمام صورتوں میں علی القوائم سمجھینگے الا آنکہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔

مثال ۱۔ اُس خط کا وسطی نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۳، ۱)، (۔۵، ۷) کو ملاتا ہے۔

$$لا = \frac{۱}{۲}\{۳ + (-۵)\} = -۱ ، ما = \frac{۱}{۲}(۱ + ۷) = ۴$$

مثال ۲ — وہ نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۲، ۳) اور (۵، ۔۳) کو ملانے والے خط کی تقسیم نسبت ۱ : ۲ میں کرتا ہے —

$$لا = \frac{۱ \times ۵ + ۲ \times ۲}{۲ + ۱} = ۳ ، ما = \frac{۱ \times (-۳) + ۲ \times ۳}{۲ + ۱} = ۱$$

مثال ۳ — نقاط ا، ب، ج علی الترتیب (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲) اور (لا۳، ما۳) ہیں۔ ب ج، ج ا، ا ب کے نقاطِ وسطی علی الترتیب د، ع، ف ہیں۔ نقطہ گ کے محدد معلوم کرو جو د ا کو اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ ۲ د گ = گ ا

د کے محدد

$$لا = \frac{۱}{۲}(لا_۲ + لا_۳) ، ما = \frac{۱}{۲}(ما_۲ + ما_۳)$$

ہیں اور اس لیے گ کے محدد

$$\text{لا} = \frac{1 \times \text{لا}_1 + 2 \times \frac{1}{2}(\text{لا}_2 + \text{لا}_3)}{2+1} = \frac{1}{3}(\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3)$$

$$\text{ما} = \frac{1 \times \text{ما}_1 + 2 \times \frac{1}{2}(\text{ما}_2 + \text{ما}_3)}{2+1} = \frac{1}{3}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \text{ما}_3)$$

ہیں۔

اِس نتیجہ کے تشاکل سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ گ، خطوط ع ب اور ف ج پر بھی واقع ہے اور نیز یہ کہ ۲ ع گ = گ ب اور ۲ ف گ = گ ج

کسی مثلث کے خطوطِ وسطی کے نقطہ تقاطع کو مثلث کا مرکزِ ہندسی کہتے ہیں اور ہم اوپر کی مثال سے یہ دیکھتے ہیں کہ اگر ایک مثلث کے راس $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2, \text{ما}_2)$، $(\text{لا}_3, \text{ما}_3)$ ہوں تو اِس کے مرکزِ ہندسی کے محدد

$$\frac{1}{3}(\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3)، \quad \frac{1}{3}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \text{ما}_3)$$

ہیں۔

مثال ۴ — اُس مثلث کا مرکزِ ہندسی معلوم کرو جس کے راس علی الترتیب $(-4, 6)$، $(2, -2)$ اور $(2, 5)$ ہیں۔ جواب: $(0, 3)$

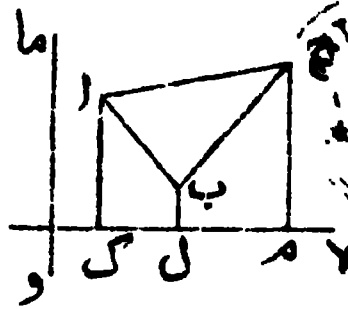
مثال ۵ — اُس مثلث کا مرکزِ ہندسی معلوم کرو جس کے راس علی الترتیب $(3, -5)$، $(-7, 4)$ اور $(10, -2)$ ہیں۔ جواب: $(2, -1)$

مثال ۶ — وہ نقطہ معلوم کرو جو $(5, -3)$ اور $(3, -5)$ کو ملانے والے خط کی تقسیم نسبت ۳ : ۵ میں کرتا ہے۔ جواب $\left(\frac{17}{4}, -\frac{15}{4}\right)$

مثال ۷ — وہ نقطہ معلوم کرو جو $(2, 1)$ اور $(3, 5)$ کو ملانے والے خط کی تقسیم خارجی طور پر نسبت ۲ : -۳ میں کرتا ہے — جواب: $(0, -7)$

۶ — مثلث کے رقبہ کو اس کے راسوں کے محددوں کی رقوم میں بیان کرنا۔ (۸)

فرض کرو کہ راسوں ا، ب، ج کے محدد علی الترتیب $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$،

($لا_۱$، $ما_۱$)، ($لا_۲$، $ما_۲$) ($لا_۳$، $ما_۳$) آیا۔

خطوط اک، ب ل، اور ج م کو محور ما کے متوازی کھینچو حسب شکل

۵ اب ج = مرج اک - ک اب ل - ل ب ج مر

اب مرج اک = ۵ مرج ا + ۵ اک مر

= ½ ک مر × مرج + ½ ک مر × ک ا

= ½ ($لا_۳$ - $لا_۱$) ($ما_۳$ + $ما_۱$)

اسی طرح ک اب ل = ½ ($لا_۲$ - $لا_۱$) ($ما_۱$ + $ما_۲$)

اور ل ب ج مر = ½ ($لا_۳$ - $لا_۲$) ($ما_۲$ + $ما_۳$)

∴ ۵ اب ج = ½ {($ما_۳$ + $ما_۱$) ($لا_۳$ - $لا_۱$) + ($ما_۱$ + $ما_۲$) ($لا_۱$ - $لا_۲$)
+ ($ما_۳$ + $ما_۲$) ($لا_۲$ - $لا_۳$)}

یا اُن رقموں کو ترک کرنے سے جو ایک دوسرے کو خارج کرتی ہیں

۵ اب ج = ½ {$لا_۱$$ما_۲$ - $لا_۲$$ما_۱$ + $لا_۲$$ما_۳$ - $لا_۳$$ما_۲$ + $لا_۳$$ما_۱$ - $لا_۱$$ما_۳$}

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

مثلث کے رقبہ کا یہ جملہ مثبت ہوگا اگر راس ایسی ترتیب میں ہوں کہ مثلث کے گرد چلنے والے رقبہ ہمیشہ بائیں جانب رہے یا اگر گھیرے ا ب ج ا کو طے کرنے کی ترتیب خلاف سمت ساعت ہو۔ جب کبھی راسوں کے محددوں کے اندراج سے رقبہ کے لیے منفی جملہ حاصل ہو تو مثلث کے گرد چلنے کی ترتیب کو اُلٹ دیا جائے۔

(۹) ## ۷۔ ذوار بعۃ الاضلاع کے رقبے کو اس کے راسوں کے محددوں کی رقوم میں بیان کرنا جبکہ راس ترتیب وار دیے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ راس ترتیب وار ا، ب، ج، د ہیں اور ان کے محدد علی الترتیب $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$، $(\text{لا}_3، \text{ما}_3)$ اور $(\text{لا}_4، \text{ما}_4)$ ہیں۔

اک، ب ل، ج مر، د ن کو محور ما کے متوازی کھینچو حسب شکل۔

اب رقبہ اب ج د

= ک اب ل + ل ب ج م ۔ م ج د ن ۔ ن د آ ک

اور گزشتہ دفعہ کی طرح

ک اب ل = $\frac{1}{2}$ (ا$_1$ + ا$_2$) (لا$_2$ ۔ لا$_1$)،

ل ب ج م = $\frac{1}{2}$ (ا$_2$ + ا$_3$) (لا$_3$ ۔ لا$_2$)،

م ج د ن = $\frac{1}{2}$ (ا$_3$ + ا$_4$) (لا$_3$ ۔ لا$_4$)،

ن د آ ک = $\frac{1}{2}$ (ا$_4$ + ا$_1$) (لا$_1$ ۔ لا$_4$)،

پس اب ج د = $\frac{1}{2}$ (ا$_1$ + ا$_2$) (لا$_2$ ۔ لا$_1$) + (ا$_2$ + ا$_3$) (لا$_3$ ۔ لا$_2$)

+ (ا$_3$ + ا$_4$) (لا$_4$ ۔ لا$_3$) + (ا$_4$ + ا$_1$) (لا$_1$ ۔ لا$_4$)

یا اُن رقموں کو ترک کرنے سے جو ایک دوسرے کو خارج کرتی ہیں۔

اب ج د = $\frac{1}{2}$ {لا$_1$ ا$_2$ ۔ لا$_2$ ا$_1$ + لا$_2$ ا$_3$ ۔ لا$_3$ ا$_2$ + لا$_3$ ا$_4$ ۔ لا$_4$ ا$_3$ + لا$_4$ ا$_1$ ۔ لا$_1$ ا$_4$}

کسی کثیر الاضلاع کے رقبہ کو بھی اِسی طرح معلوم کیا جا سکتا ہے۔

[ایک دوسرا طریقہ دفعہ ۱۲ میں بیان کیا گیا ہے]

اوپر کا ضابطہ جو لا$_1$ ا$_2$ ۔ لا$_2$ ا$_1$ سے شروع ہوتا ہے اور دائری ترتیب میں لا$_2$ ا$_3$ ۔ لا$_3$ ا$_2$ وغیرہ میں بدلتا جاتا ہے مثبت ہوگا اگر راسوں کو شکل کے احاطہ کے گرد خلاف سمت ساعت ترتیب میں لیا گیا ہو اور منفی ہوگا اگر یہ ترتیب الٹی ہو۔

لیکن یہ ذہن نشین رہے کہ چار نقطوں کو ایک سے زیادہ طریقوں سے ملایا جا سکتا ہے اور شکل ذیل کی صورت میں ضابطہ سے اُن مثلثوں کے حقیقی رقبوں کا فرق حاصل ہوگا جو علی الترتیب مثبت (+) اور منفی (-) علامتوں سے موسوم ہیں۔ (۱۰)

مثال ۱ — اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس (۲، ۱)، (۴، ۳)
اور (۲، ۵) ہیں۔ نیز اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس (۴، -۵)، (۵، -۶)
اور (۳، ۱) ہیں۔ جواب: ۴، $\frac{۵}{۲}$

مثال ۲ — اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس ا، ب، ج
علی الترتیب (۲، ۳)، (۴، ۵) اور (۶، ۲) ہیں۔ جواب: -۵

[منفی علامت اِس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ ا ب ج ا گردش کی
اُس ترتیب میں ہے جو موافق سمت ساعت ہے اور یہ نقطوں کو مرتسم کرنے سے
معلوم ہو سکتا ہے۔ اکثر صورتوں میں رقبہ کی صرف مطلق قیمت مطلوب ہوگی۔]

مثال ۳ — ا، ب، ج علی الترتیب نقطے (-۱، ۵)، (۳، ۱)،
(۵، ۷) ہیں اور ب ج، ج ا، ا ب کے نقاطِ وسطی د، ع، ف ہیں۔
ثابت کرو کہ

$$\triangle \text{ا ب ج} = ۴ \triangle \text{د ع ف}$$

مثال ۴ — اُس ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس
ترتیب وار (۱، ۲)، (۶، ۲)، (۵، ۳) اور (۳، ۴) ہیں۔
نیز اُس ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے راس (۲، ۲)، (-۲، ۳)،
(-۳، -۴) اور (۱، -۲) ہیں۔ جواب: $\frac{۱۱}{۲}$، ۲۰

مثال ۵ — اُس ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس
ا، ب، ج، ترتیب وار (-۴، ۲)، (۳، -۵)، (۱، ۷) اور (۶، -۲) ہیں۔
جواب: صفر

نقطوں کو مرتسم کرو اور نتیجہ کو ظاہر کرنے کے لیے اب ج د ا کھینچو۔
رقبہ معلوم کرو جب کہ نقطوں کو ترتیب ا، ب، د، ج میں لیا گیا ہو۔

جواب: ۵۶

مثال ۶ — نقطے ا، ب، ج، د علی الترتیب (۲،۴)، (۳،۰)، (۸،۴) اور (۶،۰) ہیں۔ اب ج د کا رقبہ معلوم کرو۔ نیز نقطوں کو ترتیب ا، ج، ب، د میں اور ترتیب ا، ب، د، ج میں لے کر ثابت کرو کہ اب، ج د کے متوازی ہے اور ب ج، د ا کے۔

جواب: ۱۲

۸ — اگر ایک منحنی کی تعریف ایک ایسی ہندسی خاصیت کی بنا پر کی گئی ہو جو اس کے تمام نقطوں میں مشترک ہو تو کوئی نہ کوئی جبری رشتہ موجود ہوگا جو منحنی کے تمام نقطوں کے محددوں سے پورا ہوگا اور ان نقطوں کے علاوہ دیگر نقطوں سے پورا نہیں ہوگا۔ اس جبری رشتہ کو **منحنی کی مساوات** کہتے ہیں۔ (۱۰)

اس کے برعکس وہ تمام نقطے جو ایک معلومہ جبری مساوات کو پورا کرتے ہیں ایک منحنی پر واقع ہوتے ہیں جس کو اس مساوات کا **طریق** کہتے ہیں۔

مثلاً اگر ایک خطِ مستقیم کو محور و ما کے متوازی اس سے فاصلہ و پر کھینچا جائے تو اس خط پر کے نقطوں کے فصلے سب کے سب مستقل مقدار و کے مساوی ہونگے اور کسی اور نقطہ کا فصلہ و کے مساوی نہیں ہوگا۔

پس لا = و اس خط کی مساوات ہوگی۔

اس کے برعکس وہ خط جو محور ما کے متوازی اس سے فاصلہ و پر کھینچا گیا ہو مساوات لا = و کا **طریق** ہے۔

نیز اگر ایک دائرہ پر کے کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما ہوں اور اس کا مرکز مبدا و پر ہو اور اس کا نصف قطر ج ہو تو فاصلہ و ف کا مربع لا^2 + ما^2 ہوگا [دفعہ ۴]۔ لیکن و ف دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس لیے دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد لا، ما رشتہ لا^2 + ما^2 = ج^2 کو پورا کرتے ہیں یعنے دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 = ج^2 ہے۔

اس کے برعکس مساوات $لا^2 + ما^2 = ج^2$ کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز مبدا ہے اور جس کا نصف قطر ج کے مساوی ہے۔

اس منحنی کا تقریبی خاکہ جس کو ایک جبری مساوات سے تعبیر کیا گیا ہو اس طرح کھینچا جا سکتا ہے کہ لا یا ما کو قیمتوں کا ایک سلسلہ دیا جائے اور اس کے جواب میں ما یا لا کی قیمتیں محسوب کی جائیں اور پھر مربع دار کاغذ پر نقطوں کا وہ سلسلہ مرتسم کیا جائے جن کے محدد اس طریقہ پر حاصل ہوئے ہوں جبر و مقابلہ میں بہت سا وقت ایسی غیر دلچسپ مشق پر صرف کیا جاتا ہے حالانکہ یہ کچھ زیادہ مفید بھی نہیں۔

علم ہندسہ تحلیلی میں وہ مساوات معلوم کی جاتی ہے جو اُن تمام نقطوں کے محددوں سے پوری ہوتی ہے جو ایک منحنی پر واقع ہوں جس کی تعریف کسی ہندسی خاصیت کی بناء پر کی گئی ہو۔ نیز منحنی کا محل اور اس کے خواص اس مساوات سے اخذ کیے جاتے ہیں جو منحنی پر کے تمام نقطوں کے محددوں سے پوری ہوتی ہے۔

ایک مساوات کو ن ویں درجہ کی مساوات کہتے ہیں جب اس کو اس طرح تحویل کرنے کے بعد کہ متغیروں کے قوت نما چھوٹے سے چھوٹے ممکن صحیح اعداد ہوں اس میں بڑے سے بڑے ابعاد کی رقم (یا ارقام) ن ابعاد کی ہو۔ (۱۲)

مثلاً مساواتیں $ا\,لا^2 + ب\,لا + ج = 0$، $\sqrt{لا^2 + لا\,ما + ما\,و} + ب^2 = 0$، $\sqrt{لا} + \sqrt{ما} = 1$ (جس کو منطق بنانے پر $لا^2 + ما^2 - 2\,لا\,ما - 2\,لا - 2\,ما + 1 = 0$ ہو جاتی ہے) سب کی سب دوسرے درجہ کی ہیں۔

مثال ۱ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو نقطوں (۳، ۴) اور (۵، −۲) سے اس کے فاصلے مساوی رہتے ہیں۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

جواب: $لا - 3\,ما = 1$

مثال ۲ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں (و، ۰) اور (−و، ۰) سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ($2\,ج^2$) رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

جواب: $لا^2 + ما^2 = ج^2 - و^2$

مثال ۳— ایک نقطہ اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں (ا، ۰) اور (- و، ۰) سے اِس کے فاصلوں کے مربعوں کا فرق مستقل (ج^2) رہتا ہے۔ اِس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: ۴ ا لا = ± ج^2

مثال ۴— ایک نقطہ اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقطہ (۳، ۰) سے اِس کا فاصلہ اُس فاصلہ کا دُگنا رہتا ہے جو اس کو نقطہ (- ۳، ۰) سے ہے۔ اِس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: لا^2 + ما^2 + ۱۰ لا + ۹ = ۰

مثال ۵— ایک نقطہ اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اُس کا فاصلہ مبدا سے اُس کے فاصلہ کا نصف رہتا ہے۔ اِس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: ۳ ما^2 - لا^2 = ۰

مثال ۶— ایک نقطہ اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اِس کا فاصلہ، نقطہ (۱، ۱) سے اُس کے فاصلہ کے مساوی رہتا ہے۔ اِس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: لا^2 - ۲ لا - ۲ ما + ۲ = ۰

مثال ۷— ایک نقطہ اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ محوروں سے اِس کے فاصلوں کا مجموعہ طول کی ۴ اکائیاں رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

جواب: لا + ما = ۴

مثال ۸— ایک نقطہ اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اِس کا فاصلہ، محور سے اِس کے فاصلے سے بقدر ۲ کے بڑا رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: ۲ ما - لا = ۲

مثال ۹— ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۴) سے فاصلہ ۵ پر رہتا ہے۔ جواب: لا^2 + ما^2 - ۶ لا - ۸ ما = ۰

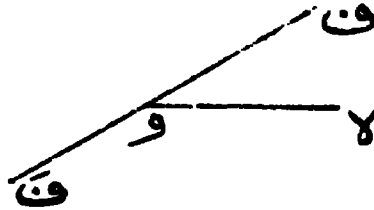
مثال ۱۰— وہ نقطے معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۴) سے فاصلہ ۵ پر اور نقطہ (۵، ۱۲) سے فاصلہ ۱۳ پر ہیں۔

[یہ نقطے حسبِ ذیل دو مساواتوں کو پورا کرتے ہیں:
(لا - ۳)^2 + (ما - ۴)^2 = ۵^2 ، (لا - ۵)^2 + (ما - ۱۲)^2 = ۱۳^2]

جواب: (۰، ۰) اور ($\frac{۶۴}{۱۷}$ ، - $\frac{۱۶}{۱۷}$)

۹ ـــ دفعات ۱ اور ۲ میں جو محدد استعمال ہوتے ہیں اُن کو کارٹیزی محدد کہتے ہیں کیونکہ ان کو سب سے پہلے ڈیکارٹ نے استعمال کیا تھا۔ لیکن ایک مستوی پر کسی نقطہ کے محل کو دوسرے طریقوں سے بھی متعین کیا جا سکتا ہے۔ اِن میں سے ایک مفید طریقہ حسب ذیل ہے:

قطبی محدد

اگر ایک نقطہ و کو مبداء لیا جائے اور اِس میں سے ایک ثابت خطِ مستقیم و لا کھینچا جائے تو کسی نقطہ ف کا محل معلوم ہوگا اگر زاویہ لا و ف اور فاصلہ و ف معلوم ہوں۔

اِن کو نقطہ ف کے قطبی محدد کہا جاتا ہے۔

طول و ف کو سمتی نصف قطر کہتے ہیں اور اسے بالعموم ر سے تعبیر کرتے ہیں۔ زاویہ لا و ف کو سمتی زاویہ کہتے ہیں اور اسے ط سے تعبیر کرتے ہیں۔

اِس زاویہ کو مثبت سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمایش و لا سے اُس سمت کے خلاف کی گئی ہو جس میں گھڑی کی سوئیاں گردش کرتی ہیں۔

سمتی نصف قطر کو مثبت سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمایش و سے

اُس خط پر کی گئی ہو جو سمتی زاویہ کی تحدید کرتا ہے اور منفی سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیایش مخالف سمت میں کی گئی ہو۔

گرف د کو فَ تک خارج کیا جائے اور و فَ مقدار میں د ف کے مساوی ہو اور اگر ف کے محدد ر، طہ ہوں تو فَ کے محدد -ر، طہ یا ر، طہ + π ہونگے۔

۱۰ --- دو نقطوں کا جن کے قطبی محدد دیے گئے ہوں درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دو نقطوں ف، ق کے محدد ر۱، طہ۱ اور ر۲، طہ۲ ہیں۔ تب علم مثلث سے

ف ق۲ = وف۲ + وق۲ - ۲ وف × وق جم ف و ق

لیکن وف = ر۱، وق = ر۲ اور زاویہ ف و ق = زاویہ لا و ق - زاویہ لا و ف = طہ۲ - طہ۱

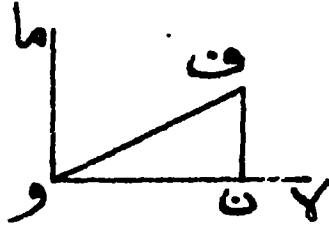
∴ ف ق۲ = ر۱۲ + ر۲۲ - ۲ ر۱ ر۲ جم (طہ۲ - طہ۱)   (۱۳)

ایک دائرہ کی قطبی مساوات جب کہ دائرہ کا مرکز نقطہ (ا، عہ) پر ہو اور اس کا نصف قطر ج ہو ج۲ = ا۲ + ر۲ - ۲ ا ر جم (طہ - عہ) ہے جہاں دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد ر، طہ ہیں۔

۱۱- قائم محددوں کو قطبی محددوں میں تبدیل کرنا۔

اگر و میں سے ایک خط وما، ولا پر عمود کھینچا جائے اور ولا، وما کو قائم محاور سمجھا جائے تو

لا = و ن = وف جم لا و ف = ر جم طہ

اور   ما = ن ف = وف جب لا و ف = ر جب طہ

مثال ۱ — اُن نقطوں کے قائم محدد کیا ہیں جن کے قطبی محدد علی الترتیب $(۱، \frac{\pi}{۲})$، $(۲، \frac{\pi}{۳})$ اور $(-۴، -\frac{\pi}{۴})$ ہیں۔

جواب: $(۰، ۱)$، $(۱، \sqrt{۳})$، $(-۲\sqrt{۲}، ۲\sqrt{۲})$

مثال ۲ — اُن نقطوں کے قطبی محدد کیا ہیں جن کے قائم محدد علی الترتیب $(-۱، -۱)$، $(-۱، \sqrt{۳})$ اور $(۳، -۴)$ ہیں۔

جواب: $(\sqrt{۲}، \frac{۵\pi}{۴})$، $(۲، \frac{۲\pi}{۳})$، $(۵، -مس^{-۱} \frac{۴}{۳})$

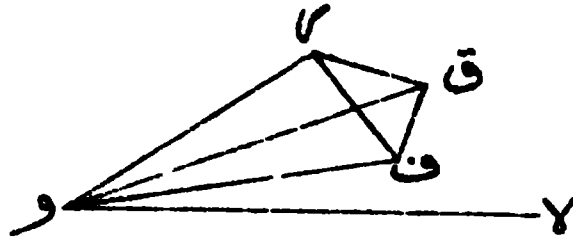
مثال ۳ — اُن نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو جن کے قطبی محدد $(۲، ۳۰^\circ)$ اور $(۴، ۹۰^\circ)$ ہیں۔ جواب: $\sqrt{۱۲}$

مثال ۴ — اُن نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو جن کے قطبی محدد $(۲، ۱۰^\circ)$ اور $(۲، ۴۰^\circ)$ ہیں۔ جواب: $\sqrt{۶} - \sqrt{۲}$

مثال ۵ — اُس نقطہ کا طریق معلوم کرو جو نقطہ $(۵، \frac{\pi}{۲})$ سے فاصلہ ۳ پر رہے۔ جواب: $ر^۲ - ۱۰ ر \, جب ط + ۱۶ = ۰$

مثال ۶ — ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کا فاصلہ نقطہ $(۳، \frac{\pi}{۴})$ سے ۲ ہے۔ جواب: $ر^۲ - ۶ ر \, جم (ط - \frac{\pi}{۴}) + ۵ = ۰$

(۱۵)

۱۲— ایک مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کے راسوں کے قطبی محدد دیے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ ف، ق، ر کے محدد علی الترتیب (ر$_1$، ط$_1$)، (ر$_2$، ط$_2$)، (ر$_3$، ط$_3$) ہیں

تب مثلث ف ق ر کا رقبہ = △ و ف ق + △ و ق ر − △ و ف ر

اور △ و ف ق = ½ و ف × و ق جب ف و ق

= ½ ر$_1$ ر$_2$ جب (ط$_2$ − ط$_1$)

اسی طرح △ و ق ر = ½ ر$_2$ ر$_3$ جب (ط$_3$ − ط$_2$)

اور △ و ف ر = ½ ر$_3$ ر$_1$ جب (ط$_3$ − ط$_1$) = −½ ر$_3$ ر$_1$ جب (ط$_1$ − ط$_3$)

∴ △ ف ق ر = ½ {ر$_1$ ر$_2$ جب (ط$_2$ − ط$_1$) + ر$_2$ ر$_3$ جب (ط$_3$ − ط$_2$) + ر$_3$ ر$_1$ جب (ط$_1$ − ط$_3$)}

اگر مثلث و ف ق کے رقبہ کو مثبت خیال کیا جائے جب کہ گھیرا و ف ق و خلاف سمت ساعت طے ہو اور منفی جبکہ موافق سمت ساعت طے ہو اور اسی طرح دوسرے مثلثوں کے متعلق سمجھا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ تمام صورتوں میں

△ ف ق ر = △ و ف ق + △ و ق ر + △ و ر ف

نیز ذو اربعۃ الاضلاع ف ق ر س کے لیے تمام صورتوں میں

رقبہ ف ق ر س = △ و ف ق + △ و ق ر + △ و ر س + △ و س ف

= ½ ر$_1$ ر$_2$ جب (ط$_2$ − ط$_1$) + ½ ر$_2$ ر$_3$ جب (ط$_3$ − ط$_2$)

$$+\tfrac{1}{2}\,\text{ر}_{3}\,\text{ر}_{4}\,\text{جب}\,(\text{ط}_{4}-\text{ط}_{3})+\tfrac{1}{2}\,\text{ر}_{4}\,\text{ر}_{1}\,\text{جب}\,(\text{ط}_{1}-\text{ط}_{4})$$

اب $\text{ر}_{1}\,\text{ر}_{2}\,\text{جب}\,(\text{ط}_{2}-\text{ط}_{1})$

$$=\text{ر}_{1}\,\text{ر}_{2}\,(\text{جب}\,\text{ط}_{2}\,\text{جم}\,\text{ط}_{1}-\text{جب}\,\text{ط}_{1}\,\text{جم}\,\text{ط}_{2})$$

$=\text{لا}_{1}\,\text{ما}_{2}-\text{لا}_{2}\,\text{ما}_{1}$ ، دفعہ ۱۱ سے

پس حسب دفعہ ۷

$$\text{رقبہ ف ق س ص}=\tfrac{1}{2}\Big\{(\text{لا}_{1}\,\text{ما}_{2}-\text{لا}_{2}\,\text{ما}_{1})+(\text{لا}_{2}\,\text{ما}_{3}-\text{لا}_{3}\,\text{ما}_{2})+(\text{لا}_{3}\,\text{ما}_{4}-\text{لا}_{4}\,\text{ما}_{3})+(\text{لا}_{4}\,\text{ما}_{1}-\text{لا}_{1}\,\text{ما}_{4})\Big\}$$

---

(۱٦)

دوسرا باب

خطِ مستقیم

۱۳ — ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو محددوں کے محوروں میں سے ایک کے متوازی ہو۔

فرض کرو کہ ل ف ایک خطِ مستقیم ہے جو محور لا کے متوازی ہے اور محور ما سے نقطہ ل پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ و ل = ب۔

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدد (لا، ما) ہیں۔
اب معین ن ف = و ل

+ $\frac{1}{2}$ ر$_3$ ر$_4$ جب (ط$_4$ - ط$_3$) + $\frac{1}{2}$ ر$_4$ ر$_1$ جب (ط$_1$ - ط$_4$)

ا ب ر$_1$ ر$_2$ جب (ط$_2$ - ط$_1$)

= ر$_1$ ر$_2$ (جب ط$_2$ جم ط$_1$ - جب ط$_1$ جم ط$_2$)

= لا$_1$ ما$_2$ - لا$_2$ ما$_1$ ، دفعہ ۱۱ سے

پس حسب دفعہ ۷

رقبہ ف ق ر س = $\frac{1}{2}$ {(لا$_1$ ما$_2$ - لا$_2$ ما$_1$) + (لا$_2$ ما$_3$ - لا$_3$ ما$_2$) + (لا$_3$ ما$_4$ - لا$_4$ ما$_3$) + (لا$_4$ ما$_1$ - لا$_1$ ما$_4$)}

(۱۶)

دوسرا باب

خطِ مستقیم

۱۳۔ ــــ ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو محددوں کے محوروں میں سے ایک کے متوازی ہو ــــ

فرض کرو کہ ل ف ایک خطِ مستقیم ہے جو محور لا کے متوازی ہے او[illegible] [illegible] ملتا ہے۔ فرض کرو کہ و ل = ب۔

[illegible] خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدد (لا، ما) ہیں۔
[illegible] ن ف = و ل

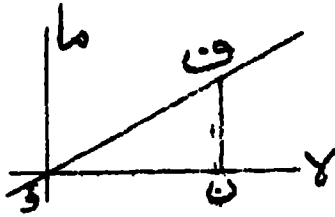
پس　　ما = ب　　خط کی مساوات ہے۔

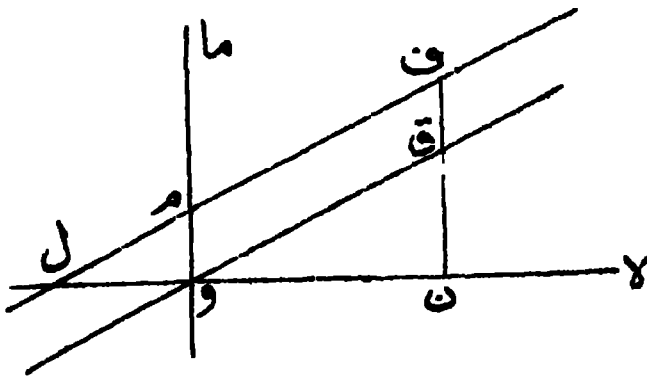
اسی طرح　لا = ا اس خط کی مساوات ہے جو محور ما کے متوازی ہے اور اس سے فاصلہ ا پر ہے۔

۱۴۔ ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو مبدا سے گزرے۔

فرض کرو کہ مبدا و سے گزرنے والا ایک خطِ مستقیم و ف ہے اور فرض کرو کہ زاویہ لا و ف کا ماس = م

فرض کرو کہ خط پر کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما ہیں۔

اب　　ن ف = مس ن و ف × و ن　　(زشا)

پس　　ما = م لا　　مطلوبہ مساوات ہے۔

۱۵۔ کسی خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ل مر ف ایک خطِ مستقیم ہے جو محوروں سے نقاط ل اور مر پر ملتا ہے۔

فرض کرو و مر = ج اور س و ل مر = م

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما ہیں۔

ف ن کو محور ما کے متوازی اور و ق کو خط ل مر ف کے متوازی کھینچو حسب شکل۔

اب ن ف = ن ق + ق ف

= و ن س ن و ق + و مر

لیکن ن ف = ما، و ن = لا، و مر = ج اور س ن و ق = س و ل مر = م

∴ ما = م لا + ج .... (۱)

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

جب کوئی مخصوص خطِ مستقیم زیر بحث ہوتا ہے تو مقادیر م اور ج مستقل رہتی ہیں اور اس لیے ان کو **مستقل** کہتے ہیں۔ ان میں سے م اُس زاویہ کا مماس ہے جو محور لا کی مثبت سمت اور خط کے اُس حصّہ کے درمیان ہوتا ہے جو محور لا کے اوپر ہے اور ج محور ما پر کا مقطوعہ ہے۔ (۱۸)

مستقلات م اور ج کو مناسب قیمتیں دے کر مساوات ما = م لا + ج سے کسی خطِ مستقیم کو تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً وہ خطِ مستقیم جو محور ما کو مبدا سے اکائی فاصلہ پر قطع کرتا ہے اور محور لا سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے مساوات ما = لا + ۱ سے تعبیر ہوگا۔

ہم (۱) سے دیکھتے ہیں کہ کسی خطِ مستقیم کی مساوات پہلے درجہ کی ہوتی ہے۔

۱۶ — ثابت کرو کہ پہلے درجہ کی ہر مساوات ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

پہلے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل

ا لا + ب ما + ج = ۰ ، . . . . (۱)

ہے۔ اب یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ مساوات ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے یہ دکھانا کافی ہے کہ اگر طریق پر کے کسی تین نقطوں کو ملایا جائے تو اس طریقہ پر بنے ہوئے مثلث کا رقبہ صفر ہوگا۔

فرض کرو کہ طریق پر کوئی تین نقطے ف، ق، ر ہیں اور ان کے محدد علی الترتیب (لاَ، ماَ)، (لاً، ماً) اور (لاٌ، ماٌ) ہیں۔ پس نقطوں کے محددوں کو مساوات (۱) پوری کرنی چاہیے، اس لیے

ا لاَ + ب ماَ + ج = ۰ ،

ا لاً + ب ماً + ج = ۰ ،

ا لاٌ + ب ماٌ + ج = ۰ ،

اب ا، ب، ج کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لاَ	ماَ	۱
لاً	ماً	۱
لاٌ	ماٌ	۱

= ۰

اس لیے مثلث کا رقبہ صفر ہے (دفعہ ۶) اور اس لیے طریق پر کے کوئی تین نقطے ایک خطِ مستقیم پر ہونے چاہییں۔

اس لیے مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

(۱۹) دوسرا ثبوت: اوپر کی مساواتوں سے بذریعہ عمل تفریق حاصل ہوتا ہے

ا (لاَ - لاً) + ب (ماَ - ماً) = ۰

اور ا (لاَ - لاٌ) + ب (ماَ - ماٌ) = ۰

اس لیے (لاَ - لاً) / (ماَ - ماً) = (لاَ - لاٌ) / (ماَ - ماٌ)

یعنے بموجب شکل $\frac{\text{ف گ}}{\text{گ ق}} = \frac{\text{ف ھ}}{\text{ھ ر}}$

اس لیے مثلثات ف گ ق، ف ھ ر متشابہ ہیں اور اس لیے ف ق ر ایک خطِ مستقیم ہے۔

مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ میں تین مستقلات نظر آتے ہیں حالانکہ دفعہ ۱۵ میں حاصل شدہ مساوات میں صرف دو مستقلات ہیں۔ لیکن اگر کسی نقطہ کے محدد لا، ما، مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ کو پورا کرتے ہوں تو وہ اُس مساوات کو بھی پورا کرینگے جو کسی مستقل سے ضرب دینے یا تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ چنانچہ اگر ہم ب سے تقسیم کریں تو ہم مساوات کو شکل ما = $-\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ لا + $\frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ میں لکھ سکتے ہیں اور اس میں صرف دو مستقلات $-\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ اور $-\frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ ہیں اور یہ مساوات ما = م لا + ج کے مستقلات م اور ج کے متناظر ہیں۔

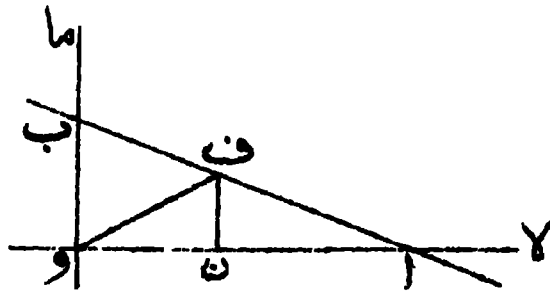
مثال ۱ — اُس خط کی مساوات لکھو جو محور لا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے اور محور ما کو مبداء سے فاصلہ -۳ پر قطع کرے۔ جواب: ما = -لا - ۳

مثال ۲ — خطِ مستقیم ۳ لا + ۲ ما - ۷ = ۰ کی مساوات کو شکل ما = م لا + ج میں لکھو۔ جواب: ما = $-\frac{3}{2}$ لا + $\frac{7}{2}$

مثال ۳ — ثابت کرو کہ وہ خطِ مستقیم جو محور لا کے ساتھ مس⁻¹ ۵ کا زاویہ بناتا ہے اور محور ما کو نقطہ (۰، -۵) پر قطع کرتا ہے نقطہ (۱، ۰) میں سے

گذرتا ہے۔

(۲۰) **۱۷— ایک خطِ مستقیم کی مساوات کو اُن مقطوعوں کی رقوم میں معلوم کرنا جو وہ محوروں پر قطع کرتا ہے۔**

فرض کرو کہ ا اور ب وہ نقطے ہیں جہاں خطِ مستقیم محوروں کو قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ و ا = و، و ب = ب۔

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما ہیں۔

ف ن کو محور ما کے متوازی کھینچو اور و ف کو ملاؤ۔

اب ∆ و ا ف + ∆ و ف ب = ∆ و ا ب

∴ و ما + ب لا = و ب

یا $\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} = ۱$

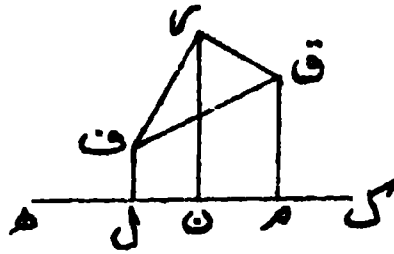
اِس مساوات کو شکل

ل لا + م ما = ۱

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں ل اور م، محوروں پر کے مقطوعوں کے متکافی ہیں۔

ظِل

۱۸۔۔۔ اگر کسی خطِ مستقیم کے سروں ف اور ق سے کسی دوسرے خطِ مستقیم ھ ک پر عمود ف ل اور ق م کھینچے جائیں تو ل م کو ف ق کا ظِل، ھ ک پر، کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ کوئی اور نقطہ س ہے اور ھ ک پر اس کا ظِل ن ہے تو چونکہ تمام صورتوں میں ل م + م ن = ل ن اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی خط پر ف ق اور ق س کے ظِلوں کا مجموعہ اس خط پر ف س کے ظِل کے مساوی ہوتا ہے۔ (۲۱)

اسی طرح کسی خط پر ا ب، ب ج، ج د ...، ف ق کے ظلوں کا مجموعہ ا ق کے ظِل کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز کسی خط پر ایک بند کثیر الاضلاع کے ضلعوں کے ظِلوں کا مجموعہ صفر کے مساوی ہوتا ہے۔

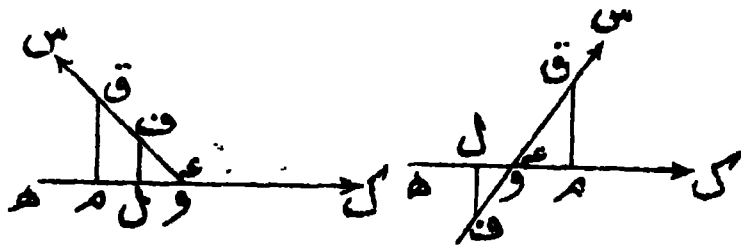
اگر ن ضلعوں والے منتظم کثیر الاضلاع کا ایک ضلع ایک معلومہ خط کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو دوسرے اضلاع ترتیب وار زاویے

$$طہ + \frac{2\pi}{ن}،\ طہ + \frac{4\pi}{ن}،\ طہ + \frac{6\pi}{ن}، \ldots$$

بنائینگے اور طہ کی تمام قیمتوں کے لیے حاصل ہوگا۔

جم طہ + جم (طہ + $\frac{۲\pi}{ن}$) + جم (طہ + $\frac{۴\pi}{ن}$) + ... ن رقموں تک = ۰

فرض کرو کہ وہ خط جس پر ف ق واقع ہے ھ ک کو و پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ان دو خطوں کی مثبت سمتوں و ک اور و س کے درمیان زاویہ ک و س، عہ ہے۔

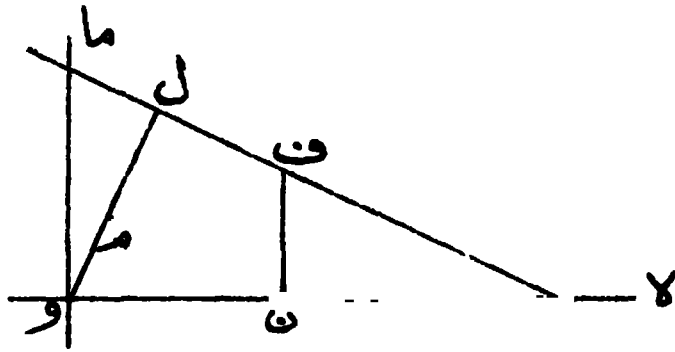
اب زاویہ کی جیب التمام کی تعریف کی رو سے

و ل = و ف جم عہ اور و م = و ق جم عہ

∴ ل م = ف ق جم عہ

اور

پس کسی خط ھ ک پر خط ف ق کا ظل ف ق جم عہ ہوتا ہے جہاں عہ وہ زاویہ ہے جو ھ ک کی مثبت سمت اور اُس خط کی مثبت سمت کے درمیان ہے جس پر ف ق واقع ہے۔

(۲۲) ۱۵۔ ایک خطِ مستقیم پر مبداء و سے عمود و ل کھینچا

گیا ہے اور یہ عمود محور لا کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے۔ خطِ مستقیم کی مساوات کو عمود و ل اور زاویہ عہ کی رقوم میں معلوم کرو۔
فرض کرو کہ و ل = ع اور زاویہ لا و ل = عہ۔ فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محددو لا، ما ہیں۔
ف ن کو محور ما کے متوازی اور ن مرکو و ل پر عمود کھینچو۔

اب ن ف، و ما کے متوازی ہے اور تمام صورتوں میں
زاویہ ما و ل = زاویہ ما و لا + زاویہ لا و ل
= - زاویہ لا و ما + زاویہ لا و ل = $-\frac{\pi}{2}$ + عہ
و ل پر و ن اور ن ف کے ظلوں کا مجموعہ و ل کے مساوی ہے (دفعہ ۱۸)۔
و ن کا ظل = و ن جم عہ
ن ف کا ظل = ن ف جم ($-\frac{\pi}{2}$ + عہ)
اس لیے ع = و ن جم عہ + ن ف جم ($-\frac{\pi}{2}$ + عہ)
= لا جم عہ + ما جب عہ

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

(۲۱) ۲۰۔ دفعات ۱۵، ۱۷، اور ۱۹ میں ہم نے خطِ مستقیم کی مساوات کو مختلف شکلوں میں جن میں مختلف مستقلات شامل ہوتے ہیں غیر تابع طریقوں سے معلوم کیا ہے۔ لیکن اس مساوات کی کسی شکل کو دوسری شکل سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مثلاً اگر ہمیں یہ مساوات محوروں پر کے مقطوعوں کی رقوم میں معلوم ہو تو ہم ع اور عہ کی رقوم میں اس مساوات کو رشتوں ا جم عہ = ع اور ب جب عہ = ع کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں جہاں یہ رشتے دفعہ ۱۹ کی شکل سے فوراً حاصل ہو جاتے ہیں۔ پس مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ میں ا اور ب کی ان قیمتوں کو درج کرنے سے مساوات لا جم عہ + ما جب عہ = ع حاصل ہوتی ہے۔

اگر خطِ مستقیم کی مساوات

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰$$

ہو تو اس کو $\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}$ سے تقسیم کرنے پر مساوات

$$\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}}\,\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}}\,\text{ما} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}} = ۰$$

حاصل ہوتی ہے۔ اب $\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}}$ اور $\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}}$ علی الترتیب کسی خاص زاویہ کی جیب التمام اور جیب ہیں کیونکہ ان کے مربعوں کا مجموعہ اکائی کے مساوی ہے۔ اگر ہم اس زاویہ کو عہ کہیں تو

$$\text{لا جم عہ} + \text{ما جب عہ} - \text{ع} = ۰$$

جہاں ع کو $-\frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}}$ کی جگہ رکھا گیا ہے۔

مثال ۱ ـــــ اگر ۳ لا ـ ۴ ما ـ ۵ = ۰ کو $\sqrt{۳^۲+۴^۲}$ سے تقسیم کرنے پر مساوات $\frac{۳}{۵}$ لا ـ $\frac{۴}{۵}$ ما ـ ۱ = ۰ حاصل ہوتی ہے۔ اس کی شکل لا جم ھ + ما جب ھ ـ ع = ۰ ہے جہاں جم ھ = $\frac{۳}{۵}$، جب ھ = ـ $\frac{۴}{۵}$ اور ع = ۱

مثال ۲ ـــــ مساوات لا + ما + ۵ = ۰، مساوات

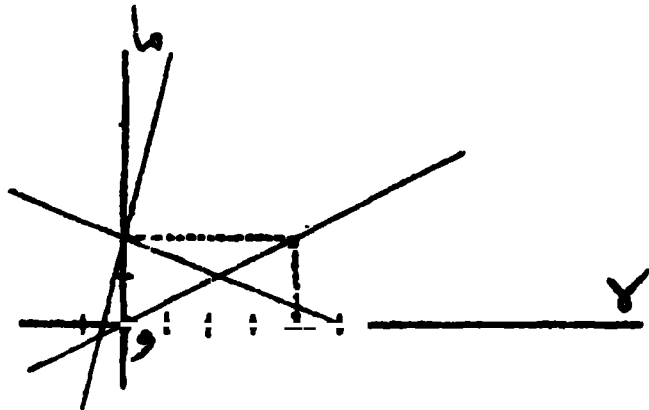
$$\text{لا جم } \frac{۵\pi}{۴} + \text{ما جب } \frac{۵\pi}{۴} = \frac{۵}{\sqrt{۲}}$$

کے مماثل ہے۔

مثال ۳ ـــــ مساوات، ۷ لا + ۲۴ ما + ۲۵ = ۰ کو شکل

لا جم ھ + ما جب ھ ـ ع = ۰

میں لکھو۔ جواب: ـ $\frac{۷}{۲۵}$ لا ـ $\frac{۲۴}{۲۵}$ ما ـ ۱ = ۰

(۲۴) **۲۱** ـــــ جب کسی خطِ مستقیم کی مساوات دی گئی ہو تو اس کا محل معلوم کرنے کے لیے صرف یہ ضروری ہے کہ اس پر کے کسی دو نقطوں کے محدد معلوم کر لیے جائیں۔ ان محددوں کو معلوم کرنے کے لیے لا کی کوئی دو قیمتیں فرض کرو اور ان کے جواب میں معلومہ مساوات سے ما کی دو قیمتیں معلوم کرو۔ وہ نقطے جہاں خط محوروں کو قطع کرتا ہے بڑی آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

مثال ۱ — خط مستقیم کی مساوات ۲ لا + ۵ ما = ۱۰ ہے۔ یہ خط مستقیم محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ما = ۰ اور اس لیے لا = ۵۔ محور ما کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں لا = ۰ اور اس لیے ما = ۲

مثال ۲ — خط ۴ لا - ما + ۲ = ۰۔ محوروں پر جو مقطوعے قطع کرتا ہے وہ علی الترتیب -½ اور ۲ ہیں۔

مثال ۳ — لا - ۲ ما = ۰۔ اس صورت میں مبدا خط پر ہے اور جب لا = ۴ تو ما = ۲

یہ سب خطوط شکل میں کھینچے گئے ہیں۔

۲۲ — اگر ہم ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا چاہیں جو کسی دو شرطوں کو پورا کرتا ہے تو ہم حسب ذیل عام شکلوں میں سے کوئی ایک شکل اس خط کی مساوات کے لیے فرض کر سکتے ہیں:

(۱) ما = م لا + ج، (۲) لا/ل + ما/ب = ۱، (۳) ل لا + م ما = ۱،

(۴) لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰، (۵) ا لا + ب ما + ج = ۰

ان میں سے کسی ایک شکل کو اختیار کر لینے کے بعد دو مستقلات م اور ج، یا ل اور ب، یا ل اور م، یا عہ اور ع، یا ا/ج اور ب/ج کی قیمتوں کو اُن دو شرطوں سے متعین کرنا ہوگا جن کو خط پورا کرتا ہے۔ (۲۵)

مثال ۱ — ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۳) میں سے گذرتا ہے اور محوروں پر مساوی مقطوعے قطع کرتا ہے۔

[فرض کرو کہ خط کی مساوات لا/ل + ما/ب = ۱ ہے۔

اب چونکہ مقطوعے مساوی ہیں اس لیے ل = ب

نیز چونکہ نقطہ (۲، ۳) خط پر ہے اس لیے ۲/ل + ۳/ل = ۱

∴ ل = ۵ = ب اور مطلوبہ مساوات لا/۵ + ما/۵ = ۱ ہے]

مثال ۲ — اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۲√۳) میں سے گذرتا ہے اور محور لا کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے۔

[فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات ما = م لا + ج ہے۔

تب چونکہ خطِ مستقیم محور لا کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے اس لیے م = مس ۶۰° = ۳√ - نیز نقطہ (۲√۳، ۲) خط پر ہے اس لیے ۲ = م ۳√ + ج اور اس لیے ج = -۱، پس مطلوبہ مساوات ما = ۳√ لا - ۱ ہے۔]

مثال ۳ — جب مساوات ۵ لا + ۱۲ ما - ۲۶ = ۰ کو شکل لا جم عہ + ما جیب عہ = ع میں لکھا جائے تو ع کی قیمت معلوم کرو۔ جواب: ۲

مثال ۴ — خط $\frac{لا}{۲۴} + \frac{ما}{۸} = ۱$

کا مبدا سے عمودی فاصلہ معلوم کرو۔ جواب: ۲، ۶۵

مثال ۵ — ثابت کرو کہ وہ خط جس کے مقطوعے محاور لا اور ما پر علی الترتیب ۵ اور -۴ ہیں نقطہ (۱۵، ۸) میں سے گذرتا ہے۔

مثال ۶ — ثابت کرو کہ وہ خط جو نقطوں (۵، ۰)، (۰، -۲) میں سے گذرتا ہے نقطوں (۱۵، ۴) اور (-۵، -۴) میں سے بھی گذرتا ہے۔

مثال ۷ — اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۴، ۱۲) میں سے گذرتا ہے اور محور لا کے ساتھ زاویہ مس⁻¹ ۳ بناتا ہے۔ جواب: ما = ۳ لا

مثال ۸ — ثابت کرو کہ نقطوں (۳، ۴) اور (۵، ۱) کو ملانے والے خطِ مستقیم کا نقطہ وسطی خط لا - ۲ ما + ۱ = ۰ پر ہے۔

مثال ۹ — ثابت کرو کہ خط ما - لا + ۲ = ۰ اُس خط کو جو نقطوں (۳، -۱) اور (۸، ۹) کو ملاتا ہے نسبت ۲ : ۳ میں قطع کرتا ہے۔

مثال ۱۰ — ثابت کرو کہ خط ۲ ما - ۳ لا - ۷ = ۰ اُس خط کو جو (۱، -۱) اور (۳، ۴) کو ملاتا ہے نسبت ۳ : -۲ میں خارجاً قطع کرتا ہے۔

۲۳ — ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا

(۲۶)

جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے معلومہ سمت میں کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدد لاَ، ماَ ہیں اور فرض کرو کہ خط محور لا کے ساتھ مس۔ام کا زاویہ بناتا ہے۔

تب اس خط کی مساوات

ما = م لا + ج

ہوگی اور چونکہ (لاَ، ماَ) اس خط پر ہے اس لیے

ماَ = م لاَ + ج

اس لیے تفریق کرنے پر

ما ـ ماَ = م (لا ـ لاَ) .... (۱)

وہ خط جو (۱) سے حاصل ہوتا ہے نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ پس م کو مناسب قیمت دینے سے یہ مساوات کسی خطِ مستقیم کو جو نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرتا ہے تعبیر کریگی۔

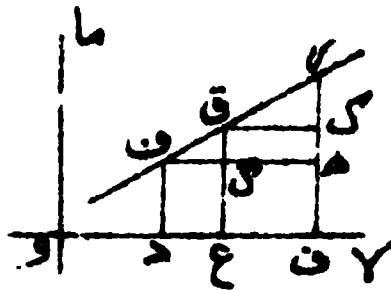
پس جب ہمیں یہ معلوم ہو جائے کہ ایک خطِ مستقیم ایک مخصوص نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرتا ہے تو ہم اس کی مساوات کے لیے فوراً لکھ لیتے ہیں۔

ما ـ ماَ = م (لا ـ لاَ)

اور پھر م کی قیمت کو اس دوسری شرط سے معلوم کرتے ہیں جس کو خط پورا کرتا ہے۔

۲۴۔ ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرے۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطے ف اور ق علی الترتیب (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) ہیں اور فرض کرو کہ خطِ مستقیم ف ق پر کوئی دوسرا نقطہ س

(لا، ما) ہے۔

(۲۷) اب چونکہ ف ق س ایک خطِ مستقیم ہے مثلثات ف گ ق، ف ھ س، متشابہ ہیں اور اس لیے

$$\frac{\text{ف ھ}}{\text{ف گ}} = \frac{\text{ھ س}}{\text{گ ق}}$$

یعنے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

دوسرا طریقہ: فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰، \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے تب چونکہ نقاط (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) اس خط پر ہیں اس لیے

$$\text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج} = ۰، \quad \ldots\ldots (۲)$$

اور

$$\text{ا لا}_2 + \text{ب ما}_2 + \text{ج} = ۰، \quad \ldots\ldots (۳)$$

مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) سے ا، ب، ج کو ساقط کرو تو مطلوبہ مساوات بشکل

$$\begin{vmatrix} لا & ما & ۱ \\ لا_۱ & ما_۱ & ۱ \\ لا_۲ & ما_۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

میں حاصل ہوگی۔

مثال ۱ — نقاط (۲، ۳) اور (۳، ۱) کو ملانے والے خط کی مساوات

$$\frac{ما - ۳}{۱ - ۳} = \frac{لا - ۲}{۳ - ۲} \quad \text{یا} \quad ما + ۲لا - ۷ = ۰$$

ہے۔

مثال ۲ — اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو (i) نقاط (۱، ۲) اور (۵، ۷) (ii) نقاط (-۷، ۱۰) اور (۳، ۱۲) کو ملاتے ہیں۔

جواب: (i) لا - ما + ۲ = ۰، (ii) لا + ۲ ما - ۱۳ = ۰.

مثال ۳ — ثابت کرو کہ (۳، ۵) اور (-۲، ۷) کو ملانے والا خط اُس خط کی تنصیف کرتا ہے جو (۷، ۲) اور (۹، ۲) کو ملاتا ہے۔

مثال ۴ — ثابت کرو کہ (۳، ۶) اور (-۶، ۹) کو ملانے والا خط محور ما کو مبدا سے اکائی فاصلہ پر قطع کرتا ہے۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ دو نقطوں (۹، ۳) اور (۱۵، -۳) میں سے گذرنے والا خط محوروں پر مساوی مقطوعے قطع کرتا ہے۔

مثال ۶ — وہ خطوط معلوم کرو جو نقطہ (۴، -۳) میں سے گذرتے ہیں اور محوروں کو اس طرح قطع کرتے ہیں کہ مقطوعے مقدار میں مساوی ہوتے ہیں۔

جواب: لا + ما - ۱ = ۰ اور لا - ما - ۷ = ۰.

۲۵ — فرض کرو کہ خطِ مستقیم ا ف، محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ فرض کرو کہ ا کے محدد لا۱، ما۱ اور ف کے محدد لا، ما ہیں اور فاصلہ ا ف = ر۔ (۲۸)

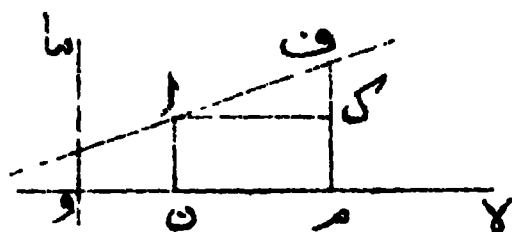
ا ن اور ف م کو محور ما کے متوازی کھینچو۔ ا ک کو محور لا کے

متوازی کھینچو۔

تب اک = اف جم طہ اور ک ف = اف جب طہ

یا لا - لاَ = ر جم طہ اور ما - ماَ = ر جب طہ

خط ا ف کی مساوات کو شکل

$$\frac{لا - لاَ}{جم\ طہ} = \frac{ما - ماَ}{جب\ طہ} = ر$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

۲۶ — فرض کرو کہ کسی خطِ مستقیم کی مساوات

ا لا + ب ما + ج = ۰ ...... (۱)

ہے۔

فرض کرو کہ کسی نقطہ ق کے محدد لاَ، ماَ ہیں اور فرض کرو کہ وہ خط جو محور ما کے متوازی ہے اور ق میں سے گذرتا ہے دیے ہوئے خط کو نقطہ ف پر قطع کرتا ہے جس کے محدد لاً، ماً ہیں۔

تب ایک شکل سے یہ ظاہر ہوگا کہ جب تک ق، خطِ مستقیم کی ایک ہی جانب رہتا ہے ق ف کو ایک ہی سمت میں کھینچنا پڑتا ہے لیکن جب، ق، خطِ مستقیم کی دوسری جانب واقع ہوتا ہے تو ق ف کو مخالف

سمت میں کھینچنا پڑتا ہے۔

اس کا یہ مطلب ہے کہ ق ف، خطِ مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی۔

اب ق ف = مَا ـ مَا .... (۲)

اور ا لاَ + ب مَا + ج = ا لاَ + ب مَا + ج ـ (ا لاَ + ب مَا + ج)

[کیونکہ (لاَ ، مَا) خط پر ہے اور اس لیے ا لاَ + ب مَا + ج = ۰]

∴ ا لاَ + ب مَا + ج = ـ ب (مَا ـ مَا)، ...... (۳)

(۲) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا لاَ + ب مَا + ج، خطِ مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی ہے۔

اگر ایک خطِ مستقیم کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ ہو اور کسی نقطہ (لاَ، مَا) کے محدد جملہ ا لا + ب ما + ج میں درج کیے جائیں تب اگر ا لاَ + ب مَا + ج مثبت ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ (لاَ، مَا) خط کی مثبت جانب واقع ہے لیکن اگر ا لاَ + ب مَا + ج منفی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ (لاَ، مَا) خط کی منفی جانب واقع ہے۔

اگر خط کی مساوات کو

ـ ا لا ـ ب ما ـ ج = ۰

لکھا جائے تو یہ ظاہر ہے کہ وہ جانب جس کو ہم نے مثبت جانب کہا ہے اب اُسے منفی جانب کہنا چاہیے۔

مثال ۱ ـــ نقطہ (۳، ۲) خط ۲ لا ـ ۳ ما ـ ۱ = ۰ کی منفی جانب پر ہے اور خط ۳ لا ـ ۲ ما ـ ۱ = ۰ کی مثبت جانب پر ہے۔

مثال ۲ ـــ نقاط (۲، ـ۱) اور (۱، ۱)، خط ۳ لا + ۴ ما ـ ۶ = ۰ کی مخالف جانبوں پر ہیں۔

مثال ۳ ـــ ثابت کرو کہ چار نقطے (۰، ۰)، (ـ۱، ۱)، (ـ۲، ۴) اور (۶، ۹) خطوطِ مستقیم ۲ لا ـ ۳ ما + ۱ = ۰ اور ۳ لا ـ ۵ ما + ۲ = ۰ سے بنے ہوئے چار مختلف خانوں میں

واقع ہیں۔

۲۷۔ دو دیئے ہوئے خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع کے محدد معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

ا لا + ب ما + ج = ۰ ، . . . . (۱)

اَ لا + بَ ما + جَ = ۰ ، . . . . (۲)

ہیں۔

اب اُس نقطہ کے محدد جو دونوں خطوطِ مستقیم میں مشترک ہے دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرینگے۔ پس ہمیں لا اور ما کی وہ قیمتیں معلوم کرنی ہیں جو مساواتوں (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں۔ یہ قیمتیں

لا / (ب جَ - بَ ج) = ما / (ج اَ - جَ ا) = ۱ / (ا بَ - اَ ب)

سے حاصل ہوتی ہیں۔

۲۸ —— وہ شرط معلوم کرنا کہ تین خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر مل سکیں۔ (۳۰)

فرض کرو کہ تین خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

ا لا + ب ما + ج = ۰ ، . . . . (۱)

اَ لا + بَ ما + جَ = ۰ ، . . . . (۲)

اً لا + بً ما + جً = ۰ ، . . . . (۳)

ہیں۔

یہ تین خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر ملینگے اگر اِن میں سے دو خطوں کا نقطۂ تقاطع تیسرے خط پر واقع ہو۔

خطوطِ مستقیم (۱) اور (۲) کے نقطۂ تقاطع کے محدد

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب جً - بً ج}} = \frac{\text{ما}}{\text{ج اً - جً ا}} = \frac{1}{\text{ا بً - اً ب}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

،، شرط کہ یہ نقطہ خط (۳) پر واقع ہو یہ ہے کہ

$$\text{اً}\frac{\text{ب جً - بً ج}}{\text{ا بً - اً ب}} + \text{بً}\frac{\text{ج اً - جً ا}}{\text{ا بً - اً ب}} + \text{جً} = ۰$$

یا $\text{اً (ب جً - بً ج) + بً (ج اً - جً ا) + جً (ا بً - اً ب)} = ۰$

مثالیں

۱۔ وہ خطوطِ مستقیم کھینچو جن کی مساواتیں ہیں

(۱) لا + ما = ۲، (۲) ۳ لا - ۴ ما = ۱۲

(۳) ۴ لا - ۳ ما + ۱ = ۰، (۴) ۲ لا + ۵ ما + ۷ = ۰

۲۔ اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطوں کے حسب ذیل جوڑوں کو ملاتے ہیں:

(۱) (۲، ۳) اور (-۴، ۱)، (۲) (ا، ب) اور (ب، ا)

جواب: (۱) لا - ۳ ما + ۷ = ۰ (۲) لا + ما = ا + ب

۳۔ اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۱، -۱) میں سے گزرتے ہیں اور محور لا کے ساتھ علی الترتیب زاویے ۵۰° اور ۶۰° بناتے ہیں۔

جواب: ما + ۱ = ∓ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (لا - ۱)

۴۔ حسب ذیل مساواتوں کو شکل لا جم ص + ما جب ص - ع = ۰ میں لکھو:

(۱) ۳ لا + ۴ ما - ۱۵ = ۰، (۲) ۱۲ لا - ۵ ما + ۱۰ = ۰

جواب: (۱) $\frac{3}{5}$ لا + $\frac{4}{5}$ ما - ۳ = ۰، (۲) -$\frac{12}{13}$ لا + $\frac{5}{13}$ ما - $\frac{10}{13}$ = ۰

۵۔ اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے اور

خط ۲ لا - ۳ ما - ۵ = ۰ کے متوازی ہے۔ جواب: ۲ لا - ۳ ما + ۷ = ۰

۶۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۱) میں سے گزرتا ہے اور نقاط (۲، ۳)، (۳، -۱) کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ جواب: ۴ لا + ما = ۹

۷۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۵، ۶) میں سے گزرتا ہے اور محوروں پر مساوی قطعے قطع کرتا ہے۔ جواب: لا + ما = ۱۱ (۳۱)

۸۔ خطوطِ مستقیم کے حسبِ ذیل زوجوں کے نقاطِ تقاطع معلوم کرو:

(۱) ۵ لا + ۷ ما = ۹۹ اور ۳ لا + ۲ ما + ۷۷ = ۰؛ (۲) ۲ لا - ۵ ما + ۱ = ۰ اور لا + ما + ۴ = ۰

(۳) لا/و + ما/ب = ۱ اور لا/ب + ما/و = ۱

جواب: (۱) (-۶۷، ۶۲)؛ (۲) (-۳، -۱)؛ (۳) وب/(و+ب)، وب/(و+ب)

۹۔ ثابت کرو کہ تین خطوطِ مستقیم ۵ لا + ۳ ما = ۷، ۳ لا - ۴ ما = ۱۰، اور لا + ۲ ما = ۰ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ تین نقطے (۰، ۱۱)، (۲، ۳) اور (۳، -۱) ایک خطِ مستقیم پر ہیں۔

نیز تین نقطے (۳ و، ۰)، (۰، ۲ ب) اور (و، ۲ ب) بھی ایک خطِ مستقیم پر ہیں۔

۱۱۔ اُس مثلث کے اضلاع کی مساواتیں معلوم کرو جس کے راسوں کے محدد (۱، ۲)، (۲، ۳)، (-۳، -۵) ہیں۔

جواب: ۸ لا - ۵ ما - ۱ = ۰، ۷ لا - ۴ ما + ۱ = ۰، لا - ما + ۱ = ۰

۱۲۔ اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جن میں سے ہر ایک، مثال ۱۱ کے مثلث کے راسوں میں سے ایک میں سے اور مقابل کے ضلع کے نقطۂ وسطی میں سے گزرتا ہے۔ جواب: ۲ لا - ما = ۰، ۳ لا - ۲ ما = ۰، ۵ لا - ۳ ما = ۰

۱۳۔ اُس متوازی الاضلاع کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے اضلاع کی مساواتیں

لا - و = ۰، لا - ب = ۰، ما - ج = ۰، ما - د = ۰

ہیں۔

جواب: (د-ج) لا + (ا-ب) ما + ب ج - ا د = ۰، (د-ج) لا + (ب-ا) ما + ا ج - ب د = ۰

۱۴ — ا کی کیا قیمت ہونی چاہیے کہ تین خطوطِ مستقیم

۳ لا + ۲ ما - ۲ = ۰، ا لا + ۲ ما - ۳ = ۰، ۲ لا - ما - ۳ = ۰

ایک نقطہ پر مل سکیں۔

۱۵ — نقطوں (۱، ۲) اور (۴، ۳) کو ملانے والا خط نقطوں (۲، ۳) اور (۴، ۱) کو ملانے والے خط سے کس نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

جواب: خط کی تنصیف ہوتی ہے۔

۱۶ — معلوم کرو کہ آیا نقطے (۲، ۳) اور (۳، ۲) خطِ مستقیم ۵ ما - ۶ لا + ۴ = ۰ کی ایک ہی جانب واقع ہیں یا مخالف جانبوں پر۔

۱۷ — ثابت کرو کہ نقطے (۰، ۰) اور (۳، ۴) خط ما - ۲ لا + ۱ = ۰ کی مخالف جانبوں پر واقع ہیں۔

۱۸ — ثابت کرو کہ مبداء اُس مثلث کے اندر ہے جس کے ضلعوں کی مساواتیں

لا - ۷ ما + ۲۵ = ۰، ۵ لا + ۳ ما + ۱۱ = ۰، ۳ لا - ۲ ما - ۱ = ۰

ہیں۔ [متناظر راس (-۱، -۲) (۳، ۴) (-۴، ۳) ہیں]

(۳۲)

۲۹ — دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں دی گئی ہیں۔ اِن خطوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

(۱) اگر دیے ہوئے خطوں کی مساواتیں

لا جم ھ + ما جب ھ - ع = ۰، لا جم ھَ + ما جب ھَ - عَ = ۰

ہوں تو مطلوبہ زاویہ ھ - ھَ یا π - (ھ - ھَ) ہوگا۔

کیونکہ ھ اور ھَ وہ زاویے ہیں جو وہ عمود محورِ لا کے ساتھ بناتے ہیں جن کو مبداء سے اِن خطوں پر علی الترتیب کھینچا گیا ہے اور یہ ظاہر ہے کہ کسی دو خطوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی یا متمم ہوتا ہے جو ان خطوں کے عمودوں کے درمیان بنتا ہے۔

(۲) اگر خطوں کی مساواتیں

ما = م لا + ج ، ما = مَ لا + جَ

ہوں اور طہ، طہَ وہ زاویے ہوں جو یہ خطوط محور لا کے ساتھ بناتے ہیں تو
مس طہ = م اور مس طہَ = مَ اور اِس لیے

مس (طہ - طہَ) = (م - مَ) / (۱ + م مَ)

∴ مطلوبہ زاویہ مس⁻¹ ((م - مَ) / (۱ + م مَ)) ہے۔

یہ خطوط ایک دوسرے پر عمود ہونگے جبکہ

۱ + م مَ = ۰

اور متوازی ہونگے جبکہ

م = مَ

(۳) اگر خطوں کی مساواتیں

ا لا + ب ما + ج = ۰ ، اَ لا + بَ ما + جَ = ۰

ہوں تو اِن مساواتوں کو شکلوں

ما = - (ا/ب) لا - (ج/ب) اور ما = - (اَ/بَ) لا - (جَ/بَ)

میں لکھا جا سکتا ہے۔ اِس لیے (۲) کی رو سے مطلوبہ زاویہ

مس⁻¹ ((- ا/ب + اَ/بَ) / (۱ + ا اَ/ب بَ)) یا مس⁻¹ ((ب اَ - بَ ا) / (ا اَ + ب بَ))

ہے۔

(۳۳) خطوط ا لا + ب ما + ج = ۰ ، اور اَ لا + بَ ما + جَ = ۰
ایک دوسرے پر عمود ہونگے اگر

ا اَ + ب بَ = ۰

اور متوازی ہونگے اگر

ب دَ - بَ د = ۰ یا د/دَ = ب/بَ

۳۰ ــ عمودیت کی شرط صریحاً ان دو خطوں سے پوری ہوتی ہے جن کی مساواتیں

د لا + ب ما + ج = ۰ اور ب لا - د ما + جَ = ۰

ہیں۔ یہ شرط اِن دو خطوں

د لا + ب ما + ج = ۰، اور لا/د - ما/ب + جَ = ۰

سے بھی پوری ہوتی ہے۔

پس اگر ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کی مساوات میں لا اور ما کے سروں کو باہم بدلا جائے (یا انہیں مقلوب کیا جائے) اور اِن میں سے ایک کی علامت تبدیل کی جائے تو ایک ایسے خطِ مستقیم کی مساوات حاصل ہوگی جو دیے ہوئے خطِ مستقیم پر عمود ہوگا، اب اگر یہ خط کسی دوسری شرط کو بھی پورا کرتا ہے تو مستقل رقم کو موزوں قیمت دینی چاہیے۔

مثال ۱ ــ وہ خط جو مبداء میں سے گذرتا ہے اور ۴ ما + ۲ لا = ۰ پر عمود ہے ۲ ما - ۴ لا = ۰ ہے۔

مثال ۲ ــ وہ خط جو نقطہ (۴، ۵) میں سے گذرتا ہے اور ۳ لا - ۲ ما + ۵ = ۰ پر عمود ہے ۲ (لا - ۴) + ۳ (ما - ۵) = ۰ ہے کیونکہ وہ دیے ہوئے خط پر عمود ہے اور نقطہ (۴، ۵) میں سے گذرتا ہے۔

مثال ۳ ــ خطوط

۲ لا + ۳ ما + ۱ = ۰ اور لا - ما = ۰

کے درمیان حادہ زاویہ مسں تا ۱/۵ ہے۔

مثال ۴ — ثابت کرو کہ نقطوں (۱، ۳-) اور (۲-، ۳) کو ملانے والا خط نقطوں (۵، ۲) اور (۹، ۳) کو ملانے والے خط پر عمود ہے۔

مثال ۵ — خطوط ۳لا + ما - ۷ = ۰ اور لا + ۲ما + ۴ = ۰ کے درمیان حادہ زاویہ معلوم کرو۔ جواب: ۴۵°

مثال ۶ — خطوط ۳لا - ۲ما + ۷ = ۰ اور ۲لا + ما - ۱۱ = ۰ کے درمیان حادہ زاویہ معلوم کرو۔ جواب: مس⁻¹ ۷/۴

مثال ۷ — وہ خطوط معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۳) میں سے گذرتے ہیں اور خط ۳لا - ما + ۵ = ۰ کے ساتھ ۴۵° کے حادہ زاویے بناتے ہیں۔

جواب: لا - ۲ما + ۴ = ۰، ۲لا + ما - ۷ = ۰

۳۱ — ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا۔

(۳۷)

فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات

لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰ ...... (۱)

ہے اور فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدد لا، ما، ہیں۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے خطِ مستقیم پر مبداء و سے اور نقطہ (لا، ما) سے عمود ول، ف ک ہیں۔

ف ن کو و لا پر اور ف م کو و ل پر عمود کھینچو۔
تب و م = و ل پر و ن اور ن ف کے ظلوں کا مجموعہ
اب ن ف، و ما کے متوازی ہے اور تمام صورتوں میں
زاویہ ما و ل = زاویہ ما و لا + زاویہ لا و ل
= - زاویہ لا و ما + زاویہ لا و ل = $-\frac{\pi}{2}$ + عہ
و ل پر و ن کا ظل و ن جم عہ ہے اور ن ف کا ظل

ن ف جم $\left(-\frac{\pi}{2} + \text{عہ}\right)$

ہے۔ پس و م = لا، جم عہ + ما، جب عہ
∴ ک ف = ل م = و م - و ل
= لا، جم عہ + ما، جب عہ - ع

پس خط لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰ پر کسی نقطہ سے عمود کھینچا جائے تو اس کا طول جملہ

لا، جم عہ + ما، جب عہ - ع

میں نقطہ کے محددوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(۳۵) اگر خط کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ ہو تو اس کو (دفعہ ۲۰) لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{ما} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

میں لکھا جا سکتا ہے اور یہ شکل وہی ہے جو (۱) کی ہے۔ اس لیے اس خط پر نقطہ لا، ما، سے کھینچے ہوئے عمود کا طول

$$\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{لا}_1 + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{ما}_1 + \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$$

یا

$$\frac{\text{ا}\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

ہے۔

دوسرا طریقہ :- اُس خط کی مساوات جو نقطہ ف $(\text{لا}_1\text{،}\ \text{ما}_1)$ میں سے گذرتا ہے اور خط $\text{ا}\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ پر عمود ہے

$$\text{ب}(\text{لا} - \text{لا}_1) - \text{ا}(\text{ما} - \text{ما}_1) = ۰$$

ہے۔

اگر یہ عمودی خط دیے ہوئے خط سے نقطہ ک پر ملے اور ک کے محدد $\text{لا}_2\text{،}\ \text{ما}_2$ ہوں تو چونکہ ک دونوں خطوں پر ہے اس لیے

$$\text{ب}(\text{لا}_2 - \text{لا}_1) - \text{ا}(\text{ما}_2 - \text{ما}_1) = ۰ \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور $\text{ا}\text{لا}_2 + \text{ب}\,\text{ما}_2 + \text{ج} = ۰$ جس کو لکھا جا سکتا ہے

$$\text{ا}(\text{لا}_2 - \text{لا}_1) + \text{ب}(\text{ما}_2 - \text{ما}_1) = -(\text{ا}\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ج}) \text{،} \quad \ldots (۲)$$

(۱) اور (۲) کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)\left\{(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)^2\right\} = (\text{ا}\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ج})^2$$

اس لیے

$$\text{ک ف} = \left\{(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\text{ا}\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$$

پس جب ایک خطِ مستقیم کی مساوات کو شکل $\text{ا}\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ میں دیا جائے تو اس سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ جملہ $\text{ا}\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج}$ میں نقطہ کے محدد درج کرنے اور لا، ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر المربع سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ کو ہمیشہ مثبت فرض کیا جائے تو خط کی مثبت جانب کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کا طول مثبت ہوگا اور منفی جانب کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کا طول منفی ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۲۶]

(۴۲) ۳۲ ۔ ان خطوں کی مساواتیں معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کریں ۔

اگر دو خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویوں کے ناصف کھینچے جائیں اور اِن ناصفوں میں سے ایک پر کے کسی نقطے سے خطوں پر عمود ڈالے جائیں تو یہ ظاہر ہے کہ یہ عمود مقدار میں ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔

پس اگر خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

$$ا لا + ب ما + ج = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور

$$اَ لا + بَ ما + جَ = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہوں اور دو ناصفوں میں سے کسی ایک پر کوئی نقطہ (لاَ، ماَ) ہو تو

$$\frac{ا لاَ + ب ماَ + ج}{\sqrt{ا^2 + ب^2}} \quad \text{اور} \quad \frac{اَ لاَ + بَ ماَ + جَ}{\sqrt{اَ^2 + بَ^2}}$$

مقداریں مساوی ہونے چاہییں۔

اِس لیے نقطہ (لاَ، ماَ)، خطوطِ مستقیم

$$\frac{ا لا + ب ما + ج}{\sqrt{ا^2 + ب^2}} = \pm \frac{اَ لا + بَ ما + جَ}{\sqrt{اَ^2 + بَ^2}} ، \ldots\ldots (۳)$$

میں سے کسی ایک پر ہے۔

اِس لیے وہ دو خطوط جو (۳) سے حاصل ہوتے ہیں مطلوبہ ناصف ہیں۔

ہم اِن دو ناصفوں میں تمیز کر سکتے ہیں کیونکہ اگر ہم دونوں نسب نماؤں کو مثبت لیں اور اگر (۳) میں اوپر کی علامت لی جائے تو ا لا + ب ما + ج اور

a لا + ب ما + ج دونوں یا تو مثبت ہونے چاہئیں یا دونوں منفی۔

پس $\dfrac{\text{ا لا + ب ما + ج}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}} = + \dfrac{\text{اَ لا + بَ ما + جَ}}{\sqrt{\text{اَ}^2 + \text{بَ}^2}}$ ...... (۴)

میں ہر نقطہ، خطوط (۱) اور (۲) دونوں کی مثبت جانب ہے یا دونوں کی منفی جانب۔

اگر مساواتوں کو اس طرح لکھا جائے کہ مستقل رقام دونوں مثبت ہوں تو مبدا دونوں خطوں کی مثبت جانب ہوگا۔ اس لیے (۴) اس زاویہ کا ناصف ہوگا جس میں مبدا واقع ہے۔

مثال ۱ — خطوط ۴لا - ۳ما + ۱ = ۰ اور ۱۲لا + ۵ما + ۱۳ = ۰ کے (۳۷)

درمیانی زاویوں کے ناصف $\dfrac{\text{۴لا - ۳ما + ۱}}{\text{۵}} = \pm \dfrac{\text{۱۲لا + ۵ما + ۱۳}}{\text{۱۳}}$ سے حاصل ہوتے ہیں اور اوپر کی علامت لینے سے وہ ناصف ملتا ہے جس میں مبدا واقع ہے۔

حسب ذیل مثال اہم ہے۔

مثال ۲ — ایک مثلث ا ب ج کے راس ا، ب، ج کے محدد علی الترتیب (۱، ۲)، (۲۵، ۸) اور (۹، ۲۱) ہیں۔ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز معلوم کرو۔

اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کی مساواتیں

۱۳لا + ۱۶ما - ۴۵۳ = ۰، ۱۹لا - ۸ما - ۳ = ۰ اور لا - ۴ما + ۷ = ۰

ہیں۔ اگر ان مساواتوں کے دائیں جانبی ارکان میں ا، ب، ج کے محددوں کو درج کیا جائے تو نتائج علی الترتیب -، +، - ہوں گے۔

اب اضلاع کی مساواتوں میں تمام ارقام کی علامتیں (اگر ضرورت ہو) تبدیل کرو تاکہ ہر راس مقابل کے ضلع کی مثبت جانب ہو۔ تب مساواتیں ہوں گی

-۱۳لا - ۱۶ما + ۴۵۳ = ۰، ۱۹لا - ۸ما - ۳ = ۰، -لا + ۴ما - ۷ = ۰۔

پس $\frac{-13لا - 16ما + 453}{\sqrt{13^2 + 16^2}} = + \frac{19لا - 8ما - 3}{\sqrt{19^2 + 8^2}}$

کونکہ زاویہ ا ج ب کا اندرونی ناصف ہونا چاہیے کیونکہ اس مساوات کے دونوں ارکان مثبت ہونے چاہییں یا دونوں منفی اور اس لیے ناصف پر کا کوئی نقطہ ج ا اور ج ب دونوں کی مثبت جانب یا دونوں کی منفی جانب ہونا چاہیے۔

اسی طرح $\frac{19لا - 8ما - 3}{\sqrt{19^2 + 8^2}} = + \frac{-لا + 4ما - 7}{\sqrt{1^2 + 4^2}}$

زاویہ ب ا ج کا اندرونی ناصف ہے۔

پس اندرونی دائرہ کا مرکز مساواتوں

$$\frac{-13لا - 16ما + 453}{5\sqrt{17}} = \frac{19لا - 8ما - 3}{5\sqrt{17}} = \frac{-لا + 4ما - 7}{\sqrt{17}}$$

سے حاصل ہوگا چنانچہ یہ نقطہ (۵، ۱۱، ۱۱) ہے۔

۳۳ — دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔

مطلوبہ مساوات کو حاصل کرنے کا سب سے واضح طریقہ یہ ہے کہ دیے ہوئے خطِ مستقیم کا نقطۂ تقاطع (لاَ، ماَ) معلوم کیا جائے اور پھر شکل ما - ماَ = م (لا - لاَ) استعمال کی جائے جو نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرنے والے کسی خطِ مستقیم کی مساوات کی شکل ہے۔ لیکن حسبِ ذیل طریقہ بعض اوقات قابلِ ترجیح قرار پاتا ہے۔ (۳۸)

فرض کرو کہ دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

ا لا + ب ما + ج = ۰، .... (۱)

اَ لا + بَ ما + جَ = ۰، .... (۲)

ہیں۔ اب مساوات

ا لا + ب ما + ج + ل (اَ لا + بَ ما + جَ) = ۰، .... (۳)

پر غور کرو ۔ یہ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے کیونکہ وہ پہلے درجہ کی مساوات ہے، نیز اگر (لاَ ، ماَ) وہ نقطہ ہو جو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم میں مشترک ہے تو حاصل ہونا چاہیے

و لاَ + ب ماَ + ج = ۰ ،

وَ لاَ + بَ ماَ + جَ = ۰ ،

اور اس لیے   و لاَ + ب ماَ + ج + لہ (وَ لاَ + بَ ماَ + جَ) = ۰

اس آخری مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ (لاَ ، ماَ) خط (۳) پر بھی ہے ۔

پس (۳) ایک ایسے خطِ مستقیم کی مساوات ہے جو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرتا ہے ۔ نیز لہ کو موزوں قیمت دینے سے یہ مساوات کسی دوسری شرط کو بھی پوری کر سکتی ہے، مثلاً وہ کسی دوسرے دیے ہوئے نقطہ میں سے گذرنے والے خط کو تعبیر کر سکتی ہے ۔ اس لیے مساوات (۳)، لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے، اُن تمام خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو (۱) اور (۲) کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرتے ہیں ۔

مثال ۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو مبدا کو خطوط ۲ لا + ۵ ما - ۴ = ۰ اور ۳ لا - ۲ ما + ۲ = ۰ کے نقطۂ تقاطع سے ملاتا ہے ۔

کوئی خط جو نقطۂ تقاطع میں سے گذرتا ہے

۲ لا + ۵ ما - ۴ + لہ (۳ لا - ۲ ما + ۲) = ۰

سے حاصل ہوتا ہے ۔ یہ نقطہ (۰ ، ۰) میں سے گذریگا اگر

-۴ + ۲ لہ = ۰ یا لہ = ۲

∴ ۲ لا + ۵ ما - ۴ + ۲ (۳ لا - ۲ ما + ۲) = ۰

یا ۸ لا + ما = ۰

مطلوبہ مساوات ہے ۔

(۹۶) **۳۴** ۔ اگر تین خطوطِ مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب

و لا + ب ما + ج = ۰، وَ لا + بَ ما + جَ = ۰، وً لا + بً ما + جً = ۰

ہوں اور اگر ہم تین مستقلات ل، م، ن معلوم کرسکیں ایسے کہ رشتہ

ل (ا لا + ب ما + ج) + م (اَ لا + بَ ما + جَ) + ن (اً لا + بً ما + جً) = ۰ ...... (۱)

متماثلاً درست ہو یعنے لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہو تو تین خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر ملیں گے۔ کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدد خطوں کی کسی دو مساواتوں کو پورا کرتے ہوں تو رشتہ (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ یہ محدد تیسری مساوات کو بھی پورا کریں گے۔

یہ اصول اکثر استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال — وہ تین خطوطِ مستقیم جو ایک مثلث کے راسوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاطِ وسطی سے ملاتے ہیں ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

فرض کرو کہ راس ا، ب، ج علی الترتیب (لاَ، ماَ)، (لاً، ماً)، اور (لاٌ، ماٌ) ہیں۔ ب ج، ج ا، ا ب کے نقاطِ وسطی د، ع، ف علی الترتیب

$$\left(\frac{\text{لاً}+\text{لاٌ}}{2},\ \frac{\text{ماً}+\text{ماٌ}}{2}\right),\ \left(\frac{\text{لاٌ}+\text{لاَ}}{2},\ \frac{\text{ماٌ}+\text{ماَ}}{2}\right),\ \left(\frac{\text{لاَ}+\text{لاً}}{2},\ \frac{\text{ماَ}+\text{ماً}}{2}\right)$$

ہوں گے۔ اس لیے ا د کی مساوات

$$\frac{\text{ما}-\text{ماَ}}{\frac{\text{ماً}+\text{ماٌ}}{2}-\text{ماَ}}=\frac{\text{لا}-\text{لاَ}}{\frac{\text{لاً}+\text{لاٌ}}{2}-\text{لاَ}}\ \ ......\ (1)$$

یا ما (لاً + لاٌ − ۲ لاَ) − لا (ماً + ماٌ − ۲ ماَ) + لاَ (ماً + ماٌ) − ماَ (لاً + لاٌ) = ۰

ہوگی۔ اسی طرح ب ع، ج ف کی مساواتیں علی الترتیب

ما (لاٌ + لاَ − ۲ لاً) − لا (ماٌ + ماَ − ۲ ماً) + لاً (ماٌ + ماَ) − ماً (لاٌ + لاَ) = ۰،

اور ما (لاَ + لاً − ۲ لاٌ) − لا (ماَ + ماً − ۲ ماٌ) + لاٌ (ماَ + ماً) − ماٌ (لاَ + لاً) = ۰

ہوں گی۔

اب چونکہ یہ تین مساواتیں متماثلاً معدوم ہوتی ہیں جبکہ انہیں باہم جمع کیا جاتا ہے

اس لیے اِن سے تعبیر شدہ تین خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

[(۱) میں اندراج کرنے سے آسانی کے ساتھ یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ ث جس کے محدد ½ (لَ + لاً + لاًّ)، ½ (مَ + مً + مًّ) ہیں ا د پر ہے اور اس نتیجہ کے تشاکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ث، ب ع اور ج ف پر بھی ہے۔]

(۴۰)

مثالیں

۱ ـــ وہ زاویے معلوم کرو جو خطوطِ مستقیم کے حسب ذیل زوجوں کے درمیان ہیں:

(۱) ما = ۲ لا + ۵ ، ۳ لا + ما = ۷

(۲) لا + ۲ ما − ۴ = ۰ ، ۲ لا − ما + ۱ = ۰

(۳) ا لا + ب ما + ج = ۰ ، (ا + ب) لا − (ا − ب) ما = ۰

جواب: (۱) °۴۵ ، (۲) °۹۰ ، (۳) °۴۵

۲ ـــ اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو ۲ لا + ۷ ما − ۵ = ۰ پر عمود ہو اور نقطہ (۳، ۱) میں سے گذرے۔ جواب: ۷ لا − ۲ ما = ۱۹

۳ ـــ اُن خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو مبدا میں سے گذریں اور خطوط ۳ لا + ۲ ما − ۵ = ۰ اور ۴ لا + ۳ ما − ۷ = ۰ پر عمود ہوں۔ اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو جہاں یہ عمود خطوں سے ملتے ہیں اور ثابت کرو کہ اِن نقطوں کو ملانیوالے خط کی مساوات ۲۳ لا + ۱۱ ما − ۳۵ = ۰ ہے۔

۴ ـــ خطوں ۴ لا + ۳ ما − ۷ = ۰، ۵ لا + ۱۲ ما − ۲۰ = ۰، اور ۳ لا + ۴ ما − ۸ = ۰ سے نقطہ (۲، ۳) کے عمودی فاصلے معلوم کرو۔ جواب: ۲

۵ ـــ اُن خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو علی الترتیب نقاط (۱، ۱) اور (−۲، −۱) میں سے گذریں اور ۳ لا + ۴ ما + ۷ = ۰ کے متوازی ہوں۔ اِن خطوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو۔ جواب: ۱۲/۵

۶ ـــ اُن دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۳) میں سے

گذریں اور لا + ۲ ما = ۰ کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائیں ۔

جواب: لا - ۳ ما + ۷ = ۰، ۳ لا + ما = ۹

۷ — اُن دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو لا + ۷ ما + ۲ = ۰ کے متوازی ہوں اور نقطہ (۱، -۱) سے اکائی فاصلہ پر واقع ہوں ۔

جواب: لا + ۷ ما + ۶ ± ۵ √۲ = ۰

۸ — اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو مبداء کو لا - ۴ ما - ۷ = ۰ اور ۲ لا + ما - ۱ = ۰ کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے ۔

جواب: ۱۳ لا + ۱۱ ما = ۰

۹ — اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱) کو ۳ لا + ۴ ما - ۲ = ۰ اور لا - ۲ ما + ۵ = ۰ کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے ۔

جواب: ۷ لا + ۲۶ ما = ۳۳

۱۰ — اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو ما - ۴ لا - ۱ = ۰ اور ۲ لا + ۵ ما - ۶ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گذرے اور ۳ ما + ۴ لا = ۰ پر عمود ہو۔

جواب: ۸۸ ما - ۶۶ لا = ۱۰۱

۱۱ — ایک مثلث کے راس (۲، ۱)، (۳، ۲) اور (-۱، -۱) ہیں۔ اِس مثلث کے اضلاع پر مبداء سے عمود کھینچے گئے ہیں۔ اِن عمودوں کے طول معلوم کرو —

جواب: ۱/۵ ، ۱/۱۳ √۱۳ ، ۱/۲ √۲

(۴۱)

۱۲ — اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو خطوطِ مستقیم ۴ ما + ۳ لا - ۱۲ = ۰ اور ۳ ما + ۴ لا - ۲۴ = ۰ کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کریں، اور نیز وہ شکل کھینچو جو اِن چار خطوں کو تعبیر کرے ۔

جواب: ما - لا + ۱۲ = ۰، ۷ ما + ۷ لا - ۳۶ = ۰

۱۳ — خطوط لا + ۳ ما - ۱۰ = ۰، لا + ۳ ما - ۲۰ = ۰، ۳ لا - ما + ۵ = ۰، ۳ لا - ما - ۵ = ۰ سے بنے ہوئے مستطیل کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ وہ نقطہ (۳/۲ ، ۹/۲) پر متقاطع ہوتے ہیں ۔

۱۴ — خطوط ما - لا = ۰، ما + لا = ۰، لا - ج = ۰ سے بنے ہوئے

مثلث کا رقبہ معلوم کرو ۔ جواب : $ج^2$

۱۵ ــ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو خطوط $ما - 2لا = 0$، $ما - 3لا = 0$ اور $ما = 5لا + 4$ سے بنتا ہے $\frac{4}{3}$ ہے ۔

۱۶ ــ اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جو خطوط $ما = 2لا + 4$، $2ما + 3لا = 5$، $ما + لا + 1 = 0$ سے بنے ۔ جواب : $\frac{338}{21}$

۱۷ ــ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو خطوں $ما = م_1لا + ج_1$، $ما = م_2لا + ج_2$، $لا = 0$ سے بنتا ہے

$$\frac{\frac{1}{2}(ج_1 - ج_2)^2}{م_2 - م_1}$$

ہے ۔

۱۸ ــ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو خطوطِ مستقیم $ما = م_1لا + ج_1$، $ما = م_2لا + ج_2$، $ما = م_3لا + ج_3$ سے بنتا ہے

$$\frac{1}{2}\frac{(ج_2 - ج_3)^2}{م_2 - م_3} + \frac{1}{2}\frac{(ج_3 - ج_1)^2}{م_3 - م_1} + \frac{1}{2}\frac{(ج_1 - ج_2)^2}{م_1 - م_2}$$

ہوگا ۔ [مثال ۱۷ استعمال کرو]

۱۹ ــ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم پر اس نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے ۔

۳۵ ــ ن ویں درجہ کی متجانس مساوات، مبداء میں سے گذرنے والے ن خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی ۔

فرض کرو کہ مساوات

$$ا\,ما^{ن} + ب\,ما^{ن-1}لا + ج\,ما^{ن-2}لا^2 + \cdots + ک\,لا^{ن} = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

ہے ۔

لا سے تقسیم کرو تو

$$ا\left(\frac{ما}{لا}\right)^{ن} + ب\left(\frac{ما}{لا}\right)^{ن-۱} + ج\left(\frac{ما}{لا}\right)^{ن-۲} + \dots + ک = ۰ \quad \dots (۲)$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں $م_۱$، $م_۲$ ... $م_ن$ ہیں۔
تب مساوات بالا وہی ہے جو

(۴۴)

$$ا\left(\frac{ما}{لا} - م_۱\right)\left(\frac{ما}{لا} - م_۲\right)\left(\frac{ما}{لا} - م_۳\right)\dots\left(\frac{ما}{لا} - م_ن\right) = ۰$$

ہے اور اس لیے پوری ہوتی ہے جبکہ

$$\frac{ما}{لا} - م_۱ = ۰،\quad \frac{ما}{لا} - م_۲ = ۰، \text{ وغیرہ}$$

اور وہ کسی اور صورتوں میں پوری نہیں ہوتی۔
اس لیے اُس طریق پر کے تمام نقطے جو (۱) سے تعبیر ہوتا ہے ان خطوطِ مستقیم

$$ما - م_۱ لا = ۰،\quad ما - م_۲ لا = ۰،\quad \dots،\quad ما - م_ن لا = ۰$$

میں سے ایک یا دوسرے پر ہیں۔

۳۶ ـ دو خطوطِ مستقیم کے درمیان زاویہ معلوم کرنا جو مساوات $ا لا^۲ + ۲ب لا ما + ج ما^۲ = ۰$ سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اگر خطوط $ما - م_۱ لا = ۰$، $ما - م_۲ لا = ۰$ ہوں تو $(ما - م_۱ لا)(ما - م_۲ لا) = ۰$
وہی ہے جو دی ہوئی مساوات

$$ما^۲ + \frac{۲ب}{ج} لا ما + \frac{ا}{ج} لا^۲ = ۰$$

ہے۔

$$\therefore\ م_۱ + م_۲ = -\frac{۲ب}{ج}، \quad \dots\dots\dots (۱)$$

اور

$$م_۱ م_۲ = \frac{ا}{ج}، \quad \dots\dots\dots (۲)$$

اگر خطوط کے درمیان زاویہ ط ہو تو

(۱) اور (۲) سے

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1\text{م}_2} = \frac{2\sqrt{\text{ب}^2 - \text{ا ج}}}{\text{ا} + \text{ج}}$$

اگر $\text{ب}^2 - \text{ا ج}$ مثبت ہے تو خطوط حقیقی ہیں، یہ خطوط منطبق ہونگے

اگر $\text{ب}^2 - \text{ا ج} = 0$

اگر $\text{ب}^2 - \text{ا ج}$ منفی ہے تو خطوط خیالی ہیں لیکن حقیقی نقطہ (۰، ۰) میں سے گذرتے ہیں۔

اگر $\text{ا} + \text{ج} = 0$ تو خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے

یعنے لا^2 اور ما^2 کے سروں کا مجموعہ صفر ہو تو خطوط علی القوائم ہوں گے۔

۴۷ — وہ شرط معلوم کرو کہ دوسرے درجہ کی عام مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کر سکے۔ (۴۲)

دوسرے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل

$$\text{ا لا}^2 + 2\text{ ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + 2\text{ گ لا} + 2\text{ ف ما} + \text{ج} = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

ہے۔ اگر یہ مساوات تماثلاً

$$(\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن})(\text{لَ لا} + \text{مَ ما} + \text{نَ}) = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

کے معادل ہو تو (۱) اور (۲) میں سروں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{ل لَ} = \text{ا}،\quad \text{م مَ} = \text{ب}،\quad \text{ن نَ} = \text{ج}،$$

$$\text{م نَ} + \text{مَ ن} = 2\text{ف}،\quad \text{ن لَ} + \text{نَ ل} = 2\text{گ}،\quad \text{ل مَ} + \text{لَ م} = 2\text{ھ}$$

آخری تین رشتوں کو مسلسل ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

$$8\text{ ف گ ھ} = 2\text{ ل لَ م مَ ن نَ} + \text{ل لَ}(\text{مَ}^2\text{ن}^2 + \text{م}^2\text{نَ}^2)$$

$$+ \text{م مَ}(\text{نَ}^2\text{ل}^2 + \text{ن}^2\text{لَ}^2) + \text{ن نَ}(\text{لَ}^2\text{م}^2 + \text{ل}^2\text{مَ}^2).$$

= ۲ ا ب ج + ا (۴ ف^{۲} - ۲ ب ج) + ب (۴ گ^{۲} - ۲ ج ا)
+ ج (۴ ھ^{۲} - ۲ ا ب)

پس ا ب ج - ا ف^{۲} - ب گ^{۲} - ج ھ^{۲} + ۲ ف گ ھ = ۰ ..... (۳)

مطلوبہ شرط ہے۔

اگر لا^{۲} اور ما^{۲} دونوں کے سر صفر نہ ہوں تو اوپر کے نتیجہ کو زیادہ آسانی سے اس طرح حاصل کیا جا سکتا ہے کہ مساوات کو لا یا ما میں دودرجی مساوات سمجھ کر حل کیا جائے۔

فرض کرو کہ ا صفر نہیں ہے تو اگر ہم مساوات کو لا میں دودرجی مساوات سمجھ کر حل کریں تو

ا لا + ھ ما + گ = ± √((ھ^{۲} - ا ب) ما^{۲} + ۲ (ھ گ - ا ف) ما + گ^{۲} - ا ج)

اب اس غرض کے لیے کہ یہ شکل ا لا + ب ما + ج = ۰ میں تحویل ہو سکے یہ ضروری اور کافی ہے کہ علامت جذر کے اندر کا جملہ کامل مربع ہو۔ اس کے لیے شرط

(ھ^{۲} - ا ب) (گ^{۲} - ا ج) = (ھ گ - ا ف)^{۲}

ہے جس کو ا سے تقسیم کرنے کے بعد وہ شرط (۳) کے مماثل ہو جاتی ہے۔

۳۸ — ان خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو

ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ... (۱)

اور ل لا + م ما = ۱ .... (۲)

کے مشترک نقطوں کو مبدا سے ملانے سے حاصل ہوتے ہیں۔

(۴۴) مساوات (۱) کو مساوات (۲) کے ذریعہ دوسرے درجہ کی متجانس مساوات بناؤ تو حاصل ہوگا

ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ (گ لا + ف ما) (ل لا + م ما) + ج (ل لا + م ما)^{۲} = ۰ .... (۳)

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

کیونکہ مساوات (۳) متجانس ہونے کی وجہ سے وہ مبدا میں سے گذرنیوالے خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے (دفعہ ۳۵)۔ یہ معلوم کرنے کے لیے کہ خطوط (۳) خط (۲) سے کہاں متقاطع ہوتے ہیں (۲) میں ل لا + م ما = ۱ لکھو تو رشتہ (۱) پورا ہوگا جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خطوط (۳)، (۱) اور (۲) کے مشترک نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

مثال ۔ وہ خطوط معلوم کرو جو

۲ لا^{۲} + ۲ لا ما − ۴ لا + ۱ = ۰ اور ۳ لا + ما − ۱ = ۰

کے نقاطِ تقاطع کو مبدا سے ملاتے ہیں۔

خطوں کی مساوات

۲ لا^{۲} + ۳ لا ما − ۴ لا (۳ لا + ما) + (۳ لا + ما)^{۲} = ۰

ہے۔ یہ مساوات

لا^{۲} − ما^{۲} − ۵ لا ما = ۰

میں تحویل ہوتی ہے۔ پس خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

۳۹ ۔ اُن خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو دو خطوطِ مستقیم

ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} = ۰

کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کریں۔

اگر دیے ہوئے خطوط محور لا کے ساتھ زاویے طہ$_{۱}$ اور طہ$_{۲}$ بناتے ہیں تو

(ما − لا مس طہ$_{۱}$) (ما − لا مس طہ$_{۲}$) = ۰

وہی ہے جو دی ہوئی مساوات ہے۔ پس

مس طہ$_{۱}$ + مس طہ$_{۲}$ = − $\frac{۲ ھ}{ب}$ ، .... (۱)

$$\text{مس طہ}_1 \,\text{مس طہ}_2 = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

اگر طہ وہ زاویہ ہو جو ناصفوں میں سے ایک محور لا کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\text{طہ} = \frac{\text{طہ}_1 + \text{طہ}_2}{۲} \quad \text{یا} \quad \text{طہ} = \frac{\text{طہ}_1 + \text{طہ}_2}{۲} + \frac{\pi}{۲}$$

اور ان میں سے کسی صورت میں

$$\text{مس ۲ طہ} = \text{مس}\,(\text{طہ}_1 + \text{طہ}_2)$$

یا

$$\frac{۲\,\text{مس طہ}}{۱ - \text{مس}^۲\,\text{طہ}} = \frac{\text{مس طہ}_1 + \text{مس طہ}_2}{۱ - \text{مس طہ}_1\,\text{مس طہ}_2}$$

(۴۵) اگر ایک ناصف پر (لا، ما) کوئی نقطہ ہو تو $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{مس طہ}$

اس لیے

$$\frac{۲\,\frac{\text{ما}}{\text{لا}}}{۱ - \frac{\text{ما}^۲}{\text{لا}^۲}} = \frac{\text{مس طہ}_1 + \text{مس طہ}_2}{۱ - \text{مس طہ}_1\,\text{مس طہ}_2}$$

اس لیے (۱) اور (۲) کو استعمال کرنے سے مطلوبہ مساوات

$$\frac{۲\,\text{لا ما}}{\text{لا}^۲ - \text{ما}^۲} = \frac{۲\,\text{ھ}}{\text{ا} - \text{ب}}$$

یا

$$\frac{\text{لا}^۲ - \text{ما}^۲}{\text{ا} - \text{ب}} = \frac{\text{لا ما}}{\text{ھ}} \,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ دو خطوط مستقیم $\text{ما}^۲ - ۲\,\text{لا ما قط طہ} + \text{لا}^۲ = ۰$ ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہیں۔

۲ — ثابت کرو کہ مساوات لا^2 + لا ما - ۶ ما^2 + ۷ لا + ۳۱ ما - ۱۸ = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اِن کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔ جواب: ۴۵°

۳ — ثابت کرو کہ حسبِ ذیل مساواتوں میں سے ہر ایک ' خطوطِ مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے۔ ہر زوج کا درمیانی زاویہ بھی معلوم کرو۔

(۱) (لا - لِ)(ما - لِ) = ۰ ' (۲) لا^2 - ۴ ما^2 = ۰ '

(۳) لا ما = ۰ ' (۴) لا ما - ۲ لا - ۳ ما + ۶ = ۰ '

(۵) لا^2 - ۵ لا ما + ۴ ما^2 = ۰ ' (۶) لا^2 - ۵ لا ما + ۴ ما^2 + ۳ لا - ۴ = ۰ '

(۷) لا^2 + ۲ لا ما تم ۲ عہ - ما^2 = ۰

۴ — لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

۱۲ لا^2 - ۱۰ لا ما + ۲ ما^2 + ۱۱ لا - ۵ ما + لہ = ۰

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی ؟ ثابت کرو کہ اگر یہ مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے تو اِن کا درمیانی زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{1}{7}$ ہے جواب: لہ = ۲

۵ — لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

۱۲ لا^2 + لہ لا ما + ۲ ما^2 + ۱۱ لا - ۵ ما + ۲ = ۰

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی ؟ جواب: - ۱۰ یا - $\frac{۳۵}{۲}$

۶ — لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

۱۲ لا^2 + ۳۶ لا ما + لہ ما^2 + ۶ لا + ۶ ما + ۳ = ۰

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ یہ خطوط حقیقی ہیں یا خیالی ؟

جواب: ۲۸

مثال ۷ — لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات لہ لا ما + ۵ لا + ۳ ما + ۲ = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی ؟ جواب: لہ = $\frac{۱۵}{۲}$

۸ — ثابت کرو کہ وہ خطوط جو

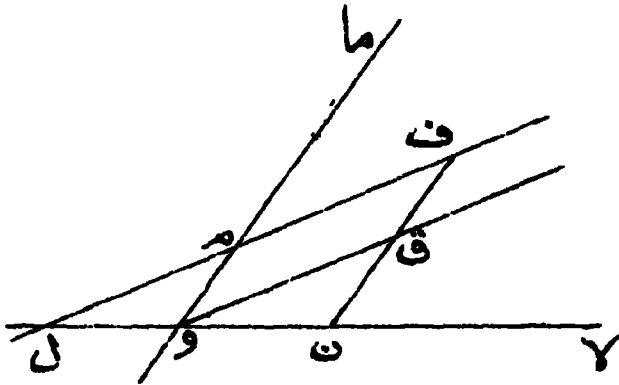
۳ لا^2 + ۵ لا ما - ۳ ما^2 + ۲ لا + ۳ ما = ۰ اور ۳ لا - ۲ ما = ۱

کے مشترک نقطوں کو مبدا سے ملاتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

خطوط ۳ لا^2 + ۵ لا لا ما - ۳ ما^2 + (۲ لا + ۳ ما)(۳ لا - ۲ ما) = ۰ ہیں۔

(۴۶)

مائل محاور

۴۰ - خطِ مستقیم کی مساوات اُن محوروں کے حوالے سے معلوم کرنا جو ایک دوسرے سے زاویہ سہ پر مائل ہوں۔

فرض کرو کہ ل م ف کوئی خطِ مستقیم ہے جو محوروں سے نقاط ل، م پر ملتا ہے۔

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدد (لا، ما) ہیں۔

ف ن کو محور ما کے متوازی اور و ق کو خط ل م ف کے متوازی کھینچو حسب شکل۔ تب

ن ف = ن ق + ق ف، .... (۱)

لیکن (ن ق)/(و ن) = (جب ن و ق)/(جب (سہ - ن و ق)) = مستقل = م (فرض کرو)

اور ق ف = و م = مستقل = ج (فرض کرو)

اس لیے (۱) ہو جاتا ہے ما = م لا + ج جو مطلوبہ مساوات ہے۔

اگر طہ وہ زاویہ ہو جو خط محور لا کے ساتھ بناتا ہے تو

$$م = \frac{جب\ طہ}{جب\ (سہ - طہ)}$$

$$\therefore\ مس\ طہ = \frac{م\ جب\ سہ}{۱ + م\ جم\ سہ}$$

۴۱ — دفعاتِ ماسبق کے متعدد نتیجے درست رہتے ہیں خواہ محاور قائم ہوں یا مائل۔ اِن نتیجوں کو آسانی سے پہچان لیا جا سکتا ہے۔ (۴۷)

۴۲ — دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں زاویہ سہ پر مائل محوروں کے حوالے سے دی گئی ہیں۔ اِن کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

اگر خطوں کی مساواتیں

$$ما = م\ لا + ج\ ،\quad ما = مَ\ لا + جَ$$

ہوں اور اگر طہ اور طہَ وہ زاویے ہوں جو وہ علی الترتیب محور لا کے ساتھ بناتے ہیں تو (دفعہ ۴۰)

$$مس\ طہ = \frac{م\ جب\ سہ}{۱ + م\ جم\ سہ}\ \text{اور}\ مس\ طہَ = \frac{مَ\ جب\ سہ}{۱ + مَ\ جم\ سہ}$$

$$\text{اس لیے}\quad مس\ (طہ - طہَ) = \frac{(م - مَ)\ جب\ سہ}{۱ + (م + مَ)\ جم\ سہ + م\ مَ}\ ، \quad \ldots\ldots (۱)$$

یا خطوں کا درمیانی زاویہ

$$مس^{-۱}\ \frac{(م - مَ)\ جب\ سہ}{۱ + (م + مَ)\ جم\ سہ + م\ مَ}$$

ہے۔

یہ خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں گے اگر

$$۱ + (م + مَ)\ جم\ سہ + م\ مَ = ۰\ ، \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اگر خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

ا لا + ب ما + ج = ۰ ، اَ لا + بَ ما + جَ = ۰

ہوں اور ان کے درمیان زاویہ طہ ہو تو م = - ا/ب اور مَ = - اَ/بَ اور اسلئے ان قیمتوں کو (۱) میں درج کرنے سے

مس طہ = - (ا بَ - اَ ب) جب سہ / (ا اَ + ب بَ - (ا بَ + اَ ب) جم سہ)

یہ خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے اگر

ا اَ + ب بَ - (ا بَ + اَ ب) جم سہ = ۰ ، .... (۳)

پس کوئی خط جو ا لا + ب ما + ج = ۰ پر عمود ہے اس کی مساوات

(ب - ا جم سہ) لا - (ا - ب جم سہ) ما = مستقل

ہے - بالخصوص خطوط لا + ما جم سہ = ۰ اور ما + لا جم سہ = ۰ ، علی الترتیب محوروں ما = ۰ اور لا = ۰ کے عمود وار ہیں -

(۴۸) **۴۳* - خط ا لا + ب ما + ج = ۰ سے کسی نقطہ (لا۱ ، ما۱) کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا -**

فرض کرو کہ خط محاور لا اور ما کو علی الترتیب نقاط ک اور ل پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدد لا۱ ، ما۱ ہیں اور ف ن وہ عمود ہے جو اس سے خط ل ک پر کھینچا گیا ہے - تب

△ف ل ک = △ف ل و + △ف و ک - △ل و ک ، ... (۱)

∴ ف ن × ل ک = و ل × لا۱ جب سہ + و ک × ما۱ جب سہ - و ک × و ل × جب سہ .... (۲)

اگر ہم مثلث کے رقبہ کی علامت کے لحاظ سے کوئی قرارداد اختیار نہ کریں تو نقطہ اور خط کے مختلف محلوں کے لیے رشتہ (۱) میں ترمیم کرنی ہوگی، لیکن مساوات (۲) ہر صورت میں درست رہتی ہے - طالب علم کو

چاہیے کہ مختلف شکلیں کھینچ کر اس بیان کی صداقت کا بطور خود یقین کرلے۔

اب $وک = -\frac{ج}{ا}$ ، $ول = -\frac{ج}{ب}$

نیز $لک^۲ = وک^۲ + ول^۲ - ۲ وک \times ول جم س$

$$= \frac{ج^۲}{ا^۲ ب^۲} (ا^۲ + ب^۲ - ۲ ا ب جم س)$$

ش (۲) سے

$$ف ن = \frac{ا لا_۱ + ب ما_۱ + ج}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲ - ۲ ا ب جم س}} جب س$$

دوسرا طریقہ

اُس خط کی مساوات جو نقطہ ف (لا۱، ما۱) میں سے گذرتا ہے اور خط

$ا لا + ب ما + ج = ۰$ پر عمود ہے

$$(ب - ا جم س)(لا - لا_۱) - (ا - ب جم س)(ما - ما_۱) = ۰$$

ہے۔ فرض کرو کہ عمود کے پائیں ن کے محدد لا۲، ما۲ ہیں، پس ن دونوں خطوں پر ہے اور اس لیے

$$(ب - ا جم س)(لا_۲ - لا_۱) - (ا - ب جم س)(ما_۲ - ما_۱) = ۰ ، \ldots\ldots (۱)$$

اور $ا لا_۲ + ب ما_۲ + ج = ۰$ جس کو لکھا جا سکتا ہے

$$ا جب س (لا_۲ - لا_۱) + ب جب س (ما_۲ - ما_۱) = - جب س (ا لا_۱ + ب ما_۱ + ج) ، \ldots\ldots\ldots (۲)$$

(۱) اور (۲) کا مربع لیکر جمع کرنے سے

$$(ا^۲ + ب^۲ - ۲ ا ب جم س)\{(لا_۲ - لا_۱)^۲ + (ما_۲ - ما_۱)^۲ + ۲ (لا_۲ - لا_۱)(ما_۲ - ما_۱) جم س\}$$

$$= جب^۲ س (ا لا_۱ + ب ما_۱ + ج)^۲$$

پس ن ف = $\dfrac{ا لا_۱ + ب ما_۱ + ج}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲ - ۲ ا ب \text{ جم } سہ}}$ جب سہ

۴۴* - خطوط

$ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰$

کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا جبکہ محاور زاویہ سہ پر مائل ہوں -

اگر خطوط ما = مَ لا ' اور ما = مً لا

ہوں تو $مَ + مً = - \dfrac{۲ ھ}{ب}$

اور $مَ مً = \dfrac{ا}{ب}$

اس لیے $مَ - مً = \dfrac{۲ \sqrt{ھ^۲ - ا ب}}{ب}$

لیکن ما = مَ لا اور ما = مً لا کا درمیانی زاویہ

$مس^{-۱} \dfrac{(مَ - مً) \text{ جب } سہ}{۱ + (مَ + مً) \text{ جم } سہ + مَ مً}$ [دفعہ ۴۲]

ہے، اس لیے مطلوبہ زاویہ

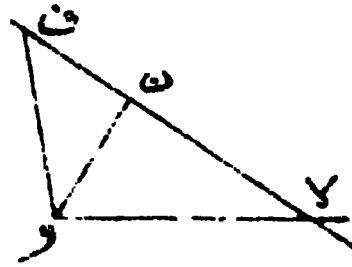
$مس^{-۱} \dfrac{۲ \sqrt{ھ^۲ - ا ب} \times \text{ جب } سہ}{ب - ۲ ھ \text{ جم } سہ + ا}$ ہے -

خطوط $ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰$ ۔ ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے اگر

$ا + ب - ۲ ھ \text{ جم } سہ = ۰$.

قطبی محدد

۴۵ - خطِ مستقیم کی قطبی مساوات معلوم کرنا -

فرض کرو کہ مبدا سے دیے ہوئے خط پر عمود و ن ہے اور فرض کرو کہ
و ن = ع اور لا و ن = عہ ۔
فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ ف ہے اور اس کے محدد ر، طہ ہیں۔

تب شکل میں زاویہ ن و ف ' (طہ - عہ) ہے اور
و ف جم ن و ف = و ن
اس لیے مطلوبہ مساوات
ر جم (طہ - عہ) = ع
ہے۔

اس مساوات کو مساوات لا جم عہ + ما جب عہ = ع میں لا کی بجائے رجم طہ اور ما کی بجائے رجب طہ رکھکر بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

۴۶ ۔ دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرنے والے خط کی قطبی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطے ف، ق اور ان کے محدد علی الترتیب رَ، طَہ اور رً، طً ہیں۔
فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ ر ہے اور اس کے محدد ر، طہ ہیں۔
اب چونکہ
△ف و ق + △ق و ر - △ف و ر = ۰
اس لیے رَ رً جب (طً - طَ) + رً ر جب (طہ - طً) - ر رَ جب (طہ - طَ) = ۰
اس لیے مطلوبہ مساوات

ز زَ جب (طَ - طً) + زً ز جب (ط - طً) + ز زَ جب (طً - ط) = ۰

۴۷ –
مثالیں

۱ – ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مساوات ما² - لا² = ۰ سے حاصل ہوتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں خواہ محاور کے درمیان زاویہ کچھ ہی ہو –

۲ – اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱ ، ۲) میں سے گذرے اور خط لا + ۲ ما = ۰ کو علی القوائم قطع کرے، یہ معلوم ہے کہ محوروں کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے۔ ‏ جواب: لا = ۱

۳ – وہ زاویہ معلوم کرو جو خط ما = ۵ لا + ۶ محور لا کے ساتھ بناتا ہے جبکہ محاور ایک ایسے زاویہ پر مائل ہوں جس کی جیب التمام ۴/۵ ہے –

جواب: ۴۵°

۴ – اگر خطوط ما = م لا + ج اور ما = مَ لا + جَ، محور لا کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو

م + مَ + ۲ م مَ جم سہ = ۰۔

۵ – اگر خطوط ا لا² + ۲ ب لا ما + ج ما² = ۰، محور لا کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو ب = ا جم سہ –

۶ – ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مساوات

لا² + ۲ لا ما جم سہ + ما² جم ۲ سہ = ۰۔

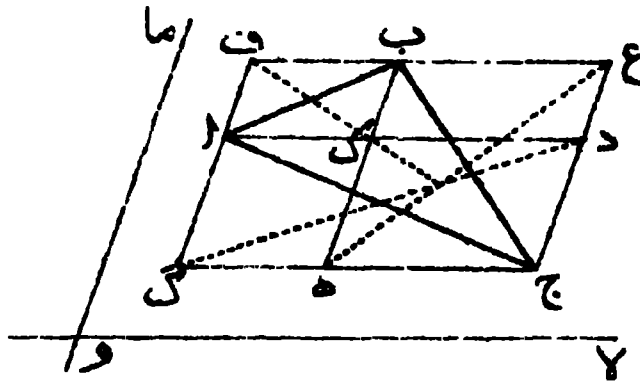
سے حاصل ہوتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں، محاور زاویہ سہ پر مائل ہیں۔

۷ – اُس خط پر جو نقطوں (ر، طہ۱) اور (ر۲، طہ۲) کو ملاتا ہے قطب سے عمود کھینچا گیا ہے – اِس عمود کے پائین کے قطبی محدد معلوم کرو –

(۵۱) ۴۸ – حسب ذیل مثالوں سے اہم امور کی توضیح ہوتی ہے:–

(۱) ایک مثلث کے اضلاع پر انہیں وتر مان کر متوازی الاضلاع کھینچے گئے ہیں جن کے ضلعے دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے

متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان متوازی الاضلاعوں کے دوسرے وتر ایک نقطہ پر ملیں گے ۔

متوازی الاضلاعوں کے اضلاع کے متوازی کسی دو خطوں کو محاور فرض کرو۔ فرض کرو کہ مثلث کے راسوں ا، ب، ج کے محدد علی الترتیب (لا′، ما′)، (لا″، ما″)، (لا‴، ما‴) ہیں

اب اس متوازی الاضلاع پر غور کرو جس کا ایک وتر ا ب ہے۔ اس کے دوسرے وتر کے سرے (لا′، ما″) اور (لا″، ما′) ہیں ۔

اس لیے وتر ف ک کی مساوات

(ما − ما″) / (ما′ − ما″) = (لا − لا′) / (لا″ − لا′)

ہوگی یا

لا(ما′ − ما″) + ما(لا′ − لا″) + لا″ ما″ − لا′ ما′ = ۰

اسی طرح ہ ع کی مساوات

لا(ما″ − ما‴) + ما(لا″ − لا‴) + لا‴ ما‴ − لا″ ما″ = ۰

اور گ د کی مساوات

لا(ما‴ − ما′) + ما(لا‴ − لا′) + لا′ ما′ − لا‴ ما‴ = ۰

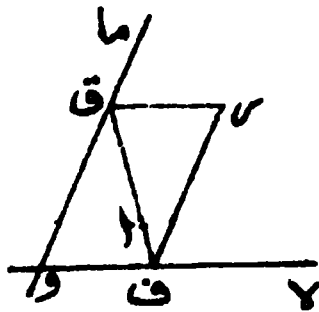
ہوگی ۔

ان تین مساواتوں کا مجموعہ متماثلاً معدوم ہوتا ہے اس لیے یہ تین خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں ۔ [دفعہ ۲۴]

(۲) ایک ثابت نقطہ ا میں سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا گیا ہے جو دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم و لا، و ما کو علی الترتیب نقطوں ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ متوازی الاضلاع و ف ر ق کی تکمیل کی گئی ہے ۔ ر کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

دیے ہوئے دو خطوں کو محاور تسلیم کرو اور فرض کرو کہ ا کے محدد ف، گ ہیں، فرض کرو کہ ف ق کی مساوات، اس کے ممکنہ محلوں میں سے کسی ایک میں، (۵۲)

$$\frac{لا}{ع} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{، .... (۱)}$$

ہے۔ تب نقطہ ر کے محدد ع اور ب ہوں گے ۔

لیکن چونکہ خط ف ق نقطہ (ف، گ) میں سے گزرتا ہے اس لیے قیمتیں لا = ف، ما = گ مساوات (۱) کو پورا کرتی ہیں ۔ اس لیے

$$\frac{ف}{ع} + \frac{گ}{ب} = ۱ \text{، .... (۲)}$$

پس نقطہ ر کے محدد ع اور ب، رشتہ (۲) کو ہمیشہ پورا کرتے ہیں۔ نقطہ ر کے محددوں کو ع اور ب کی بجائے لا اور ما لکھنے سے اسکے طریق کی مساوات

$$\frac{ف}{لا} + \frac{گ}{ما} = ۱$$

معلوم ہوتی ہے۔

(۳) ایک ثابت نقطہ و میں سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا گیا ہے جو دو دیے ہوئے متوازی خطوطِ مستقیم کو علی الترتیب نقطوں ف اور ق پر قطع کرتا ہے۔ ف اور ق میں سے خطوطِ مستقیم مستقل سمتوں میں کھینچے گئے ہیں جو نقطہ ر پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

ثابت نقطہ و کو مبدا اور محور ما کو متوازی خطوطِ مستقیم کے متوازی لو۔ فرض کرو کہ اِن متوازی خطوطِ مستقیم کی مساواتیں لا = ا ، لا = ب ہیں۔

اب اگر و ف ق کی مساوات ما = م لا ہو تو ف کا فصلہ ا اور اس لیے اِس کے معین کی قیمت م ا ہے۔ نیز ق کا فصلہ ب اور اِس لیے اس کا معین م ب ہے۔

فرض کرو کہ ف ر ہمیشہ خط ما = مَ لا کے متوازی ہے اور ق ر ہمیشہ ما = مٔ لا کے متوازی ہے تو ف ر کی مساوات

ما ـ م ا = مَ (لا ـ ا) .... (۱)

اور ق ر کی مساوات

ما ـ م ب = مٔ (لا ـ ب) .... (۲)

ہوگی۔

نقطہ ر پر رشتے (۱) اور (۲) دونوں پورے ہوں گے اور ہم م کی کسی مخصوص قیمت کے جواب میں ر کے محددوں کو ہم ذات مساواتیں (۱) اور (۲) کے حل کرنے سے معلوم کر سکیں گے۔ لیکن ہمارا مقصود یہ نہیں ہے۔ ہمیں تو وہ جبری رشتہ مطلوب ہے جو نقطہ ر کے محددوں (لا ، ما) سے پورا ہوتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اس رشتہ کو معلوم کرنے کے لیے مساواتوں (۱) اور (۲) سے م کو صرف ساقط کرنا ہوگا۔ چنانچہ نتیجہ حاصل ہوگا۔ (۵۴)

(ب ـ ا) ما = مَ ب (لا ـ ا) ـ مٔ ا (لا ـ ب)

یہ مساوات پہلے درجہ کی ہے اور اس لیے مطلوبہ طریق ایک خط مستقیم ہے ۔

(۴) ایک مثلث کے راس دیے گئے ہیں ۔ اس کے اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکز معلوم کرنا ۔

فرض کرو کہ راسوں ا، ب، ج کے محدد علی الترتیب (لا′، ما′)، (لا″، ما″)، (لا‴، ما‴) ہیں ۔ ب ج کی مساوات

$$\text{ما}(\text{لا}'' - \text{لا}''') - \text{لا}(\text{ما}'' - \text{ما}''') + \text{ما}''\,\text{لا}''' - \text{لا}''\,\text{ما}''' = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

ہے، ج ا کی مساوات

$$\text{ما}(\text{لا}''' - \text{لا}') - \text{لا}(\text{ما}''' - \text{ما}') + \text{ما}'''\,\text{لا}' - \text{لا}'''\,\text{ما}' = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

ہے، اور ا ب کی مساوات

$$\text{ما}(\text{لا}' - \text{لا}'') - \text{لا}(\text{ما}' - \text{ما}'') + \text{ما}'\,\text{لا}'' - \text{لا}'\,\text{ما}'' = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

ہے ۔ مذکورہ دائروں میں سے کسی ایک کے مرکز سے اِن خطوں پر عمود مقداریں مساوی ہیں ۔ اس لیے اِن چار دائروں کے مرکز مساواتوں

$$\pm \frac{\text{ما}(\text{لا}'' - \text{لا}''') - \text{لا}(\text{ما}'' - \text{ما}''') + \text{ما}''\,\text{لا}''' - \text{لا}''\,\text{ما}'''}{\sqrt{(\text{لا}'' - \text{لا}''')^2 + (\text{ما}'' - \text{ما}''')^2}}$$

$$= \pm \frac{\text{ما}(\text{لا}''' - \text{لا}') - \text{لا}(\text{ما}''' - \text{ما}') + \text{ما}'''\,\text{لا}' - \text{لا}'''\,\text{ما}'}{\sqrt{(\text{لا}''' - \text{لا}')^2 + (\text{ما}''' - \text{ما}')^2}}$$

$$= \pm \frac{\text{ما}(\text{لا}' - \text{لا}'') - \text{لا}(\text{ما}' - \text{ما}'') + \text{ما}'\,\text{لا}'' - \text{لا}'\,\text{ما}''}{\sqrt{(\text{لا}' - \text{لا}'')^2 + (\text{ما}' - \text{ما}'')^2}} \quad \ldots\ldots (4)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر مثلث کے راسوں ا، ب، ج کے محددوں کو مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) میں علی الترتیب درج کیا جائے تو ان تین مساواتوں کے دائیں جانبی ارکان وہی ہوں گے۔ اس لیے (دفعہ ۲۶) مثلث کے راس سب کے سب یا تو خطوط (۱)، (۲)، (۳) کی مثبت جانبوں پر واقع ہوں گے یا سب کے سب منفی جانبوں پر۔

اندرونی دائرہ کے مرکز سے مثلث کے ضلعوں پر عمود سب کے سب اسی سمت میں کھینچے ہوتے ہیں جس میں مثلث کے راسوں سے ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہوں۔ پس (۴) میں تمام ابہامات کی علامتیں اندرونی دائرہ کے لیے مثبت ہیں۔

جانبی دائروں کے لیے علامتیں علی الترتیب - + +، + - +، + + - ہیں۔

(۵۴) یہ مشاہدہ طلب ہے کہ (۴) میں مندرجہ کسروں کے نسب نما مثلث ا ب ج کے اضلاع ا، ب، ج ہیں۔

اب اگر تمام ابہامات کی علامتوں کو مثبت لیا جائے یعنے اگر (لا، ما) اندرونی مرکز (In-centre) ہو تو تینوں شمار کنندوں کا مجموعہ = ۲ △ اور تینوں نسب نماؤں کا مجموعہ = ا + ب + ج، کیونکہ لا اور ما کے سر دونوں مجموعوں میں صفر ہیں۔

$$\text{پس ہر کسر} = \frac{۲\,\triangle}{ا + ب + ج}$$

اب شمار کنندوں اور نسب نماؤں کو ترتیب وار لاَ، لاً، لاٌ سے ضرب دو اور جمع کرو تو ہر کسر

$$= \frac{لا \times ۲\,\triangle}{ا\,لاَ + ب\,لاً + ج\,لاٌ}$$

اس طرح $لا(ا + ب + ج) = ا\,لاَ + ب\,لاً + ج\,لاٌ$

اسی طرح $ما(ا + ب + ج) = ا\,ماَ + ب\,ماً + ج\,ماٌ$

اِن سے اندرونی مرکز کے محدد، اضلاع کے طولوں اور راسوں کے محددوں کی رقوم میں حاصل ہوتے ہیں ـ

نوٹ ـ اوپر کے نتیجہ کو ہم اس واقعہ سے بھی فوراً معلوم کر سکتے تھے کہ اندرونی مرکز ا، ب، ج پر کی تین کمیتوں کے لیے جو مقابل کے اضلاع کی متناسب ہوں "کمیت کا مرکز" ہے، اور یہ اس واقعہ سے مستنبط ہوتا ہے کہ وہ خط جو ہر راس کو اندرونی مرکز سے ملاتا ہے مقابل کے ضلع کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے درمیان نسبت اُس نسبت کا عکس ہوتی ہے جو اس کے سروں پر کی کمیتوں کے درمیان ہے۔

دوسرے باب پر مثالیں

۱ ـ ایک خطِ مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت متقاطع خطوط پر اس کے مقطوعوں کے تکافیوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے ـ ثابت کرو کہ یہ خطِ مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے ـ

۲ ـ ثابت کرو کہ مساوات $ب لا^2 - ۲ھ لا ما + ا ما^2 = ۰$ دو ایسے خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے ـ جو علی الترتیب خطوطِ مستقیم $ا لا^2 + ۲ھ لا ما + ب ما^2 = ۰$ کے علی القوائم ہیں ـ

۳ ـ ن خطوں کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (ا، ب) میں سے گذریں اور مساوات

$$ب_۰ ما^ن + ب_۱ ما^{ن-۱} لا + ب_۲ ما^{ن-۲} لا^2 + \ldots + ب_ن لا^ن = ۰$$

سے تعبیر شدہ ن خطوں پر علی الترتیب عمود ہوں ـ

۴ ـ اُن خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویے معلوم کرو جو مساوات

$$لا^3 + ۳لا^2 ما - ۳لا ما^2 - ما^3 = ۰$$

سے تعبیر ہوتے ہیں ـ

۵ ـ و ا، و ب دو ثابت خطوطِ مستقیم ہیں اور ا، ب ثابت نقطے ہیں۔

ان خطوں پر ف، ق کوئی دو نقطے ہیں ایسے کہ نسبت ا ف : ب ق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۶ — اگر ایک خطِ مستقیم ایسا ہو کہ کئی ثابت نقطوں سے اس پر کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ صفر ہو تو ثابت کرو کہ یہ خطِ مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گذریگا۔

۷ — ف م، ف ن وہ عمود ہیں جو ایک نقطہ ف سے دو ثابت خطوطِ مستقیم پر کھینچے گئے ہیں جو نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ن ق اور م ق کو ان خطوطِ مستقیم کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ نقطہ ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر نقطہ ف کا طریق ایک خطِ مستقیم ہو تو نقطہ ق کا طریق بھی ایک خطِ مستقیم ہوگا۔

۸ — ایک ثابت نقطہ و میں سے ایک خطِ مستقیم و ف ق کھینچا گیا ہے جو دو ثابت خطوطِ مستقیم سے نقاط ف، ق پر ملتا ہے۔ خطِ مستقیم و ف ق میں ایک نقطہ ر ایسا لیا گیا ہے کہ و ف، و ر، و ق سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔ ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۹ — خطوں عہ = ۰، عہ = ج، عَہ = ۰، عَہ = جَ سے بنے ہوئے متوازی الاضلاع کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جہاں

عہ ≡ لا جم عہ + ما جب عہ − ع،

اور عَہ ≡ لا جم عَہ + ما جب عَہ − عَ

۱۰ — ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ا کو قطب اور ا ب کو ابتدائی خط مان کر متوازی الاضلاع کے چار ضلعوں اور دو وتروں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۱ — ایک دیے ہوئے نقطہ (ھ، ک) سے محوروں پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان عمودوں کے پائین کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ (ھ، ک) سے اس خط پر عمود کا طول

$$\frac{ھ\,ک\,جب^2\,سہ}{\sqrt{ھ^2 + ک^2 + 2\,ھ\,ک\,جم\,سہ}}$$

ہے اور اس کی مساوات ہ لا۔ک ما = ہ۔ک^۲ ہے۔

۱۲۔ دو خطوطِ مستقیم محددوں کے مبدا میں سے گذرتے ہیں، ان میں سے ہر خط سے ایک نقطہ (لا، ما) کا فاصلہ ض ہے۔ ثابت کرو کہ یہ دو خطوط مساوات

$$(لا ما_۱ - لا_۱ ما)^۲ = ض^۲ (لا^۲ + ما^۲)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۳۔ دیے ہوئے خطوطِ مستقیم ولا، وما پر دو ثابت نقطے ا، ب اور نیز کوئی دو نقطے ف، ق لیے گئے ہیں ایسے کہ وف + وق = وا + وب ثابت کرو کہ اق اور ب ف کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔ (۵۶)

۱۴۔ ایک مربع کے ضلعوں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے دو متقابلہ راسوں کے محدد ۳، ۴ اور ۱، -۱ ہیں۔

۱۵۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدے پر کے زاویوں کا فرق دیے گئے ہیں۔ اس مثلث کے راس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو کہ اس پر ایک ہی خطِ مستقیم کے دو دیے ہوئے حصوں کے محاذی مساوی زاویے بنیں۔

۱۷۔ خطوں

$$لا جم ط + ما جب ط = ا، \quad لا جم ف + ما جب ف = ا$$

ہر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب، خط

$$لا جم \frac{ط + ف}{۲} + ما جب \frac{ط + ف}{۲} = ا جم \frac{ط - ف}{۲}$$

پر اسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کے مربع کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کے طریق کی مساوات لا^۲ + ما^۲ = ا^۲ ہے۔

۱۸۔ ف ا، ف ب خطوطِ مستقیم ہیں جو ثابت نقطوں ا، ب میں سے گذرتے ہیں اور ایک دیے ہوئے خط پر مستقل طول قطع کرتے ہیں۔ ف

طریق کی مساوات معلوم کرو ۔

۱۹ ــ ثابت کرو کہ اُس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو خطوط مستقیم ۳ لا + ۴ ما = ۷ا۱ ، ۳ لا + ۴ ما = ۷ا۲ ، ۲ لا + ۳ ما = ۷ب۱ ، ۲ لا + ۳ ما = ۷ب۲ سے بنتا ہے ۷ (ا۱ - ا۲)(ب۱ - ب۲) ہے ۔

۲۰ ــ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو خطوں ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰ اور ل لا + م ما + ن = ۰ سے بنتا ہے

$$\frac{ن^2 \sqrt{ھ^2 - ا ب}}{ا م^2 - ۲ ھ ل م + ب ل^2}$$

ہے ۔

۲۱ ــ ثابت کرو کہ خطوں

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰

میں سے ایک اور خطوں

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ﻟ (لا² + ما²) = ۰

میں سے ایک کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے وہ اُس زاویہ کے برابر ہے جو نظام کے دوسرے دو خطوں کے درمیان بنے ۔

۲۲ ــ وہ شرط معلوم کرو کہ خطوں

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰

میں سے ایک ، خطوں

اَ لا² + ۲ ھَ لا ما + بَ ما² = ۰

میں سے ایک پر منطبق ہو سکے ۔

۲۳ ــ وہ شرط معلوم کرو کہ خطوں

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰

میں سے ایک ، خطوں

اَ لا² + ۲ ھَ لا ما + بَ ما² = ۰

(۵۷)

میں سے ایک پر عمود ہو -

۲۴ - ثابت کرو کہ نقطہ (۱، ۸) اس مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے جس کے اضلاع کی مساواتیں علی الترتیب

۳ لا + ۴ ما = ۰، ۱۲ ما - ۵ لا = ۰، ما - ۱۵ = ۰

ہیں -

۲۵ - ثابت کرو کہ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدد جس کے راس (۱، ۲)، (۲، ۳) اور (۳، ۱) ہیں $\frac{1}{6}$ (۸ + $\sqrt{۱۰}$) اور $\frac{1}{6}$ (۱۶ - $\sqrt{۱۰}$) ہیں - نیز جانبی دائروں کے مرکز معلوم کرو اور مختلف صورتوں کا فرق دکھاؤ -

۲۶ - اگر محاور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

(لا^{2} - ۳ ما^{2}) لا = م ما (ما^{2} - ۳ لا^{2})

سے ایسے تین خطوط تعبیر ہوتے ہیں جو مبدا میں سے گذرتے ہیں اور ایک دوسرے کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں -

۲۷ - خطوط ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} = ۰

پر نقطہ (لاَ، ماَ) سے عمود کھینچے گئے ہیں - ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب

$$\frac{\text{ا لاَ}^{2} + \text{۲ ھ لاَ ماَ} + \text{ب ماَ}^{2}}{\sqrt{(\text{ا} - \text{ب})^{2} + \text{۴ ھ}^{2}}}$$

ہے

۲۸ - اگر نقطہ (لا، ما) سے خطوں ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} = ۰ پر عمود ع$_{۱}$، ع$_{۲}$ ہوں تو ثابت کرو کہ

(ع$_{۱}^{2}$ + ع$_{۲}^{2}$) $\{$ (ا - ب)^{2} + ۴ ھ^{2} $\}$ = ۲ (ا - ب) (ا لا^{2} - ب ما^{2})

+ ۴ ھ (ا + ب) لا ما + ۴ ھ^{2} (لا^{2} + ما^{2})

۲۹ - اگر تین خطوطِ مستقیم

$ا\ ما^۳ + ب\ ما^۲\ لا + ج\ ما\ لا^۲ + د\ لا^۳ = ۰$

پر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو اور ک^۳ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق

$$ا\ ما^۳ + ب\ ما^۲\ لا + ج\ ما\ لا^۲ + د\ لا^۳ - ک^۳ \sqrt{(ا - ج)^۲ + (ب - د)^۲} = ۰$$

ہے۔

(۵۸)

۳۰ — مساوات

$$ا\ لا^۳ + ۳\ ب\ لا^۲\ ما + ۳\ ج\ لا\ ما^۲ + د\ ما^۳ = ۰$$

سے تعبیر شدہ تین خطوں میں سے دو خطوط علی القوائم ہوں گے اگر

$$ا^۲ + ۳\ ا\ ج + ۳\ ب\ د + د^۲ = ۰$$

۳۱ — ثابت کرو کہ مساوات

$$ا\ (لا^۴ + ما^۴) - ۴\ ب\ لا\ ما\ (لا^۲ - ما^۲) + ۶\ ج\ لا^۲\ ما^۲ = ۰$$

سے خطوطِ مستقیم کے ایسے دو زوج تعبیر ہوتے ہیں جو علی القوائم ہیں۔ نیز اگر ۲ ب^۲ = ا^۲ + ۳ ا ج تو یہ دو زوج منطبق ہوں گے۔

۳۲ — وہ ضروری اور کافی شرط کہ

$$ا\ ما^۴ + ب\ لا\ ما^۳ + ج\ لا^۲\ ما^۲ + د\ لا^۳\ ما + ع\ لا^۴ = ۰$$

سے تعبیر شدہ خطوطِ مستقیم میں سے دو علی القوائم ہوں یہ ہے کہ

$$(ب + د)(ا\ د + ب\ ع) + (ع - ا)^۲\ (ا + ج + ع) = ۰$$

۳۳ — دو منحنیوں

$$ا\ لا^۲ + ۲\ ھ\ لا\ ما + ب\ ما^۲ + ۲\ گ\ لا = ۰$$

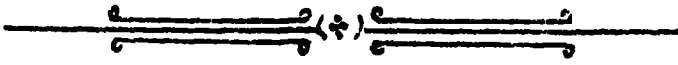
اور

$$ا'\ لا^۲ + ۲\ ھ'\ لا\ ما + ب'\ ما^۲ + ۲\ گ'\ لا = ۰$$

کے نقاطِ تقاطع کو مبدا سے ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ملانے والے خطوطِ مستقیم علی القوائم ہوں گے اگر گ' (ا + ب) = گ (ا' + ب')۔

۳۴ — اگر ایک مثلث کے راسوں سے دوسرے مثلث کے اضلاع پر

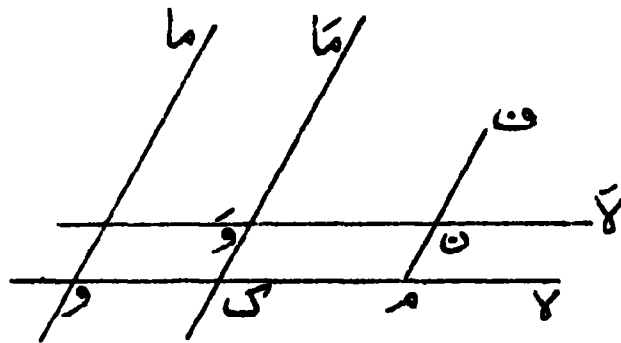
کھینچے ہوئے عمود ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ دوسرے مثلث کے راسوں سے پہلے مثلث کے اضلاع پر کھینچے ہوئے عمود بھی ایک نقطہ پر ملیں گے ۔

۳۵ — اگر ایک مثلث کے راس تین ہم نقطہ ثابت خطوطِ مستقیم پر واقع ہوں اور مثلث کے دو اضلاع ثابت نقطوں میں سے گذریں تو ثابت کرو کہ تیسرا ضلع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے گذریگا ۔

تیسرا باب

محوروں کی تبدیلی ۔ غیر موسیقی نسبتیں یا جلیبی نسبتیں ۔ درپیچ (۵۹)

محوروں کی تبدیلی

۴۸ ۔ جب ہمیں محوروں کے ایک جٹ کے حوالے سے ایک منحنی کی مساوات معلوم ہو تو ہم محوروں کے دوسرے جُٹ کے حوالے سے اِس کی مساوات کو اخذ کر سکتے ہیں ۔

۴۹ ۔ محوروں کی سمت بدلے بغیر محددوں کے مبدا کو تبدیل کرنا ۔

فرض کرو کہ ابتدائی محاور و لا ' و ما ہیں اور نئے محاور وَ لاَ '

وَمَا جہاں وَلاَ ' ولا کے متوازی اور وَمَا ' وما کے متوازی ہے۔
فرض کرو کہ ابتدائی محوروں کے حوالے سے وَ کے محدد ہ ' ک ہیں۔

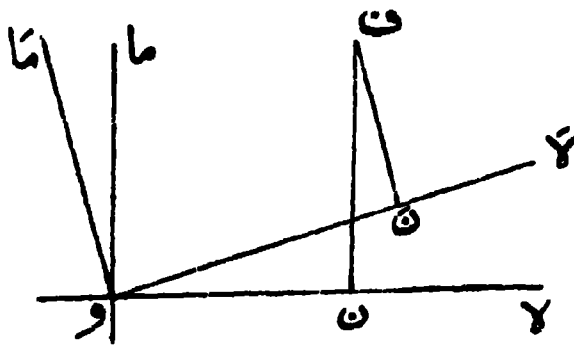
فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالے سے لا ' ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لاَ ' مَا ہیں۔ ف م کو وما کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ ف م ' ولا کو م پر اور وَلاَ کو ن پر قطع کرتا ہے۔

تب لا = وم = وک + ک م = وک + وَن = ہ + لاَ (۶۰)

اور ما = م ف = م ن + ن ف = ک وَ + ن ف = ک + مَا

پس کسی نقطہ کے ابتدائی محدد ' نئے محددوں کی رقوم میں معلوم ہو چکے اور اگر ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں درج کیا جائے تو منحنی کی نئی مساوات حاصل ہوگی۔

اوپر کے بیان میں محاور قائم یا مائل ہو سکتے ہیں۔

۵۰ ۔ مبداء کو بدلے بغیر محوروں کی سمت تبدیل کرنا جبکہ دونوں نظام قائم ہوں ۔

فرض کرو کہ ابتدائی محاور ولا ' وما ہیں اور نئے محاور وَلاَ ' وَمَا۔ فرض کرو کہ زاویہ لا و لاَ = طہ۔

فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لاَ، ماَ ہیں۔ ف ن کو و لا پر عمود اور ف نَ کو و لاَ پر عمود کھینچو۔
کسی خط پر و نَ اور نَ ف کے ظلوں کا مجموعہ، اس خط پر و ن اور ن ف کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔
اب و لا اور و ما پر ظل لو تو

لا = لاَ جم طہ + ماَ جم (طہ + $\frac{\pi}{2}$)

اور ما = لاَ جم (طہ — $\frac{\pi}{2}$) + ماَ جم طہ

یعنے لا = لاَ جم طہ - ماَ جب طہ

ما = لاَ جب طہ + ماَ جم طہ (۶۱)

پس کسی نقطہ کے ابتدائی محدد، نئے محددوں کی رقوم میں معلوم ہوچکے اور اگر ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں درج کیا جائے تو منحنی کی نئی مساوات حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ ایک منحنی کی مساوات ۳ لا۲ + ۲ لا ما + ۳ ما۲ - ۱۸ لا - ۲۲ ما + ۵۰ = ۰ ہے۔ نقطہ (۲، ۳) میں سے گذرنے والے قائم محاور کے حوالے سے یہ مساوات کیا ہوجائے گی جبکہ لا کا نیا محور پرانے محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے۔

اول مبداء کو نقطہ (۲، ۳) پر منتقل کرو جس کے لیے لا، ما کی بجائے علی الترتیب لاَ + ۲، ماَ + ۳ رکھنا ہوگا چنانچہ نئی مساوات

۳ (لاَ + ۲)۲ + ۲ (لاَ + ۲) (ماَ + ۳) + ۳ (ماَ + ۳)۲ - ۱۸ (لاَ + ۲)
- ۲۲ (ماَ + ۳) + ۵۰ = ۰

ہوگی جو

۳ لاَ۲ + ۲ لاَ ماَ + ۳ ماَ۲ - ۱ = ۰

میں تحویل ہوتی ہے یا زبروں کو اڑا دیا جائے تو

$$۳\,لا^{۲} + ۲\,لا\,ما + ۳\,ما^{۲} - ۱ = ۰ \quad ...... (۱)$$

محوروں کو ۴۵° کے زاویہ میں سے گھمانے کے لیے لا کی بجائے $لاَ\frac{۱}{\sqrt{۲}} - ماَ\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ اور ما کی بجائے $لاَ\frac{۱}{\sqrt{۲}} + ماَ\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ رکھنا چاہیے۔ تب مساوات (۱)

$$۳\left(\frac{لاَ - ماَ}{\sqrt{۲}}\right)^{۲} + ۲\left(\frac{لاَ - ماَ}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{لاَ + ماَ}{\sqrt{۲}}\right) + ۳\left(\frac{لاَ + ماَ}{\sqrt{۲}}\right)^{۲} = ۱$$

ہو جائے گی جو $۴\,لاَ^{۲} + ۲\,ماَ^{۲} = ۱$ میں تحویل ہوتی ہے۔
پس مطلوبہ مساوات

$$۴\,لا^{۲} + ۲\,ما^{۲} = ۱$$

ہے۔

مثال ۲ — مساوات $لا^{۲} - ما^{۲} + ۲\,لا + ۴\,ما = ۰$ کیا ہو جائیگی جبکہ مبداء کو نقطہ (−۱، ۲) پر منتقل کیا جائے؟ جواب: $لا^{۲} - ما^{۲} + ۳ = ۰$۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ مساوات $۶\,لا^{۲} + ۵\,لا\,ما - ۶\,ما^{۲} - ۱۷\,لا + ۷\,ما + ۵ = ۰$، ان محوروں کے حوالے سے جو ایک خاص نقطہ میں سے گذرتے ہیں اور ابتدائی محوروں کے متوازی ہیں $۶\,لا^{۲} + ۵\,لا\,ما - ۶\,ما^{۲} = ۰$ ہو جاتی ہے۔
جواب: نقطہ (۱، ۱) ہے۔

مثال ۴ — مساوات $۴\,لا^{۲} + ۲\sqrt{۳}\,لا\,ما + ۲\,ما^{۲} - ۱ = ۰$ کیا ہو جائیگی جبکہ محوروں کو ۳۰° کے زاویہ میں سے گھما دیا جائے؟

جواب: $۵\,لا^{۲} + ما^{۲} - ۱ = ۰$۔

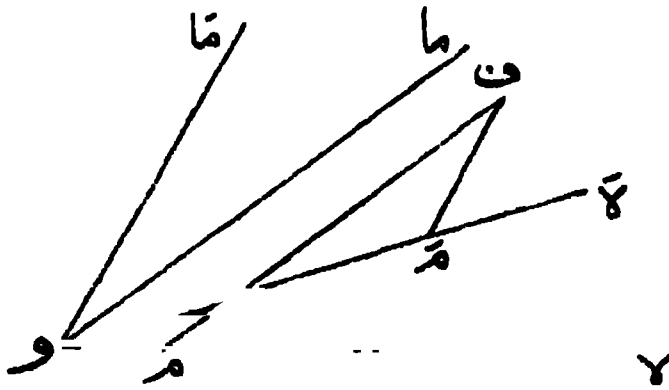
مثال ۵ — مساوات $لا^{۲} - ۲\,لا\,ما + ما^{۲} + لا - ۳\,ما = ۰$ کو ان محوروں کے حوالے سے معلوم کرو جو نقطہ (−۱، ۰) میں سے گذرتے ہیں اور ان خطوں کے متوازی ہیں جو ابتدائی محوروں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

جواب: $\sqrt{۲}\,ما^{۲} - لا = ۰$۔

مثال ۶ ــ مساوات $لا^2 + 2ج\,لا\,ما + ما^2 = د^2$ کو مستحیل کرو جبکہ قائم محوروں کو زاویہ $\frac{\pi}{4}$ میں سے گھمایا گیا ہو۔

جواب: $(1+ج)لا^2 + (1-ج)\,ما^2 = د^2$

۵۱ ــ مبداء کو بدلے بغیر مائل محوروں کے ایک جٹ سے دوسرے جٹ میں تبدیل کرنا۔ (۶۲)

فرض کرو کہ و لا، و ما ابتدائی محاور ہیں جو زاویہ سہ پر مائل ہیں۔ فرض کرو کہ و لاَ، و ماَ نئے محاور ہیں جو زاویہ سَہ پر مائل ہیں۔ فرض کرو کہ زاویہ لا و لاَ، طہ کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لاَ، ماَ ہیں چنانچہ شکل میں و م = لا، م ف = ما، و مَ = لاَ، مَ ف = ماَ جہاں م ف،

و ما کے متوازی اور مَ ف، و مَا کے متوازی ہے۔

کسی خط پر و م اور م ف کے ظلوں کا مجموعہ، اُس خط پر و مَ اور مَ ف کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

ایک ایسے خط پر ظل لو جو و لا پر عمود ہے، تب

ما جب س = لاَ جم (طہ - π/۲) + ماَ جم (طہ + سَ - π/۲)

∴ ما جب س = لاَ جب طہ + ماَ جب (طہ + سَ)

پھر ایک ایسے خط پر ظل لو جو و ما پر عمود ہے، تب

لا جم (س + π/۲) = لاَ جم (س + π/۲ - طہ) + ماَ جم (س + π/۲ - طہ - سَ)

∴ لا جب س = لاَ جب (س - طہ) + ماَ جب (س - سَ - طہ)

یہ ضابطے شاذ ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔ وہ نتیجے جو محوروں کی تبدیلی سے حاصل ہوتے ہیں بالعموم بالواسطہ معلوم کئے جاتے ہیں، جیسا کہ حسب ذیل مثال میں کیا گیا ہے۔

(۶۳) **۵۲*۔ اگر محوروں کی تبدیلی سے ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² بدل کر اَ لاَ² + ۲ ھَ لاَ ماَ + بَ ماَ² ہو جائے تو ثابت کرو کہ**

(ا + ب - ۲ ھ جم س) / جب² س = (اَ + بَ - ۲ ھَ جم سَ) / جب² سَ

جہاں س اور سَ محوروں کے اِن دو جٹوں کے زوایائے میلان ہیں۔

اگر مبداء و ہو اور ف کوئی نقطہ ہو جس کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لاَ، ماَ ہیں تو

$$وف^{۲} = لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ لا ما جم سہ$$

نیز

$$وف'^{۲} = لا'^{۲} + ما'^{۲} + ۲ لا' ما' جم سہ'$$

پس $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ لا ما جم سہ$ بدلکر $لا'^{۲} + ما'^{۲} + ۲ لا' ما' جم سہ'$ ہوجاتا ہے۔ نیز بموجب فرض

$$ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲}$$ بدلکر $$ا' لا'^{۲} + ۲ ھ' لا' ما' + ب' ما'^{۲}$$

ہوتا ہے۔ اِس لیے اگر لہ کوئی مستقل عدد ہو تو

$$ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + لہ (لا^{۲} + ۲ لا ما جم سہ + ما^{۲})$$

بدلکر

$$ا' لا'^{۲} + ۲ ھ' لا' ما' + ب' ما'^{۲} + لہ (لا'^{۲} + ۲ لا' ما' جم سہ' + ما'^{۲})$$

ہوجائے گا۔ پس اگر لہ کو ایسا منتخب کیا جائے کہ اِن میں سے ایک جملہ کامل مربع ہو تو دوسرا بھی لہ کی اُسی قیمت کے لیے کامل مربع ہوگا۔

جملہ اول کامل مربع ہوگا اگر

$$(ا + لہ)(ب + لہ) - (ھ + لہ جم سہ)^{۲} = ۰$$

اور جملہ دوم کامل مربع ہوگا اگر

$$(ا' + لہ)(ب' + لہ) - (ھ' + لہ جم سہ')^{۲} = ۰$$

لہ کو معلوم کرنے کے لیے درجہ دوم کی یہ جو دو مساواتیں ہیں اِن کی اصلیں وہی ہونی چاہییں۔ اِن کو اشکال

$$لہ^{۲} جب^{۲} سہ + (ا + ب - ۲ ھ جم سہ) لہ + ا ب - ھ^{۲} = ۰$$

اور

$$لہ^{۲} جب^{۲} سہ' + (ا' + ب' - ۲ ھ' جم سہ') لہ + ا' ب' - ھ'^{۲} = ۰$$

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{ا + ب - ۲ ھ جم سہ}{جب^{۲} سہ} = \frac{ا' + ب' - ۲ ھ' جم سہ'}{جب^{۲} سہ'} \text{، } \quad \ldots (۱)$$

اور

$$\frac{ا ب - ھ^{۲}}{جب^{۲} سہ} = \frac{ا' ب' - ھ'^{۲}}{جب^{۲} سہ'} \text{، } \quad \ldots\ldots (۲)$$

اگر محوروں کے یہ دو جٹ علی القوائم ہوں تو یہ مساواتیں حسب ذیل سادہ شکلیں اختیار کرتی ہیں:

ا + ب = اَ + بَ ، اب - ھ۲ = اَبَ - ھَ۲ .... (۳)

۵۳ — محوروں کے کسی تغیر سے مساوات کا درجہ نہیں بدلتا۔

دفعات ۴۹، ۵۰، اور ۵۱ سے ہم دیکھتے ہیں کہ محوروں کو خواہ کسی طرح تبدیل کیا جائے نئی مساوات لا اور ما کی بجائے شکل

ل لاَ + م ماَ + ن اور لَ لاَ + مَ ماَ + نَ

کے جملوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ جملے پہلے درجہ کے ہیں اور اس لیے ابتدائی مساوات میں لا اور ما کی بجائے یہ جملے درج کیے جائیں تو مساوات کے درجہ میں کوئی اضافہ نہیں ہوگا۔ اسی طرح مساوات کا درجہ گھٹ نہیں سکتا کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو نئی مساوات سے پرانی مساوات پر عود کرنے سے درجہ میں اضافہ ہونا چاہیئے۔

مثال ۱ — قائم محوروں کے حقیقی استحالہ سے ثابت کرو کہ اگر ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ بدلکر اَ لاَ۲ + ۲ ھَ لاَ ماَ + بَ ماَ۲ ہو جائے تو ا + ب = اَ + بَ اور

ھ۲ - اب = ھَ۲ - اَبَ

مثال ۲ — محوروں کے ایک جٹ سے دوسرے جٹ میں مستحیل کرنے کے لیے ضابطہ

لا = م لاَ + ن ماَ ، ما = مَ لاَ + نَ ماَ

ہو تو ثابت کرو کہ

(م۲ + مَ۲ - ۱) / (ن۲ + نَ۲ - ۱) = م مَ / ن نَ

جبکہ دونوں جٹوں میں مبداء وہی ہو۔

[لا۲ + ما۲ + ۲ لا ما جم سہ بدلکر لاَ۲ + ماَ۲ + ۲ لاَ ماَ جم سَہ ہوگا۔ اسلیے

اور ما کی بجائے دئے ہوئے جملے درج کرو اور لا^2 اور ما^2 کے سروں کو اکائی
، مساوی رکھو اور پھر جم سے کو ساقط کرو۔]

مثال ۳ — ان طریقوں (Loci) کی مساواتیں معلوم کرو جو

$$(ا لا + ب ما + ج)^2 = (ا^2 + ب^2)$$

اور $$(ا لا + ب ما + ج)(ب لا - ا ما + د) = ا^2 + ب^2$$

ے تعبیر ہوتے ہیں جبکہ عمودی خطوں ا لا + ب ما + ج = ۰ اور ب لا - ا ما + د = ۰
علی الترتیب لا اور ما کے محوروں کے طور پر لیا گیا ہو۔

جواب: ما^2 - ا = ۰ ؛ لا ما - ا = ۰

مثال ۴ — ثابت کرو کہ مساواتوں

$$ا لا + ب ما + ج = ۰ \text{ اور } (ا لا + ب ما)^2 - ۳ (ب لا - ا ما)^2 = ۰$$

ے تعبیر شدہ خطوط ایک متساوی الاضلاع مثلث کے ضلع بناتے ہیں۔
[محوروں کو خطوں ا لا + ب ما = ۰ اور ب لا - ا ما = ۰ پر تبدیل کرو
یہ مساواتیں

$$ما + ج \sqrt{ا^2 + ب^2} = ۰ \text{ اور } ما^2 - ۳ لا^2 = ۰$$

۔جا سکتی اور نتیجہ واضح ہے۔]

غیر موسیقی یا چلیپی نسبتیں

۵* — ایک خطِ مستقیم پر نقطوں کے کسی جٹ کو سمت کہتے ہیں،
و ایک نقطہ میں سے گذرنے والے خطوطِ مستقیم کے کسی جٹ کو پنسل
ہیں اور اس کے ہر خط کو شعاع یا کرن کہتے ہیں۔
گر ایک خطِ مستقیم پر ف، ق، ر، س چار نقطے ہوں تو نسبت

$$\frac{ف ق}{ق ر} : \frac{ف س}{س ر} \text{ یا } ف ق \times ر س : ف س \times ر ق$$

کو سعت ف، ق، ر، س کی غیر موسیقی نسبت یا چلیپی نسبت
کہا جاتا ہے اور اس کو {ف، ق، ر، س} سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
اگر ایک سعت کی چلیپی نسبت -۱ کے مساوی ہو تو اس کو موسیقی کہتے ہیں۔
یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر {ف ق ر س} = -۱ تو
ف ق : ف س = (ف ر - ف ق) : (ف س - ف ر)
اس لیے ف ق، ف ر، ف س سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔
اگر ف، ق، ر، س موسیقی سعت ہو تو ق، س کو ف، ر کے لحاظ سے موسیقی طور پر مزدوج کہا جاتا ہے۔

۵۵ — اگر چار خطوطِ مستقیم و ف، و ق، و ر، و س کسی خطِ مستقیم سے علی الترتیب نقاط ف، ق، ر، س پر قطع ہوں تو سعت ف، ق، ر، س کی چلیپی نسبت مستقل ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ دئے ہوئے خطوں کی مساواتیں

ما = م۱ لا، ما = م۲ لا، ما = م۳ لا، ما = م۴ لا

ہیں۔
فرض کرو کہ قاطع خط ف ق ر س، مساوات ما = م لا + ک سے تعبیر ہوتا ہے۔ تب اگر محور لا پر ف، ق، ر، س کے ظل ا، ب، ج، د ہوں تو مبدا سے ان ظلوں کے فاصلے علی الترتیب

$$\frac{ک}{م_۱ - م}،\ \frac{ک}{م_۲ - م}،\ \frac{ک}{م_۳ - م}،\ \frac{ک}{م_۴ - م}$$

ہوں گے۔ پس

$$\frac{ف ق \times ر س}{ف س \times ر ق} = \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب}$$

$$= \frac{\left\{\frac{ک}{م_۲ - م} - \frac{ک}{م_۱ - م}\right\}\left\{\frac{ک}{م_۴ - م} - \frac{ک}{م_۳ - م}\right\}}{\left\{\frac{ک}{م_۴ - م} - \frac{ک}{م_۱ - م}\right\}\left\{\frac{ک}{م_۲ - م} - \frac{ک}{م_۳ - م}\right\}}$$

$$= \frac{(م_۱ - م_۲)(م_۳ - م_۴)}{(م_۱ - م_۴)(م_۳ - م_۲)}$$

جو خط ف ق ر س کے محل پر منحصر نہیں ہے اور اس لیے مستقل ہے۔

چار خطوں کی پنسل کی چلیپی نسبت سے مراد اُس سعت کی چلیپی نسبت ہوتی ہے جس میں کسی دوسرے خط سے یہ پنسل منقطع ہوتی ہے۔

۵۶ * ۔ اُس پنسل کی چلیپی نسبت معلوم کرنا جو مساواتوں (۶۶)

لا = ۰، ما - م لا = ۰، ما = ۰، ما - مَ لا = ۰

سے تعبیر شدہ خطوطِ مستقیم سے بنے۔

یہ گذشتہ مسئلہ کی مخصوص صورت ہے جبکہ $م_۱ = \infty$ اور $م_۲ = ۰$۔

یا

گذشتہ دفعہ کی بموجب پنسل کو کسی خط سے قطع کر کے چلیپی نسبت معلوم کیجا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ خط لا = ھ پنسل کو قطع کرتا ہے، تب ما کی وہ قیمتیں جہاں یہ خط پنسل کے خطوں کو قطع کرتا ہے علی الترتیب

∞، م ھ، ۰، مَ ھ

ہیں۔ پس مطلوبہ جلیپی نسبت

$$\frac{م'}{م} = \frac{\infty \times م'\infty}{\infty \times م\infty}$$

ہے۔

ظاہر ہے کہ خطوط

لا = ۰ ' ما - م لا = ۰ ' ما = ۰ ' ما - م' لا = ۰

سے یہ موسیقی پنسل بنتی ہے

اگر خا اور ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو خطوط ما - م لا = ۰ '
اور ما + م لا = ۰ دو محوروں میں سے کسی ایک سے مساوی زاویے
بناتے ہیں۔

پس اگر کوئی پنسل موسیقی ہو اور دو متبادلہ کرنیں ایک دوسری
کے علی القوائم ہوں تو یہ کرنیں دوسری دو کرنوں کے اندرونی اور بیرونی
زاویوں کی تنصیف کریں گی۔

۵۷ — ذو اربعۃ الاضلاع کے تین وتروں میں سے ہر وتر دوسرے دو وتروں سے موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ خطوطِ مستقیم ق ا ب ' ق د ج ' ف د ا ' اور
ف ج ب ' ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع ہیں۔ وہ خط جو ان میں سے
دو خطوں کے نقطہ تقاطع کو دوسرے دو خطوں کے نقطہ تقاطع سے ملاتا
ہے ذو اربعۃ الاضلاع کا ایک وتر ہے۔ اس لیے تین وتر ہوتے
ہیں یعنے ف ق ' ا ج ' ب د (شکل دیکھو)

ب ج اور ب ا کو علی الترتیب محاور لا اور ما فرض کرو۔
فرض کرو کہ نقطوں ج ' ف ' ا ' ق کے محدد علی الترتیب

(لا₁، ۰)، (لا₂، ۰)، (۰، ما₁)، اور (۰، ما₂) ہیں۔

اب ج ا اور ف ق کی مساواتیں (۶۷)

$$\frac{\text{لا}}{\text{لا}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{ما}_1} - 1 = 0 \text{ ، } \frac{\text{لا}}{\text{لا}_2} + \frac{\text{ما}}{\text{ما}_2} - 1 = 0$$

ہیں۔ اس لیے ب ر کی مساوات

$$\text{لا}\left(\frac{1}{\text{لا}_1} - \frac{1}{\text{لا}_2}\right) + \text{ما}\left(\frac{1}{\text{ما}_1} - \frac{1}{\text{ما}_2}\right) = 0$$

ہے۔

ا ف اور ج ق کی مساواتیں

$$\frac{\text{لا}}{\text{لا}_2} + \frac{\text{ما}}{\text{ما}_1} - 1 = 0 \text{ ، } \frac{\text{لا}}{\text{لا}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{ما}_2} - 1 = 0$$

ہیں۔ اس لیے ب د کی مساوات

$$\text{لا}\left(\frac{1}{\text{لا}_1} - \frac{1}{\text{لا}_2}\right) - \text{ما}\left(\frac{1}{\text{ما}_1} - \frac{1}{\text{ما}_2}\right) = 0$$

ہے ۔

دفعہ ۵۶ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ پنسل ب (ا، ب د، ب ج، ب م) موسیقی پنسل ہے اور اس لیے سمتیں ا، و، ج، م اور ق، س، ف، م موسیقی ہیں ۔

۵۸ — وہ شرط معلوم کرنا کہ خطوطِ مستقیم $\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 = 0$ اور $\text{اَ}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھَ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{بَ}\,\text{ما}^2 = 0$ موسیقی طور پر مزدوج ہوں ۔

فرض کرو کہ خطوں کے زوج

$$\text{ما} = \text{م}_1\,\text{لا}\,،\quad \text{ما} = \text{م}_3\,\text{لا}$$

اور

$$\text{ما} = \text{م}_2\,\text{لا}\,،\quad \text{ما} = \text{م}_4\,\text{لا}$$

ہیں ۔ اب اگر $\text{ما} = \text{م}_1\,\text{لا}$، $\text{ما} = \text{م}_2\,\text{لا}$، $\text{ما} = \text{م}_3\,\text{لا}$، $\text{ما} = \text{م}_4\,\text{لا}$ سے موسیقی پنسل بنے تو حاصل ہونا چاہیے (دفعہ ۵۵)

$$\frac{(\text{م}_1 - \text{م}_2)(\text{م}_3 - \text{م}_4)}{(\text{م}_1 - \text{م}_4)(\text{م}_3 - \text{م}_2)} = -1$$

یا

$$2\,\text{م}_1\text{م}_3 + 2\,\text{م}_2\text{م}_4 = (\text{م}_1 + \text{م}_3)(\text{م}_2 + \text{م}_4)$$

لیکن دی ہوئی مساواتوں سے

$$\text{م}_1 + \text{م}_3 = -\frac{2\,\text{ھ}}{\text{ب}}\,،\quad \text{م}_1\text{م}_3 = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,،$$

$$\text{م}_2 + \text{م}_4 = -\frac{2\,\text{ھَ}}{\text{بَ}}\,،\quad \text{م}_2\text{م}_4 = \frac{\text{اَ}}{\text{بَ}}$$

پس مطلوبہ شرط

$$\text{ا}\,\text{بَ} + \text{اَ}\,\text{ب} = 2\,\text{ھ}\,\text{ھَ}$$

ہے ۔

۵۹ — اسی طریقہ پر ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ نقطوں کے وہ زوج جو مساواتوں

ا لا² + ۲ ھ لا + ب = ۰، اور اَ لا² + ۲ ھَ لا + بَ = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں موسیقی طور پر مزدوج ہوں گے اگر

ا بَ + اَ ب = ۲ ھ ھَ

درپیچ

۶۰ — تعریف ۔ فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم پر و ایک ثابت نقطہ ہے اور اسی خط پر نقطوں کے جوڑے ف، فَ؛ ق، قَ؛ ر، رَ؛ وغیرہ ایسے ہیں کہ

و ف × و فَ = و ق × و قَ = و ر × و رَ = ... = مستقل = ک

تب ہم کہتے ہیں کہ یہ نقطے درپیچ میں ایک نظام بناتے ہیں اور نقطہ و اس نظام کا مرکز ہے۔ ف، فَ جیسے دو نقطے ایک دوسرے کے مزدوج کہلاتے ہیں۔ مرکز کا مزدوج نقطہ لامتناہی فاصلہ پر ہوتا ہے۔

اگر ہر نقطہ مرکز کے اسی جانب ہو جس جانب اس کا مزدوج ہے تو دو نقطے ک، کَ، مرکز کے مخالف جانبوں پر، ایسے موجود ہوں گے کہ و ک² = و کَ² = و ف × و فَ ان نقطوں ک، کَ کو دوہرے نقطے یا ماسکے کہا جاتا ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ جب یہ دو ماسکے دیے گئے ہوں تو درپیچ پوری طرح متعین ہو جاتا ہے۔

مزدوج نقطوں کے دو زوج معلوم ہوں تو بھی درپیچ پوری طرح متعین ہوتا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ اِن نقطوں ا، اَ اور ب، بَ (فرض کرو) کے فاصلے کسی نقطہ سے جو اس خطِ مستقیم میں ہے جس میں دیے ہوئے

نقطے واقع ہیں ا، اَ اور ب، بَ ہیں۔ فرض کرو کہ دربیچ کے مرکز کا فاصلہ اُسی نقطہ سے لا ہے۔ تب حسب ذیل رشتہ حاصل ہوتا ہے:

(ا - لا) (اَ - لا) = (ب - لا) (بَ - لا)

یا (ا + اَ - ب - بَ) لا = ا اَ - ب بَ

پس مرکز کا صرف ایک محل ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگر ا + اَ = ب + بَ یعنے اگر ا اَ اور ب بَ کا نقطہ وسطی ایک ہی ہو تو اِن چار نقطوں سے جو دربیچ متعین ہوگا اُس کا مرکز لا تناہی پر ہوگا اور اس کے بالعکس۔

اس طرح اگر نقطوں کے کوئی زوج ا، اَ؛ ب، بَ؛ ج، جَ؛ وغیرہ ایسے ہوں کہ ا اَ، ب بَ، ج جَ وغیرہ کے نقاط وسطی منطبق ہوتے ہوں تو اِن نقطوں سے دربیچ کا وہ نظام حاصل ہوگا جس کا مرکز لا تناہی پر ہوگا۔

مرکز کے محل کو ہندسی طریقہ پر اسی طرح معلوم کیا جا سکتا ہے کہ مزدوج نقطوں کے دو جوڑوں میں سے ایک ایک کو لے کر اس کے نقطوں میں سے گذرتا ہوا ایک دائرہ کھینچا جائے تو (اقلیدس مقالہ ۳ مسئلہ ۳۷) ان دائروں کا مشترک وتر اُس خط کو جس پر مزدوج نقطے واقع ہیں مطلوبہ مرکز میں قطع کرے گا۔

۶۱ — اگر متعدد نقطے دربیچ میں ہوں تو ان میں سے کسی چار نقطوں کی چلیپی نسبت ان کے چار مزدوجوں کی چلیپی نسبت کے مساوی ہوگی۔

فرض کرو کہ کوئی چار نقطے ف، ق، ر، س ہیں اور مرکز سے اِن نقطوں کے فاصلے علی الترتیب ف، ق، ر، س ہیں اس لیے اِن کے مزدوجوں کے فاصلے $\frac{ک}{ف}$، $\frac{ک}{ق}$، $\frac{ک}{ر}$، $\frac{ک}{س}$ ہوں گے۔ تب

$$\{ف ق ر س\} = \frac{(ق - ف)(س - ر)}{(س - ف)(ق - ر)}$$

اور

$$\{\text{ف ف̄ ر س̄}\} = \frac{\left(\frac{\text{ک}}{\text{ق}} - \frac{\text{ک}}{\text{ف}}\right)\left(\frac{\text{ک}}{\text{س}} - \frac{\text{ک}}{\text{ر}}\right)}{\left(\frac{\text{ک}}{\text{س}} - \frac{\text{ک}}{\text{ف}}\right)\left(\frac{\text{ک}}{\text{ق}} - \frac{\text{ک}}{\text{ر}}\right)} = \frac{(\text{ف} - \text{ق})(\text{ر} - \text{س})}{(\text{ف} - \text{س})(\text{ر} - \text{ق})}$$

پس $\{\text{ف ق ر س}\} = \{\text{ف̄ ق̄ ر̄ س̄}\}$

اس سے ہم اس امر کا امتحان کر سکتے ہیں کہ آیا کوئی چھ نقطے درپیچ میں یا نہیں ۔ کیونکہ ا، اَ اور ب، بَ سے حاصل شدہ درپیچ میں ف، فَ مزدوج نقطے ہونگے اگر

$$\{\text{ا ب اَ ف}\} = \{\text{اَ بَ ا فَ}\}$$

۶۲* ۔ درپیچ کے کوئی دو مزدوج نقطے اور اس کے دو ماسکے ایک موسیقی سعت بناتے ہیں ۔

فرض کرو کہ درپیچ کے دو ماسکے ک$_1$، ک$_2$ ہیں اور مرکز و ہے ۔
فرض کرو ک$_1$ و = ج = و ک$_2$ ۔

تب و سے نقطوں ک$_1$، ک$_2$ کے فاصلے مساوات

$$\text{لا}^2 - \text{ج}^2 = 0$$

کی اصلیں ہیں ۔

نیز و سے مزدوج نقطوں کے کسی زوج کے فاصلے مساوات

$$\text{لا}^2 + 2\,\text{ل}\,\text{لا} + \text{ج}^2 = 0$$

کی اصلیں ہیں ۔

پس مسئلہ دفعہ ۵۸ سے فوراً ماخوذ ہوتا ہے ۔

۶۳* ۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ مساواتوں

$$\text{ا}_1\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1 = 0،\quad \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2 = 0،$$

$ا_۲ لا^۲ + ۲ ھ_۲ لا + ب_۲ = ۰$

سے حاصل شدہ نقطوں کے تین زوج درپیچ میں ہوں ۔

اُن فاصلوں کا حاصل ضرب جو ہر زوج کے دو نقطے کسی نقطہ لا = د سے رکھتے ہیں ایک ہی ہونا چاہیئے ، فرض کرو کہ وہ لہ کے مساوی ہے ۔

(۷۱) مساوات

$ا_۱ (لا - د)^۲ + ۲ ھ_۱ (لا - د) + ب_۱ = ۰$

کی اصلوں کا حاصل ضرب

$$\frac{(ا_۱ د^۲ - ۲ ھ_۱ د + ب_۱)}{ا_۱}$$

ہے - پس لہ کی کسی قیمت کے لیئے حاصل ہونا چاہیئے

$ا_۱ (د^۲ - لہ) - ۲ ھ_۱ د + ب_۱ = ۰ ،$

$ا_۲ (د^۲ - لہ) - ۲ ھ_۲ د + ب_۲ = ۰ ،$

اور $ا_۳ (د^۲ - لہ) - ۲ ھ_۳ د + ب_۳ = ۰$

$د^۲ - لہ$ اور د کو ساقط کرنے سے مطلوبہ شرط

$$\begin{vmatrix} ا_۱ & ھ_۱ & ب_۱ \\ ا_۲ & ھ_۲ & ب_۲ \\ ا_۳ & ھ_۳ & ب_۳ \end{vmatrix} = ۰$$

حاصل ہوتی ہے ۔

۶۴ ۔ دفعہ ماسبق سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ایک خطِ مستقیم پر کے چھ نقطوں کو جو درپیچ میں ہوں کسی نقطہ سے ملایا جائے تو اس طریقہ سے جو پنسل بنے گی وہ کسی دوسرے خطِ مستقیم سے ایسے چھ نقطوں میں منقطع ہوگی جو درپیچ میں ہوں گے ۔

سب سے اول یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر چھ خطوں کی کوئی پنسل کسی خطِ مستقیم ف ق سے نقطوں کے ایسے تین زوجوں میں قطع ہو جو درپیچ میں

ہوں تو یہ پنسل ف ق کے متوازی کسی خط سے درپیچ میں قطع ہوگی ۔

اب فرض کرو کہ خطوطِ مستقیم کے تین زوج

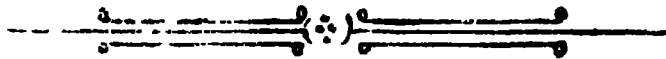
$$\text{ا}_1\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ھ}_1\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}_1\,\text{ما}^2 = ۰ \text{، وغیرہ}$$

ہیں جہاں محور لا اُس خط کے متوازی ہے جو خطوں کو نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع کرتا ہے جو درپیچ میں ہیں، اور محور ما کسی دوسرے خطِ مستقیم کے متوازی ہے جو کوئی بھی ہوسکتا ہے ۔

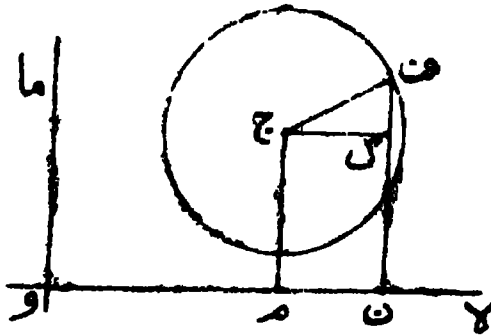
تب ہم جانتے ہیں کہ ما = ۱، خطوں کو درپیچ میں قطع کریگا اور اسلیے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ھ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ھ}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ھ}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix} = ۰$$

لیکن یہ وہ شرط بھی ہے کہ لا = ۱، خطوں کو نقطوں کے ایسے تین زوجوں میں قطع کرے جو درپیچ میں ہوں ۔

(۱۰۲)

چوتھا باب

دائرہ

۶۵ ۔ قائم محوروں کے حوالے سے دائرہ کی مساوات معلوم کرنا ۔

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ ف ہے
فرض کرو کہ ج کے محدد (د، ع) اور ف کے محدد (لا، ما) ہیں ۔ فرض کرو کہ
دائرہ کا نصف قطر ر ہے ۔ ج م اور ف ن کو و ما کے متوازی اور
ج ک کو و لا کے متوازی کھینچو (حسب شکل) ۔ تب

ج ک۲ + ک ف۲ = ج ف۲

لیکن ج ک = لا ۔ د، ک ف = ما ۔ ع

$$\therefore \quad (\text{لا} - \text{د})^{2} + (\text{ما} - \text{ع})^{2} = \text{ا}^{2} , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

مطلوبہ مساوات ہے ۔

(۲۲) اگر دائرہ کا مرکز مبدا ہو تو د اور ع دونوں صفر ہوں گے اور دائرہ کی مساوات

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = \text{ا}^{2} , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ہوگی ۔

مساوات (۱) لکھی جا سکتی ہے

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} - 2\,\text{د}\,\text{لا} - 2\,\text{ع}\,\text{ما} + \text{د}^{2} + \text{ع}^{2} - \text{ا}^{2} = 0$$

اس لیے کسی دائرہ کی مساوات شکل

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + 2\,\text{گ}\,\text{لا} + 2\,\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = 0 , \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

کی ہوتی ہے جہاں گ ، ف ، ج مستقلات ہیں ۔

اس کے بالعکس مساوات (۳) ایک دائرہ کی مساوات ہوگی ۔ کیونکہ اس کو لکھا جا سکتا ہے

$$(\text{لا} + \text{گ})^{2} + (\text{ما} + \text{ف})^{2} = \text{گ}^{2} + \text{ف}^{2} - \text{ج}$$

اور اس مساوات سے ظاہر ہے کہ اس کے طریق پر کے کسی نقطہ سے نقطہ $(-\text{گ} , -\text{ف})$ کا فاصلہ مستقل ہے اور یہ فاصلہ $\sqrt{\text{گ}^{2} + \text{ف}^{2} - \text{ج}}$ کے مساوی ہے ۔ پس مساوات (۳) ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا نصف قطر $\sqrt{\text{گ}^{2} + \text{ف}^{2} - \text{ج}}$ ہے اور مرکز نقطہ $(-\text{گ} , -\text{ف})$ پر ہے ۔

اگر $\text{گ}^{2} + \text{ف}^{2} - \text{ج} = 0$ تو دائرہ کا نصف قطر صفر ہے اور دائرہ کو ایسی صورت میں نقطہ دائرہ کہتے ہیں ۔

اگر $\text{گ}^2 + \text{ف}^2 - \text{ج}$ منفی ہو تو لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں مساوات کو پورا نہیں کریں گی، ایسی صورت میں دائرہ کو خیالی دائرہ کہتے ہیں ـ

مندرجۂ بالا بیان سے یہ واضح ہے کہ دوسرے درجہ کی کوئی مساوات ایک دائرہ کو تعبیر کرے گی بشرطیکہ (۱) لا^2 اور ما^2 کے سر مساوی ہوں اور (۲) کوئی رقم ایسی نہ ہو جس میں لا ما آئے ـ

۶۶ ـ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک دائرہ کی عام مساوات

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ لا} + 2\text{ف ما} + \text{ج} = 0$$

ہے ـ اس مساوات میں تین مستقلات ہیں ـ اگر ہم ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرنا چاہیں جو تین دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرے یا کوئی اور شرطیں پوری کرے تو ہم اس کی مساوات کو مندرجہ بالا شکل کی مساوات فرض کریں گے اور دی ہوئی شرطوں کے ذریعہ زیر بحث دائرہ کے لیے مستقلات گ، ف، ج کی قیمتیں متعین کریں گے ـ (۴۷)

مثال ۱ ـ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو تین نقطوں (۰، ۱)، (۱، ۰) اور (۲، ۱) میں سے گذرتا ہے ـ

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ لا} + 2\text{ف ما} + \text{ج} = 0$$

ہے ـ

اب چونکہ نقطہ (۰، ۱) دائرہ پر ہے اس لیے لا = ۰ اور ما = ۱ رکھنے سے مساوات پوری ہونی چاہیے

$$\therefore \quad 1 + 2\text{ف} + \text{ج} = 0,$$

نیز (۱، ۰) دائرہ پر ہے اس لیے

$$1 + 2\text{گ} + \text{ج} = 0,$$

اور (۲، ۱) دائرہ پر ہے اس لیے

$$4 + 1 + 4\text{گ} + 2\text{ف} + \text{ج} = 0$$

پس $\text{گ} = \text{ف} = -1$، اور $\text{ج} = 1$

اس لیے مطلوبہ مساوات

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} - ۲\,\text{لا} - ۲\,\text{ما} + ۱ = ۰ .$$

ہے ۔]

مثال ۲ — اگر ایک دائرہ کے ایک قطر کے سروں ا ، ب کے محدد (لاَ ، ماَ) ، (لاً ، ماً) ہوں تو دائرہ کی مساوات (لا − لاَ) (لا − لاً) + (ما − ماَ) (ما − ماً) = ۰ ہوگی ۔

[وہ خط جو دائرہ پر کے کسی نقطہ ف (لا ، ما) کو ا سے ملاتا ہے محور لا کے ساتھ زاویہ مس $^{-۱}$ $\dfrac{\text{ما} - \text{ماَ}}{\text{لا} - \text{لاَ}}$ بناتا ہے ، اور وہ خط جو ف کو ب سے ملاتا ہے محور لا کے ساتھ زاویہ مس $^{-۱}$ $\dfrac{\text{ما} - \text{ماً}}{\text{لا} - \text{لاً}}$ بناتا ہے ۔ اب چونکہ خطوط ف ا اور ف ب علی القوائم ہیں اس لیے

$$۱ + \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{\text{لا} - \text{لاَ}} \times \frac{\text{ما} - \text{ماً}}{\text{لا} - \text{لاً}} = ۰$$

یا

$$(\text{لا} - \text{لاَ})(\text{لا} - \text{لاً}) + (\text{ما} - \text{ماَ})(\text{ما} - \text{ماً}) = ۰ .$$

مثال ۳ — اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز (−۴ ، −۳) ہے اور نصف قطر ۵ ہے ۔

جواب: $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + ۸\,\text{لا} + ۶\,\text{ما} = ۰ .$

مثال ۴ — اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو جس کی مساوات

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} - ۲\,\text{لا} + ۴\,\text{ما} - ۱۱ = ۰ .$$

ہے ۔

جواب : مرکز (۱ ، −۲) ، نصف قطر ۴

مثال ۵ — اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو جس کی مساوات

$$۵\,\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{ما}^{۲} + ۴\,\text{لا} - ۸\,\text{ما} - ۱۲ = ۰ .$$

ہے ۔

جواب : مرکز $\left(-\dfrac{۲}{۵} ، \dfrac{۴}{۵}\right)$ ، نصف قطر ۲

مثال ۶ — نقطوں (۱ ، ۳) ، (۲ ، −۱) اور (−۱ ، ۱) میں سے گذرنیوالے

دائرہ کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: ۵ لا^2 + ۵ ما^2 - ۱۱ لا - ۹ ما - ۱۲ = ۰

(۵ ء) مثال ۷۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطوں (۰، ۰)، (و، ۰) اور (۰، ب) میں سے گزرتا ہے۔ جواب: لا^2 + ما^2 - و لا - ب ما = ۰

مثال ۸۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطوں (و، ۰)، (- و، ۰) اور (۰، ب) میں سے گزرتا ہے۔ جواب: لا^2 + ما^2 + $\frac{\text{و}^2 - \text{ب}^2}{\text{ب}}$ ما - و^2 = ۰

۲۷۔ دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جبکہ محاور زاویہ سہ پر مائل ہوں۔

نقطہ (د، ع) سے نقطہ (لا، ما) کے فاصلہ کا مربع

(لا - د)^2 + (ما - ع)^2 + ۲ (لا - د) (ما - ع) جم سہ (دفعہ ۴)

ہوگا۔ اس لیے اس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز نقطہ (د، ع) پر اور جس کا نصف قطر ر ہو

(لا - د)^2 + (ما - ع)^2 + ۲ (لا - د) (ما - ع) جم سہ = ر^2، ...... (۱)

یا لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم سہ - ۲ لا (د + ع جم سہ) - ۲ ما (ع + د جم سہ)

+ د^2 + ع^2 + ۲ د ع جم سہ - ر^2 = ۰، ...... (۲)

ہوگی۔

پس کسی دائرہ کی مساوات بحوالہ مائل محاور شکل

لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم سہ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰، ...... (۳)

کی ہوگی جہاں گ، ف، ج کسی مخصوص دائرہ کے لحاظ سے مستقلات ہیں لیکن مختلف دائروں کے لیے مختلف ہیں۔

مساوات (۳) درست رہے گی اگر ہم اس کی طرفین کو کسی مستقل عدد سے ضرب دیں، تب اس کی شکل ہو جائے گی:

ا لا^2 + ۲ ا لا ما جم سہ + ا ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰، ...... (۴)

پس ایک دائرہ کی مساوات بحوالہ مائل محاور دوسرے درجہ کی

ہوتی ہے اور (۱) لا^2 اور ما^2 کے سر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں اور (۲) لاما اور لا^2 کے سروں کی نسبت ۲ جم سہ ہوتی ہے جہاں سہ محوروں کا درمیانی زاویہ ہے۔

ہم اُس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کر سکتے ہیں جس کی مساوات لا^2 + ما^2 + ۲لاما جم سہ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ ہے۔ کیونکہ یہ مساوات، مساوات (لا − د)^2 + (ما − ع)^2 + ۲ (لا − د) (ما − ع) جم سہ − ر^2 = ۰ کے مماثل ہوگی اگر د + ع جم سہ = −گ، ع + د جم سہ = −ف اور د^2 + ع^2 + ۲دع جم سہ − ر^2 = ج۔ اس لیے د جب^2 سہ = ف جم سہ − گ، ع جب^2 سہ = گ جم سہ − ف اور ر^2 جب^2 سہ = ف^2 + گ^2 − ۲ف گ جم سہ − ج جب^2 سہ۔

۶۸ — تعریف — فرض کرو کہ کسی منحنی پر ف اور ق دو نقطے لیے گئے ہیں اور فرض کرو کہ نقطہ ق منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ف سے قریب اور قریب تر آتا ہے، تب خط ف ق کے انتہائی محل کو جبکہ ق حرکت کر کے ف تک آئے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جائے منحنی کا مماس نقطہ ف پر کہتے ہیں۔ (۷۶)

وہ خط جو ف میں سے گذر کر مماس پر عمود ہو نقطہ ف پر منحنی کا عماد کہلاتا ہے۔

۶۹ — دائرہ لا^2 + ما^2 = ر^2 کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی دو نقطوں کے محدد لاَ، ماَ اور لاً، ماً ہیں۔ نقطہ (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) میں سے گذرنے والے قاطع کی مساوات

(لا - لاَ) / (لاً - لاَ) = (ما - ماَ) / (ماً - ماَ) ، .... (۱)

ہے - لیکن چونکہ یہ دو نقطے دائرہ پر ہیں اس لیے

لاَ² + ماَ² = ر² اور لاً² + ماً² = ر²

اس لیے   لاً² - لاَ² = ماَ² - ماً² ، .... (۲)

مساواتوں (۱) اور (۲) کی متناظر طرفوں کو ضرب دینے سے

(لا-لاَ) (لاً + لاَ) = - (ما - ماَ) (ماً + ماَ) ، .... (۳)

اب فرض کرو کہ نقطہ (لاً ، ماً) ، نقطہ (لاَ ، ماَ) تک حرکت کرتا ہے اور یا لاً خراس پر منطبق ہوتا ہے ، تب انتہا میں وتر نقطہ (لاَ ، ماَ) پر مماس بنجاتا ہے - پس مماس کی مساوات ، (۳) میں لاً = لاَ اور ماً = ماَ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

(لا - لاَ) لاَ + (ما - ماَ) ماَ = ۰

یا   لا لاَ + ما ماَ = لاَ² + ماَ² = ر²

∴   لا لاَ + ما ماَ = ر²

نقطہ (لاَ ، ماَ) پر کے مماس کی مطلوبہ مساوات ہے -

۷۰ - اس دائرہ کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا جس کی مساوات

لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

ہے -

(۷۰) دو نقطوں (لاَ ، ماَ) اور (لاً ، ماً) میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

(لا - لاَ) / (لاً - لاَ) = (ما - ماَ) / (ماً - ماَ) ، .... (۱)

ہے - چونکہ یہ دو نقطے دائرہ پر ہیں اس لیے

لاَ^{2} + ماَ^{2} + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج = ۰

لاً^{2} + ماً^{2} + ۲گ لاً + ۲ف ماً + ج = ۰

$\therefore$ (لاَ - لاً) (لاَ + لاً + ۲گ) = -(ماَ - ماً) (ماَ + ماً + ۲ف) ....(۲)

مساواتوں (۱) اور (۲) کی متناظر طرفوں کو ضرب دو تو قاطع کی مساوات

(لا - لاَ) (لاَ + لاً + ۲گ) = -(ما - ماَ) (ماَ + ماً + ۲ف)

حاصل ہوگی -

اس لیے (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات

(لا - لاَ) (لاَ + گ) + (ما - ماَ) (ماَ + ف) = ۰

یا لالاَ + ماماَ + گ لا + ف ما = لاَ^{2} + ماَ^{2} + گ لاَ + ف ماَ

ہے -

طرفین میں گ لاَ + ف ماَ + ج جمع کرو تو چونکہ (لاَ، ماَ) دائرہ پر ہے اس لیے مماس کی مساوات ہو جاتی ہے

لالاَ + ماماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج = ۰

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات، دائرہ کی مساوات سے لا^{2} کو لاَ لا میں، ما^{2} کو ما ماَ میں، ۲ لا کو لا + لاَ میں، اور ۲ ما کو ما + ماَ میں بدلنے سے معلوم کیجا سکتی ہے -

مثال ۱ - دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ۲۵ کے نقطہ (۳، ۴) پر کے مماس کی مساوات ۳ لا + ۴ ما = ۲۵ ہے -

مثال ۲ - لا^{2} + ما^{2} - ۶ لا - ۳ ما - ۲ = ۰ کے نقطہ (۲، -۲) پر کے مماس کی مساوات

۲ لا - ۲ ما - ۳ (لا + ۲) - $\frac{۳}{۲}$ (ما - ۲) - ۲ = ۰

یا ۲ لا + ۷ ما + ۱۰ = ۰

ہے۔

مثال ۳ — لا² + ما² = ۱۶۹ کے نقطوں (۵، ۱۲)، (۱۲، -۵) پر کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ مماس نقطہ (۷، ۱۷) پر علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔

مثال ۴ — لا² + ما² - ۴لا - ۴ما + ۴ = ۰ کے نقطوں (۴، ۲) اور (۲، ۴) پر کے مماس معلوم کرو۔ جواب: لا = ۴ اور ما = ۴

(۷۸) **۷۱ — ایک دائرہ کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔**

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

لا² + ما² = ر²

ہے۔ اگر اس پر (لاَ، ماَ) کوئی نقطہ ہے تو اس نقطہ پر مماس کی مساوات

لا لاَ + ما ماَ = ر²، .... (۱)

ہے۔

اُس خط کی مساوات جو (لاَ، ماَ) میں سے گذر کر (۱) پر عمود ہو بسبب دفعہ ۴۰،

(لا - لاَ) ماَ - (ما - ماَ) لاَ = ۰

یا لا ماَ - ما لاَ = ۰، .... (۲)

ہے۔ یہ نقطہ (لاَ، ماَ) پر عماد کی مطلوبہ مساوات ہے۔

مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ دائرہ کے کسی نقطہ پر کا عماد مبدا میں سے گذرتا ہے یعنے دائرہ کے مرکز میں سے۔

۷۲ — ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم اور دائرہ کے نقاطِ تقاطع معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

لا² + ما² = ر²، .... (۱)

اور خطِ مستقیم کی مساوات

ما = م لا + ج ، . . . . (۲)

ہے۔ اُن نقطوں پر جو خطِ مستقیم اور دائرہ میں مشترک ہیں یہ دونوں رشتے پورے ہوتے ہیں۔ خط پر کے نقطے مساوات ما^2 = (م لا + ج)^2 کو پورا کرتے ہیں اور دائرہ پر کے نقطے مساوات ما^2 = ا^2 - لا^2 کو پورا کرتے ہیں۔ اس لیے مشترک نقطوں کے لیے مساوات حاصل ہوتی ہے

(م لا + ج)^2 = ا^2 - لا^2

یا لا^2 (۱ + م^2) + ۲ م ج لا + ج^2 - ا^2 = ۰ ، . . . . . . (۳)

یہ ایک دو درجی مساوات ہے اور ہر دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں، حقیقی اور مختلف، یا حقیقی اور مساوی، یا خیالی۔

پس لا کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے جواب میں ما کی دو قیمتیں (۲) سے معلوم ہوتی ہیں۔ اس طرح ہر خطِ مستقیم ایک دائرہ سے دو نقطوں پر ملتا ہے حقیقی اور مختلف، یا دو منطبق، یا دو خیالی نقطوں پر۔ خیالی نقطے وہ ہیں جنکے محددوں میں سے ایک یا دونوں خیالی ہوں۔ (۴۹)

خطِ مستقیم اور دائرہ کے خیالی تقاطع کو ہندسی طور پر تعبیر کرنا ناممکن ہے، لیکن ہم دیکھیں گے کہ خیالی نقطے اور خطوط اکثر اہم مفہوم کے حامل ہوتے ہیں اور ان پر غور کرنا ضروری ہے تاکہ ہم اپنے مسئلوں کو عام سے عام شکلوں میں بیان کرسکیں۔

مساوات (۳) کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہونگی اگر

(۱ + م^2) (ج^2 - ا^2) = م^2 ج^2

یعنے اگر ج^2 = ا^2 (۱ + م^2) . . . . (۴)

اگر لا کی دو قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو ما کی دو قیمتیں بھی (۲) کی رو سے ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہئیں۔

اس لیے وہ دو نقطے جن پر دائرہ خط سے منقطع ہوتا ہے منطبق ہونگے اگر ج = ا $\sqrt{1 + م^2}$۔

پس خط $ما = م لا + ر \sqrt{1 + م^2}$ ، دائرہ $لا^2 + ما^2 = ر^2$ کو م کی تمام قیمتوں کے لیے مس کرے گا۔

چونکہ جذر $\sqrt{1 + م^2}$ کو کوئی ایک علامت دیجا سکتی ہے اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ م کی ہر قیمت کے جواب میں دائرہ کے دو مماس ہوتے ہیں یعنے کسی دیے ہوے خط کے متوازی دو مماس ہوتے ہیں۔

مثال ۱ ــــ ثابت کرو کہ $لا = ۷$ اور $ما = ۸$ ، دائرہ

$$لا^2 + ما^2 - ۴ لا - ۶ ما - ۱۲ = ۰$$

کو مس کرتے ہیں۔ مماسوں کے نقاط تماس معلوم کرو۔ جواب: (۷، ۳)(۲، ۸)

مثال ۲ ــــ خط $لا + ۲ ما - ۵ = ۰$ اور دائرہ $لا^2 + ما^2 = ۲۵$ کے نقاط تقاطع معلوم کرو۔ جواب: (۵، ۰) اور (-۳، ۴)

مثال ۳ ــــ معلوم کرو کہ خط $۳ لا + ۴ ما + ۷ = ۰$ ، دائرہ

$$لا^2 + ما^2 - ۴ لا - ۶ ما - ۱۲ = ۰$$

کو کہاں قطع کرتا ہے۔ جواب: خط نقطہ (-۱، ۱) پر مس کرتا ہے

(۸۰) ۳۷ ــــ ایک دائرہ کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے نقاط وسطی کا طریق معلوم کرنا۔

دائرہ کے مرکز کو مبدا اور محور لا کو وتروں کے متوازی لو۔
فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا^2 + ما^2 = ر^2 ، \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے اور فرض کرو کہ متوازی وتروں میں سے کسی ایک کی مساوات

$$ما - ج = ۰ ، \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہے۔

(۱) اور (۲) کے نقاطِ تقاطع کے لیے

$$لا^2 + ج^2 = ر^2$$

$$لا = \pm \sqrt{ا^2 - ج^2}$$

چونکہ لا کی یہ دو قیمتیں مساوی اور مختلف العلامت ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وتر کے نقطہ وسطی کا فصلہ صفر ہے یعنے وتر کا وسطی نقطہ ہمیشہ محور ما پر رہتا ہے۔ یہ ج کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ اگر ج > ا تو لا کی دونوں قیمتیں خیالی ہیں لیکن ان کا مجموعہ تاہم صفر ہے اور اسلئے وتر کا وسطی نقطہ پھر بھی محور ما پر رہتا ہے۔

پس ایک دائرہ کے متوازی وتروں کے نقاط وسطیٰ کا طریق مرکز میں سے گذرنے والا وہ خط مستقیم ہے جو وتروں پر عمود ہے۔ اس طریق کو اس خط کے اس حصہ تک محدود فرض کرنے کی ضرورت نہیں ہے جو دائرہ کے اندر ہے۔

۴۷ — دفعات ماسبق میں ہم نے دائرہ کے کوئی ہندسی خواص تسلیم نہیں کئے ہیں الّا آنکہ اس کے کسی نقطہ سے مرکز کا فاصلہ مستقل رہتا ہے۔ اگر ہم ان مسئلوں کو مان لیں جو اقلیدس جلد ۳ میں ثابت کئے گئے ہیں تو دفعات ماسبق کے بعض نتیجے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ اس دائرہ پر جس کی مساوات $لا^2 + ما^2 = ا^2$ ہے کوئی نقطہ (لاَ، ماَ) ہے تو اس خط کی مساوات جو (لاَ، ماَ) سے دائرہ کے مرکز تک کھینچا گیا ہے $\frac{لا}{لاَ} - \frac{ما}{ماَ} = ۰$ ہے اور (لاَ، ماَ) میں سے گذرنے والے عمودی خط کی مساوات (دفعہ ۳۰)

$$(لا - لاَ)\, لاَ + (ما - ماَ)\, ماَ = ۰$$

یا

$$لا لاَ + ما ماَ - ا^2 = ۰$$

ہے اور اقلیدس جلد ۳ سے یہ خط اس نقطہ پر کا مماس ہے۔

پھر خط $ما - م لا - ج = ۰$، دائرہ $لا^2 + ما^2 - ا^2 = ۰$ کو مس کرے گا اگر خط کا عمودی فاصلہ دائرہ کے مرکز سے نصف قطر کے مساوی ہو، اس لیے شرط

(۸۱)

$$ج = \pm ا \sqrt{۱ + م^۲}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۷۵ — کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں اور یہ دو مماس حقیقی ہوں گے اگر یہ نقطہ دائرہ کے باہر رہو، منطبق ہوں گے اگر نقطہ دائرہ پر ہو، اور خیالی ہوں گے اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہو۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ = ا^۲$$

ہے اور فرض کرو کہ کسی نقطہ کے محدد (ھ، ک) ہیں۔ فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں۔ تب (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات

$$لا لاَ + ما ماَ = ا^۲،$$

ہوگی۔ یہ مماس نقطہ (ھ، ک) میں سے گذریگا اگر

$$ھ لاَ + ک ماَ = ا^۲، \quad ....(۱)$$

لیکن (لاَ، ماَ) دائرہ پر ہے اس لیے

$$لاَ^۲ + ماَ^۲ = ا^۲، \quad ....(۲)$$

مساواتوں (۱) اور (۲) سے لاَ اور ماَ کی وہ قیمتیں معلوم ہوں گی جن پر کے مماس مخصوص نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتے ہیں۔ ماَ کی بجائے (۲) میں اندراج کرلو تو

$$لاَ^۲ + \frac{(ا^۲ - ھ لاَ)^۲}{ک^۲} = ا^۲$$

یا

$$لاَ^۲(ھ^۲ + ک^۲) - ۲ ا^۲ ھ لاَ + ا^۲(ا^۲ - ک^۲) = ۰، \quad ....(۳)$$

مساوات (۳) سے فیصلے حاصل ہوتے ہیں اور (۱) سے متناظرین معلوم ہوتے ہیں۔ اب چونکہ مساوات (۳) ایک دو درجی مساوات ہے اس لیے دو نقطے ہیں جن پر کے مماس نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتے ہیں مساوات (۳) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہونگی بموجب اسکے کہ

ق^۲ ھ^۲ ـ ق^۲ (ق^۲ ـ ک^۲) (ھ^۲ + ل^۲)

صفر سے بڑا، اس کے مساوی، یا اس سے کم ہو۔ یعنے بموجب اسکے کہ

ھ^۲ + ک^۲ ـ ق^۲

صفر سے بڑا، اس کے مساوی، یا اس سے کم ہو۔ یعنے بموجب اس کے کہ نقطہ (ھ، ک) دائرہ کے باہر، دائرہ پر، یا دائرہ کے اندر ہو۔

(۸۲)

مثالیں

۱۔ اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو جہاں خط ما = ۲ لا + ۱، دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۲ کو قطع کرتا ہے۔ جواب: (‎-۱، ‎-۱) اور (۱/۵، ۷/۵)

۲۔ ثابت کرو کہ خط ۴ لا ـ ۲ ما = ۰، دائرہ لا^۲ + ما^۲ ـ ۳ لا + ۲ ما = ۰ کو مس کرتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ دائرے لا^۲ + ما^۲ = ۲ اور لا^۲ + ما^۲ ـ ۶ لا ـ ۶ ما + ۱۰ = ۰ ایک دوسرے کو نقطہ (۱، ۱) پر مس کرتے ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا^۲ + ما^۲ ـ ۲ ق لا ـ ۲ ق ما + ق^۲ = ۰، محاور لا اور ما کو مس کرتا ہے۔

۵۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو خطوط لا = ۰، ما = ۰ اور لا = ج کو مس کرتا ہے۔ جواب: ۴ لا^۲ + ۴ ما^۲ ـ ۴ ج لا ± ۴ ج ما + ج^۲ = ۰

۶۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو خطوط لا = ۰، لا = ق اور ۳ لا + ۴ ما + ۵ ق = ۰ کو مس کرتا ہے۔

جواب: لا² + ما² - ۱ لا + ۲ ما + ۱ = ۰ - یا لا² + ما² - ۱ لا + ۹/۲ ما + ۱۴۴/۱۶ = ۰

۷ — ثابت کرو کہ خط ما = م (لا - ۱) + ۱ √(۱ + م²) ، دائرہ لا² + ما² = ۲ ۱ لا کو مس کرتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔

۸ — دو خطوط کھینچے گئے ہیں جو علی الترتیب نقطوں (۱، ۰)، (-۱، ۰) پر سے گذرتے ہیں اور ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ ط بناتے ہیں۔ ان کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔ جواب: دائرے لا² + ما² - ۱ = ± ۲ ۱ ما ظم ط

۹ — ایک دائرہ ایک دیے ہوئے خط کو مس کرتا ہے اور دوسرے خط پر جو اول الذکر خط پر عمود ہے مستقل طول (۲ ل) قطع کرتا ہے۔ اس کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔ جواب: ما² - لا² = ل²

۱۰ — ایک خطِ مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقطوں (۱، ۰)، (-۱، ۰) سے اس پر کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۱۱ — لا² + ما² = ۳ کے اُن دو مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو و لا کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتے ہیں۔ جواب: ما = √۳ (لا ± ۲)

۱۲ — اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو ایک مثلث میں جس کے ضلعوں کی مساواتیں

لا = ۱ ، ۲ ما = ۵ ، ۳ لا - ۴ ما = ۵

ہیں کھینچا گیا ہے۔ جواب: (لا - ۲)² + (ما - ۳/۲)² = ۱

۷۶ — کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو مماس کھینچے گئے ہیں اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو مماسوں کے نقاطِ تماس کو ملاتا ہے۔

فرض کرو کہ اُس نقطہ کے محدد جس سے مماس کھینچے گئے ہیں (لا، ما)

ہیں۔ فرض کرو کہ نقاط تماس کے محدد ھ، ک اور ھَ، کَ ہیں اور دائرہ کی مساوات لا² + ما² = ا² ہے۔

(۱۴۳) مماسوں کی مساواتیں حسب دفعہ ۶۹

لا ھ + ما ک − ا² = ۰

لا ھَ + ما کَ − ا² = ۰

ہیں۔ لیکن چونکہ یہ دونوں مماس نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرتے ہیں اس لیے یہ دونوں مساواتیں محددوں لاَ، ماَ سے پوری ہوتی ہیں، اسلئے

لاَ ھ + ماَ ک − ا² = ۰ . . . . (۱)

لاَ ھَ + ماَ کَ − ا² = ۰ . . . . (۲)

لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) وہ شرطیں ہیں کہ نقاط (ھ، ک) اور (ھَ، کَ) اس خطِ مستقیم پر واقع ہوں جس کی مساوات

لاَ لا + ماَ ما − ا² = ۰ . . . . (۳)

ہے۔

پس (۳) اس خطِ مستقیم کی مطلوبہ مساوات ہے جو نقطہ (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاطِ تماس میں سے گذرتا ہے۔

اگر دائرہ کی مساوات لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ ہو تو ہم اسی طریقہ پر (دفعہ ۷۰ کے نتیجہ کو مانکر) ثابت کر سکتے ہیں کہ اس خط کی مساوات جو نقطہ (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاطِ تماس میں گذرتا ہے

لا لاَ + ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج = ۰

ہے۔

اگر نقطہ (لاَ، ماَ) دائرہ کے باہر ہو تو اس سے کھینچے ہوئے دو مماس حقیقی ہوں گے اور اس لیے محدد ھ، ک اور ھَ، کَ حقیقی ہوں گے لیکن اگر نقطہ (لاَ، ماَ) دائرہ کے اندر ہو تو یہ دو مماس خیالی ہوں گے لیکن ایسی صورت میں بھی وہ خط جس کی مساوات (۳) ہے حقیقی خط ہوگا جبکہ لاَ اور ماَ حقیقی ہوں۔ اس طرح ایک حقیقی خط ہوتا ہے جو دائرہ کے اندرونی نقطہ

کھینچے ہوئے دو خیالی مماسوں کے خیالی نقاط تماس کو ملاتا ہے۔

تعریف۔ اگر کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہوں اور ان مماسوں (خیالی یا حقیقی) کے نقاط تماس کو ایک خط مستقیم کے ذریعہ ملایا جائے تو اس خط مستقیم کو دائرہ کے لحاظ سے اُس نقطہ کا قطبی کہتے ہیں۔

ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو جن نقطوں (حقیقی یا خیالی) پر قطع کرتا ہے اُن نقطوں پر کھینچے ہوئے مماسوں کے نقطہ تقاطع کو دائرہ کے لحاظ سے اُس خط کا قطب کہتے ہیں۔

۷۷ ۔ فرض کرو کہ کسی نقطہ ت سے ایک دائرہ کے دو مماس ت ف ت ق ہیں۔ فرض کرو کہ ق، ف کی جانب حرکت کرکے بالآخر ف پر آکر منطبق ہوتا ہے تو ت بھی حرکت کرکے بالآخر ف پر آکر منطبق ہوگا اور مماس ت ف اور ت ق بالآخر ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اور وتر ف ق بھی منطبق ہوگا۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ ت کا قطبی جبکہ ت دائرہ پر ہو اس نقطہ پر کے مماس پر منطبق ہوتا ہے۔

یہ دفعہ ۷۶ کے نتیجہ کے مطابق ہے۔ کیونکہ قطبی کی مساوات اُسی شکل کی ہے جو مماس کی مساوات کی ہے اور اس لیے ایک نقطہ کا قطبی جبکہ نقطہ دائرہ پر ہو اُس نقطہ پر کا مماس ہوتا ہے

۷۸ ۔ اگر ایک نقطہ ف کا قطبی، ق میں سے گذرے تو ق کا قطبی، ف میں سے گذرے گا۔

فرض کرو کہ ف کے محدد (لَا، مَا) ہیں اور ق کے (لاً، ماً)۔ فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات لا² + ما² ـ ق² = ۰ ہے۔

(لَا، مَا) اور (لاً، ماً) کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب

لا لَا + ما مَا ـ ق² = ۰، .... (۱)

لا لاً + ما ماً ـ ق² = ۰، .... (۲)

ہیں۔ اگر ق، ف کے قطبی پر ہے تو اس کے محدد مساوات (۱) کو پورا کرنا چاہئیں اس لیے

لاً لَا + ماً مَا ـ ق² = ۰۔

لیکن یہ وہ شرط بھی ہے کہ ف، خط (۲) پر ہو یعنی ق کے قطبی پر۔ اسلیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اگر ق، ایک ثابت خط مستقیم پر ہو اور ف اِس خط کا قطب ہو تو ق کا قطبی، ف میں سے گذرنا چاہیے کیونکہ بموجب فرض ف کا قطبی ق میں سے گذرتا ہے۔

اِس کے بالعکس اگر کسی ثابت نقطہ ف میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا جائے اور ق اِس خط کا قطب ہو تو چونکہ ف، ق کے قطبی پر ہے اس لیے نقطہ ق ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہونا چاہیے یعنے ف کے قطبی پر۔

(۸۵) اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ ر پر ملیں تو ر خط ف ق کا قطب ہوگا۔

چونکہ ر، ف کے قطبی پر ہے اس لیے ر کا قطبی ف میں سے گذرتا ہے، اسی طرح وہ ق میں سے بھی گذرتا ہے اور اس لیے اُس کو خط ف ق ہونا چاہیے۔

۷۹ ۔ دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کیلئے ہندسی عمل۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$$

ہے اور ف کوئی نقطہ ہے اور اس کے مجدد لاَ ، ماَ ہیں ۔

دائرہ کے لحاظ سے ف کے قطبی کی مساوات

$$\text{لا لاَ} + \text{ما ماَ} - \text{ا}^2 = ۰ \text{، } \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے ۔

اس خط کی مساوات جو دائرہ کے مرکز و اور ف کو ملاتا ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{لاَ}} - \frac{\text{ما}}{\text{ماَ}} = ۰ \text{، } \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہے ۔

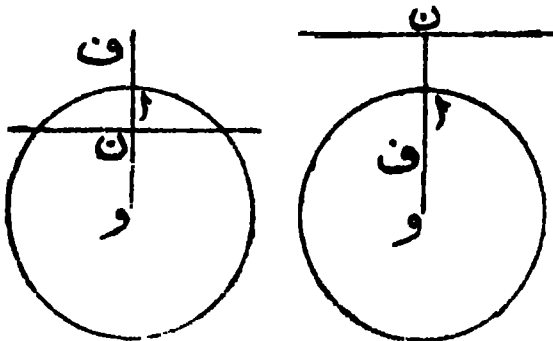
مساواتوں (۱) اور (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی اس خط پر عمود ہوتا ہے جو اس نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملاتا ہے ۔

اگر و سے قطبی پر عمود و ن ہو تو

$$\text{و ن} = \frac{\text{ا}^2}{\sqrt{\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2}} \qquad \text{(دفعہ ۳۱)}$$

نیز

$$\text{و ف} = \sqrt{\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2}$$

$$\therefore \quad \text{و ن} \times \text{و ف} = \text{ا}^2$$

(۸۶) پس قطبی کو حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل عمل حاصل ہوتا ہے۔ وف کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ دائرہ کو ا پر قطع کرتا ہے۔ خط وف پر ایک ایسا نقطہ ن لو کہ وف : وا = وا : ون۔ ن میں سے ایک خط، وف پر عمود کھینچو۔

مثال ۱۔ دائرہ $لا^2 + ما^2 = ۴$ کے لحاظ سے ذیل نقطوں کے قطبیوں کی مساواتیں لکھو:

(۱) (۲، ۳) (۲) (۳، ۰) (۳) (۱، -۱)

مثال ۲۔ $۲ لا + ۳ ما - ۶ = ۰$ کا قطب، لحاظ دائرہ

$$لا^2 + ما^2 - ۵ = ۰$$

کے معلوم کرو۔

[اگر لاَ، ماَ قطب ہے تو دیا ہوا خط وہی ہے جو لا لاَ + ما ماَ - ۵ = ۰ ہے اس لیے

$$\frac{لاَ}{۲} = \frac{ماَ}{۲} = \frac{۵}{۶}$$

اس لیے مطلوبہ قطب $(\frac{۵}{۲}، \frac{۵}{۲})$ ہے۔]

مثال ۳۔ حسب ذیل خطوں کے قطب اُس دائرہ کے لحاظ سے معلوم کرو جس کی مساوات $لا^2 + ما^2 = ۳۵$ ہے:-

(۱) $۴ لا + ۶ ما - ۷ = ۰$، (۲) $۳ لا - ۲ ما - ۵ = ۰$، (۳) $ا لا + ب ما = ا$

جوابات: (۱) (۲۰، ۳۰)، (۲) (۲۱، -۱۴)، (۳) (۳۵ ا، ۳۵ ب)

مثال ۴۔ اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو جہاں خط لا = ۱، دائرہ $لا^2 + ما^2 = ۴$ کو قطع کرتا ہے۔ اِن نقطوں پر کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ وہ نقطہ (۴، ۰) پر متقاطع ہوتے ہیں۔

جواب: $(۱، \sqrt{۳})$، $(۱، -\sqrt{۳})$

مثال ۵۔ اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو جہاں خط $۳ لا + ۴ ما = ۲۵$، دائرہ $لا^2 + ما^2 = ۵۰$ کو قطع کرتا ہے اور اِن نقطوں پر کے مماسوں کی مساواتیں

معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ مماس نقطہ (۶، ۸) پر متقاطع ہوتے ہیں۔ نقطہ (۶، ۸) کے قطبی کی مساوات بلحاظ اِس دائرہ کے لکھو۔

مثال ۶۔ اگر نقطہ (لاَ، ماَ) کا قطبی بلحاظ دائرہ لا² + ما² = ا² کے، دائرہ (لا - ا)² + ما² = ا² کو مس کرے تو ثابت کرو کہ (لاَ، ماَ) اُس منحنی پر ہے جس کی مساوات ما² + ۲ ا لا = ا² ہے۔

۸۰۔ دائرہ کی قطبی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے اور اِس کے قطبی محدد غہ، عہ ہیں۔

فرض کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ا کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ ف کے قطبی محدد (ر، طہ) ہیں۔ تب

ج ف² = و ج² + و ف² - ۲ و ج × و ف جم ج و ف

لیکن ج ف = ا، و ج = غہ، و ف = ر، زاویہ Y و ج = عہ، اور زاویہ Y و ف = طہ۔ اس لیے

ا² = غہ² + ر² - ۲ ر غہ جم (طہ - عہ)، ....(۱)

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

(۸۴) اگر مبدا دائرہ کے مرکز پر ہو تو غہ = ا اور اسلیے (۱) سے

ر = ۲ ا جم (طہ - عہ)، ....(۲)

اور اگر ابتدائی خط مرکز میں سے گذرے تو عہ صفر ہوگا اور مطلوبہ مساوات

ر = ۲ ا جم طہ، ....(۳)

ہوگی۔

ف
ج
و
Y

مساوات (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر طہ کی کسی مخصوص قیمت کے متناظر ر کی دو قیمتیں $ر_۱$، $ر_۲$ ہوں تو

$$ر_۱ ر_۲ = غہ^۲ - ا^۲ \quad ....(۴)$$

اس طرح $ر_۱ ر_۲$ کا انحصار طہ پر نہیں ہے ۔

اِس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اگر ایک ثابت نقطہ سے ایک خطِ مستقیم کھینچا جائے جو دیئے ہوئے دائرہ کو قطع کرے تو مقطوعات سے بنا ہوا مستطیل رقبہ میں مستقل ہوتا ہے ۔

(۴) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مبدا، دائرہ کے اندر ہو (اِس صورت میں $غہ < ا$) تو $ر_۱$ اور $ر_۲$ مختلف العلامت ہونے چاہئیں اور اس لیے اِن کو مختلف سمتوں میں کھینچنا چاہئے جیسا کہ ہندسی طور پر واضح ہے ۔

علی القوائم دائرے

۸۱ ۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو دائرے

$$لا^۲ + ما^۲ + ۲گ_۱ لا + ۲ف_۱ ما + ج_۱ = ۰ \quad \text{اور} \quad لا^۲ + ما^۲ + ۲گ_۲ لا + ۲ف_۲ ما + ج_۲ = ۰$$

ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں ۔

اِن دو دائروں کے مرکز علی الترتیب $(-گ_۱، -ف_۱)$ اور $(-گ_۲، -ف_۲)$ ہیں اور اِن کے نصف قطروں کے مربع علی الترتیب $گ_۱^۲ + ف_۱^۲ - ج_۱$ اور $گ_۲^۲ + ف_۲^۲ - ج_۲$ ہیں ۔

اب یہ دائرے علی القوائم متقاطع ہوں گے اگر مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا مربع نصف قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہو

پس مطلوبہ شرط یہ ہے کہ

$$(گ_۱ - گ_۲)^۲ + (ف_۱ - ف_۲)^۲ = گ_۱^۲ + ف_۱^۲ - ج_۱ + گ_۲^۲ + ف_۲^۲ - ج_۲$$

جو $۲گ_۱گ_۲ + ۲ف_۱ف_۲ - ج_۱ - ج_۲ = ۰$
میں تحویل ہوتی ہے ـ

متبادل ثبوت: ـ دائروں کے ایک مشترک نقطہ (لا$_۱$، ما$_۱$) پر کے مماسوں کی مساواتیں

$$لالا_۱ + ماما_۱ + گ_۱(لا + لا_۱) + ف_۱(ما + ما_۱) + ج_۱ = ۰،$$

اور
$$لالا_۱ + ماما_۱ + گ_۲(لا + لا_۱) + ف_۲(ما + ما_۱) + ج_۲ = ۰$$

ہیں ـ یہ مماس علی القوائم ہونگے اگر

$$(لا_۱ + گ_۱)(لا_۱ + گ_۲) + (ما_۱ + ف_۱)(ما_۱ + ف_۲) = ۰$$

یعنے
$$لا_۱^۲ + ما_۱^۲ + لا_۱(گ_۱ + گ_۲) + ما_۱(ف_۱ + ف_۲) + گ_۱گ_۲ + ف_۱ف_۲ = ۰، \ldots\ldots (۱)$$

لیکن چونکہ (لا$_۱$، ما$_۱$) دونوں دائروں پر ہے اس لیے

$$لا_۱^۲ + ما_۱^۲ + ۲گ_۱لا_۱ + ۲ف_۱ما_۱ + ج_۱ = ۰، \ldots\ldots (۲)$$

$$لا_۱^۲ + ما_۱^۲ + ۲گ_۲لا_۱ + ۲ف_۲ما_۱ + ج_۲ = ۰، \ldots\ldots (۳)$$

(۱) کو ۲ سے ضرب دو اور (۲) اور (۳) کے مجموعہ کو تفریق کرو تو

$$۲گ_۱گ_۲ + ۲ف_۱ف_۲ - ج_۱ - ج_۲ = ۰$$

۸۲ ـ اُس مماس کا طول معلوم کرنا جو ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دائرہ کا کھینچا گیا ہو ـ

فرض کرو کہ دیا ہوا نقطہ ت ہے اور دائرہ کا مرکز ج ہے ـ فرض کرو کہ ت سے دائرہ کے دو مماسوں میں سے ایک ت ف ہے ـ تب ہم جانتے ہیں کہ زاویہ ج ف ت قائمہ زاویہ ہے، اسلئے

$$ت ف^۲ = ج ت^۲ - ج ف^۲، \ldots\ldots (۱)$$

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

(لا ـ ا)^۲ + (ما ـ ب)^۲ ـ ج^۲ = ۰، .... (۲)

ہے اور فرض کرو کہ ت کے محدد لاَ، ماَ ہیں تو

ج ت^۲ = (لاَ ـ ا)^۲ + (ماَ ـ ب)^۲

اس لیے (۱) کی رو سے

ت ف^۲ = (لاَ ـ ا)^۲ + (ماَ ـ ب)^۲ ـ ج^۲، .... (۳)

اِس لیے مساوات (۲) کے دائیں جانبی رکن میں محددوں لاَ، ماَ کو درج کرنے سے ت ف^۲ یعنے مماس کے طول کا مربع معلوم ہوتا ہے۔

(۸۹) پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر س = ۰ ایک دائرہ کی مساوات ہو (جہاں س کو اختصاراً لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج کی بجائے لکھا گیا ہے) اور س میں کسی نقطہ کے محدد درج کئے جائیں تو نتیجہ اُس مماس کے طول کے مربع کے مساوی ہوتا ہے جو اُس نقطہ سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو یا اُس مستطیل (اقلیدس جلد سوم مسئلہ ۳۶) کے رقبہ کے مساوی جس کے متصلہ اضلاع اُن وتروں کے مقطوعے ہوں جو نقطہ میں سے کھینچے گئے ہوں۔ اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہو تو مستطیل کا رقبہ منفی ہوگا اور مماس کا طول خیالی۔

اگر دائرہ کی مساوات

ا لا^۲ + ب ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

ہو تو کسی نقطہ سے مماس کے طول کا مربع معلوم کرنے کے لیے اول ا سے تقسیم کرنا چاہئے اور پھر اُس نقطہ کے محدد درج کرنا چاہئے جس سے مماس کھینچا گیا ہے۔

مماسوں کے اُس زوج کی مساوات معلوم کرنا جو کسی نقطہ سے دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ا^۲ کے کھینچے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ نقطہ (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے مماس ت ف اور ت ق ہیں۔

اب اگر ان میں سے ایک مماس پر کوئی نقطہ س (لاَ، ماَ) ہو (فرض کرو کہ ت ف پر) اور ف ق پر عمود ت ل اور س م کھینچے جائیں تو متشابہ مثلثوں سے

ت فؔ : س فؔ = ت لؔ : س مؔ، .... (۱)

لیکن ف ق کی مساوات

لا لاَ + ما ماَ − ر۲ = ۰

ہے، اس لیے $\frac{ت ل^2}{س م^2} = \frac{(لا^2 + ما^2 - ر^2)^2}{(لا لاَ + ما ماَ - ر^2)^2}$

اور دفعہ ۷۴ کی رو سے

$$\frac{ت ف^2}{س ف^2} = \frac{(لا^2 + ما^2 - ر^2)^2}{(لاَ^2 + ماَ^2 - ر^2)^2}$$

اس لیے (۱) سے

$$(لاَ^2 + ماَ^2 - ر^2)(لا^2 + ما^2 - ر^2) - (لا لاَ + ما ماَ - ر^2)^2 = ۰$$

اس لیے مماسوں میں سے کسی ایک کا کوئی نقطہ طریق

$$(لا^2 + ما^2 - ر^2)(لاَ^2 + ماَ^2 - ر^2) - (لا لاَ + ما ماَ - ر^2)^2 = ۰$$

پر ہے اور اس لیے یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

دو دائروں کا بنیادی محور

۸۳ — اگر ایک دائرہ کی مساوات

لا۲ + ما۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰، .... (۱)

اور دوسرے دائرہ کی مساوات

لا۲ + ما۲ + ۲گَ لا + ۲فَ ما + جَ = ۰، .... (۲)

ہو تو مساوات

لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = لا^۲ + ما^۲ + ۲گَ لا + ۲فَ ما + جَ

. . . . (۳)

صریحاً کسی ایسے نقطے کے محددوں سے پوری ہوگی جو (۱) اور نیز (۲) پر ہو۔ اس لیے مساوات (۳) اُن نقطوں میں سے گذرنے والے طریق کو تعبیر کرتی ہے جو دونوں دائروں میں مشترک ہیں۔

لیکن مساوات (۳)

۲ (گ ـ گَ) لا + ۲ (ف ـ فَ) ما + ج ـ جَ = ۰ . . . (۴)

میں تحویل ہوتی ہے اور یہ مساوات درجہ اول کی ہے اور اس لیے ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

پس مساوات (۳) یا (۴) اُن نقطوں میں سے گذرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات ہے جو دائروں (۱) اور (۲) میں مشترک ہیں۔

اگر دو دائرے (۱) اور (۲) ایک دوسرے کو حقیقی نقطوں میں قطع نہ کریں تو بھی (۳) یا (۴) سے حاصل شدہ خطِ مستقیم تمام صورتوں میں حقیقی ہوگا بشرطیکہ گ، ف، ج، گَ، فَ، جَ حقیقی ہوں۔ اس طرح ہمیں ایک ایسے حقیقی خطِ مستقیم کی مثال ملتی ہے جو دو دائروں کے خیالی نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

مساوات (۳) کا دوسرا ہندسی مفہوم بھی دیا جا سکتا ہے۔

اگر س = ۰ ایک دائرہ کی مساوات ہو جس میں لا^۲ کا سر ایک ہو اور اگر کسی نقطہ کے محدد س میں درج کئے جائیں تو نتیجہ اُس مماس کے مربع کے مساوی ہوگا جو اِس نقطہ سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو (دفعہ ۸۲)۔

اب اگر خطِ مستقیم (۳) پر کسی نقطہ کے محدد لا، ما ہوں تو اس مساوات کی دائیں جانب کا جملہ اُس مماس کے مربع کے مساوی ہوگا جو نقطہ (لا، ما) سے دائرہ (۱) کا کھینچا گیا ہے اور بائیں جانب کا جملہ اُس مماس کے مربع کے مساوی ہوگا جو نقطہ (لا، ما) سے دائرہ (۲) کا کھینچا گیا ہے۔

پس خط (۳) کے کسی نقطہ سے دو دائروں (۱) اور (۲) کے مماس

کھینچے جائیں تو یہ مماس ایک دوسرے کے مساوی ہوں گے۔

تعریف۔ وہ خطِ مستقیم جو دو دائروں کے نقاطِ تقاطع (حقیقی یا خیالی) میں سے کھینچا گیا ہو ان دائروں کا بنیادی محور کہلاتا ہے۔

یہ قابل ذکر ہے کہ دو دائروں کے بنیادی محور کی یہ تعریف بھی ہو سکتی ہے کہ وہ اُن نقطوں کا طریق ہے جن سے اِن دو دائروں کے کھینچے ہوئے مماس طول میں مساوی ہوتے ہیں۔ (۹۱)

اِن دو دائروں کے مرکزوں کے محدد علی الترتیب -گ، -ف اور -گَ، -فَ ہیں، اس لیے ان کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات

$$\frac{لا + گ}{گ - گَ} = \frac{ما + ف}{ف - فَ}$$

ہے جو (حسب دفعہ ۳۰) خط (۴) پر عمود ہے۔

پس دو دائروں کا بنیادی محور اِن کے مرکزوں کو ملانے والے خط پر عمود ہوتا ہے۔

۸۴ — تین دائروں میں سے دو دو کے تین بنیادی محور ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

اگر تین دائروں کی مساواتیں س = ۰، سَ = ۰، سً = ۰ ہوں جن میں سے ہر ایک میں لا^۲ کا سر ایک ہو تو پہلے اور دوسرے کے بنیادی محور کی مساوات

$$س - سَ = ۰$$

ہے۔ دوسرے اور تیسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

$$سَ - سً = ۰$$

ہے اور تیسرے اور پہلے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

س۳ - س۱ = ۰

ہے۔ اب یہ ظاہر ہے کہ اگر ان میں سے دو مساواتیں کسی نقطہ کے محددوں سے پوری ہوں تو تیسری مساوات بھی ان محددوں سے پوری ہو گی۔ ان تین بنیادی محوروں کے نقطۂ تقاطع کو دائروں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔

ہم محور دائرے

۸۵ — دائروں کے ایک نظام کی مساوات معلوم کرنا جن میں سے ہر زوج کا بنیادی محور وہی ہو۔

اگر مشترک بنیادی محور کو محورِ ما فرض کیا جائے تو نظام کے دائروں میں سے کسی دو کی مساوات (جبکہ اس کو معیاری شکل میں لکھا گیا ہو جس میں لا۲ کا سر اکائی ہو) صرف لا کے سر میں مختلف ہو سکتی ہے۔ اس طرح دائروں کے نظام کی عام مساوات جبکہ ان دائروں میں سے کسی زوج کے بنیادی محور کی مساوات لا = ۰ ہو

لا۲ + ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہے جہاں ف اور ج تمام دائروں کے لیے وہی ہیں۔

اگر مبداء کو (۰، - ف) پہ تبدیل کیا جائے تو مطلوبہ مساوات شکل

لا۲ + ما۲ + ۲ گ لا + ج = ۰ ‏. . . . . . . (۱)

اختیار کرتی ہے جہاں ج تمام دائروں کے لیے وہی ہے اور گ مختلف دائروں کے لیے مختلف ہے۔

بنیادی محور دائروں کو حقیقی نقطوں میں قطع کرے گا اگر ج منفی ہو اور خیالی نقطوں میں قطع کرے گا اگر ج مثبت ہو۔

مساوات (۱) کو شکل

$$(\text{لا}+\text{گ})^{2}+\text{ما}^{2}=\text{گ}^{2}-\text{ج}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔ پس اگر گ کو $\pm\sqrt{\text{ج}}$ کے مساوی لیا جائے تو دائرہ نقطوں $(\mp\sqrt{\text{ج}}\ ،\ ۰)$ میں سے ایک میں تحویل ہوگا۔

اِن نقطہ دائروں کو ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے کہا جاتا ہے۔

جب ج مثبت ہوتا ہے یعنے جب دائرے خود خیالی نقطوں میں منقطع ہوتے ہیں تو انتہائی نقطے حقیقی ہوتے ہیں اور اس کے بالعکس جب دائرے حقیقی نقطوں میں منقطع ہوتے ہیں تو انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں۔

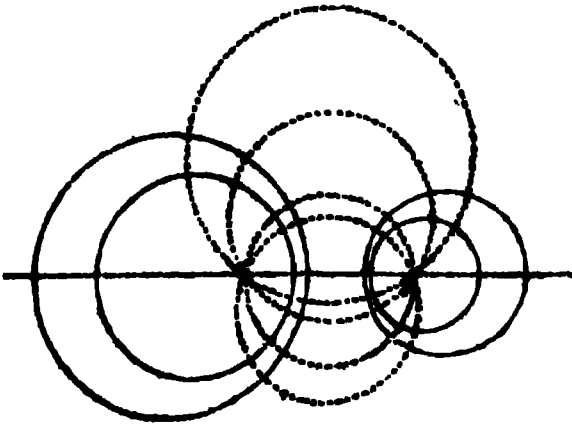
دفعہ ۱۸ میں معلوم شدہ شرط سے یہ فوراً مستنبط ہوتا ہے کہ مساواتوں

$$\text{لا}^{2}+\text{ما}^{2}+۲\,\text{گ لا}+\text{ج}=۰\ ،$$

اور

$$\text{لا}^{2}+\text{ما}^{2}+۲\,\text{ف ما}-\text{ج}=۰$$

سے تعبیر شدہ ہم محور دائروں کے دو نظامات جہاں ج تمام دائروں کیلئے وہی ہے ایسے ہیں کہ ایک نظام کا کوئی دائرہ دوسرے نظام کے تمام دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

یہ دو علی القوائم نظامات ایسے ہیں کہ ایک نظام کے مشترک نقطے دوسرے نظام کے انتہائی نقطے ہیں۔

(۹۴) شکل ذیل میں دائروں کے ایک نظام کو پورے خطوں سے اور دوسرے نظام کو نقطہ دار خطوں سے تعبیر کیا گیا ہے۔

۸۶* — اگر دو دائروں کی مساواتیں س = ۰ اور سَ = ۰ ہوں تو مساوات س - لہ سَ = ۰، لہ کی تمام قیمتوں کیلئے اُن تمام دائروں کو تعبیر کرے گی جو س = ۰ اور سَ = ۰ کے مشترک نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

اگر س = ۰ اور سَ = ۰ علی الترتیب

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + ۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + ۲\text{گَ لا} + ۲\text{فَ ما} + \text{جَ} = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$$

ہوں تو مساوات س - لہ سَ = ۰،

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + ۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج} - \text{لہ} (\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + ۲\text{گَ لا} + ۲\text{فَ ما} + \text{جَ}) = ۰ \quad \ldots\ldots (۳)$$

ہوگی۔ اب مساوات (۳) صریحاً ایک دائرہ کی مساوات ہے خواہ لہ کی قیمت کچھ ہی ہو۔

نیز اگر کسی نقطہ کے محدد (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں تو وہ (۳) کو بھی پورا کریں گے۔

پس س - لہ سَ = ۰، لہ کی کسی قیمت کے لیے، ایک ایسے دائرہ کی مساوات ہے جو س = ۰، سَ = ۰ کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

لہ کو مناسب قیمت دیکر دائرہ (۳) کو کسی دوسرے نقطے میں سے گذارا جا سکتا ہے، اس لیے س - لہ سَ = ۰ سے وہ تمام دائرے تعبیر ہوتے ہیں جو س = ۰ اور سَ = ۰ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتے ہیں۔

مساوات س - لہ سَ = ۰ کا ہندسی مفہوم قابل غور ہے۔ اُس نقطہ سے جس کے محدد مساوات س - لہ سَ = ۰ کو پورا کرتے ہیں دائروں س = ۰ اور سَ = ۰ کے مماس کھینچو تو دفعہ ۸۲ سے معلوم ہوگا

کہ مس = . کے مماس کا مربع ، مسَ = . کے مماس کے مربع کا لا گنا ہے
اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے :

اُس نقطہ کا طریق جو اِس طرح حرکت کرے کہ اس سے دو دیے ہوئے دائروں کے مماس ایک مستقل نسبت میں ہوں ایک ہم محور دائرہ ہوتا ہے -

۸۷ — اگر دو دائروں کے مرکز و ، وَ اور نصف قطر ا ، اَ ہوں تو وہ دو نقطے جو خط و وَ کو داخلاً اور خارجاً نسبت ا : اَ میں تقسیم کرتے ہیں اِن دو دائروں کے مشابہت کے مرکز کہلاتے ہیں -

مشابہت کے مرکزوں کے خواص پر بحث کرنے کا بہترین طریقہ ہندسی طریقہ ہے -

اِن میں سے اہم ترین خواص یہ ہیں (۱) دو دائروں کے مشترک مماسوں میں سے دو ، مشابہت کے ہر مرکز میں سے گذرتے ہیں ، (۲) دو دائروں کے مشابہت کے ایک مرکز میں سے گذرنے والا کوئی خطِ مستقیم اِن دو دائروں سے متشابہاً منقطع ہوتا ہے -

مثالیں

۱ — اُس مماس کا طول معلوم کرو جو نقطہ (۲ ، ۵) سے دائرہ لا² + ما² − ۲ لا − ۳ ما − ۱ = ۰ کا کھینچا گیا ہے -

نیز اُن مماسوں کا طول معلوم کرو جو نقطہ (۴ ، ۱) سے دائرہ
۴ لا² + ۴ ما² − ۲ لا − ما − ۷ = ۰
کے کھینچے گئے ہیں -   جواب : ۳ ، ۲ ¼ ...

۲ — نقطوں (۳ ، ۰) ، (۰ ، ۲) اور (−۱ ، ۱) میں سے گذرنیوالے دائرہ کی مساوات معلوم کرو اور مبدا میں سے گذرنے والے تمام وتروں

مقطوعات کے مستقل مستطیل کی قیمت معلوم کرو۔ جواب: ۱۸/۵

۳ — دائروں لا^۲ + ما^۲ + ۲لا + ۳ما − ۷ = ۰ اور لا^۲ + ما^۲ − ۲لا − ما + ۱ = ۰ کے بنیادی محور کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: لا + ما − ۲ = ۰

۴ — دائروں لا^۲ + ما^۲ + ب لا + ب ما − ج = ۰ اور ا لا^۲ + ا ما^۲ + ب^۲ لا + ب^۲ ما = ۰ کا بنیادی محور معلوم کرو۔ جواب: ا لا − ب ما + (ج ا)/(ا − ب) = ۰

(۹۵) ۵ — دائروں لا^۲ + ما^۲ + ا لا + ب ما + ج = ۰ اور لا^۲ + ما^۲ + ب لا + ا ما + ج = ۰ کا بنیادی محور اور مشترک وتر کا طول معلوم کرو۔

جواب: لا − ما = ۰، {۱/۲ (ا + ب)^۲ − ۴ج}^{۱/۲}

۶ — ثابت کرو کہ تین دائرے

لا^۲ + ما^۲ + ۳لا + ۶ما = −۱۲، لا^۲ + ما^۲ + ۲لا + ۸ما + ۱۶ = ۰

اور لا^۲ + ما^۲ + ۱۲ما + ۲۴ = ۰

ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۷ — تین دائروں

لا^۲ + ما^۲ + ۴لا + ۷ = ۰، ۲لا^۲ + ۲ما^۲ + ۳لا + ۵ما + ۹ = ۰

اور لا^۲ + ما^۲ + ما = ۰

کا بنیادی مرکز معلوم کرو۔ جواب: (−۲، −۱)

۸ — دائروں

لا^۲ + ما^۲ = ۱ اور (لا − ۱)^۲ + (ما − ۳)^۲ = ۴

کے مشترک مماس معلوم کرو۔

[خط ل لا + م ما + ن = ۰ دونوں دائروں کو مس کرے گا اگر

ن^۲ = ل^۲ + م^۲ اور (ل + ۳م + ن)^۲ = ۴(ل^۲ + م^۲)

پس ۲ن = ± (ل + ۳م + ن)

اگر ل + ۳م − ن = ۰ تو (ل + ۳م)^۲ = ل^۲ + م^۲ اور اسلیے

م = ۰ یا ۳ ل + ۴ م = ۰

پس جب م = ۰ تو ل = ن اور مساوات لا + ۱ = ۰ ہے۔
لیکن جب ۳ ل = - ۴ م تو ۳ ن = ۵ م اور مساوات ۴ لا - ۳ ما - ۵ = ۰ ہے۔
پھر اگر ل + ۳ م + ۳ ن = ۰ تو ل = ۰ یا ۴ ل = ۳ م
پس جب ل = ۰ تو م = - ن اور مساوات ما - ۱ = ۰ ہے۔
لیکن جب ۴ ل = ۳ م تو ۴ ن = - ۵ م اور مساوات ۳ لا + ۴ ما - ۵ = ۰ ہے۔]

۹ — اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو دائروں
لا^2 + ما^2 = ۴ اور (لا - ۴)^2 + ما^2 = ۱
دونوں کو مس کرتے ہیں۔ نیز مشابہت کے مرکزوں کے محدد معلوم کرو۔

جواب: ۳ لا ± $\sqrt{7}$ ما - ۸ = ۰، اور لا ± $\sqrt{15}$ ما - ۸ = ۰،
(۸، ۰)، ($\frac{8}{3}$، ۰)

۱۰ — اگر نقطہ (ف، گ) سے دائرہ لا^2 + ما^2 = ۶ کے مماس کا طول اُس مماس کا دوچند ہو جو نقطہ (ف، گ) سے دائرہ لا^2 + ما^2 + ۳ لا + ۳ ما = ۰ کا ہے تو
ف^2 + گ^2 + ۴ ف + ۴ گ + ۲ = ۰

۱۱ — اگر کسی نقطہ سے دائرہ لا^2 + ما^2 + ۲ لا = ۰ کے مماس کا طول اُس مماس کے طول کا تین گنا ہو جو اسی نقطہ سے دائرہ لا^2 + ما^2 - ۴ = ۰ کا ہے تو ثابت کرو یہ نقطہ دائرہ

۴ لا^2 + ۴ ما^2 - لا - ۱۸ = ۰

پر ہونا چاہئے۔

۱۲ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو دائروں لا^2 + ما^2 + ۲ لا + ۳ ما - ۷ = ۰ اور لا^2 + ما^2 + ۳ لا - ۲ ما - ۱ = ۰ کے نقاطِ تقاطع میں سے اور نقطہ (۱، ۲) میں سے گذرتا ہے۔

جواب: لا^2 + ما^2 + ۴ لا - ۷ ما + ۵ = ۰

۱۳ — ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو لا^2 + ما^2 - ۴ = ۰ اور لا^2 + ما^2

-۲لا - ۴ما + ۴ = ۰ کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرے اور خط لا + ۲ ما = ۰ کو مس کرے۔

جواب: لا² + ما² - لا - ۲ما = ۰

(۹۶) **۸۸** — حسب ذیل مثالوں میں بعض اہم ہیں۔

(۱) ہم محور دائروں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے کسی ثابت نقطہ کے قطبی ایک دوسرے ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور نظام کے انتہائی نقطوں میں سے ایک کا قطبی تمام دائروں کے لیے وہی ہے۔

دائروں کا نظام مساوات

لا² + ما² + ۲ل لا + ج = ۰، . . . . (۱)

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ج تمام دائروں کے لیے وہی ہے (دفعہ ۸۵)۔
نظام کے انتہائی نقطے (± ج، ۰) ہیں۔

فرض کرو کہ ثابت نقطہ کے محدد (ف، گ) ہیں۔ تب (۱) کے لحاظ سے قطبی کی مساوات

ف لا + گ ما + ل (لا + ف) + ج = ۰، . . . . . (۲)

ہوگی۔

ل کی قیمت خواہ کچھ بھی ہو خطِ مستقیم (۲) ہمیشہ اُس نقطہ میں سے گزرے گا جو ف لا + گ ما + ج = ۰ اور لا + ف = ۰ سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر ف = ± ج اور گ = ۰ تو مساوات (۲)، ف (لا + ف) + ل (لا + ف) = ۰ میں تحویل ہوتی ہے اور اس لئے لا + ف = ۰۔

پس انتہائی نقطوں میں سے ایک کا قطبی وہ خط ہے جو دوسرے انتہائی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور بنیادی محور کے متوازی ہے۔

(۲) اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو اور ایک دائرہ کے لحاظ سے تین نقطوں کے قطبیوں سے مثلث اَ بَ جَ بنے چنانچہ بَ جَ، ا کا قطبی ہے، جَ اَ، ب کا قطبی ہے اور اَ بَ، ج کا قطبی ہے تو تین خطوطِ مستقیم ا اَ، ب بَ، ج جَ ایک نقطہ پر ملیں گے۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

لا² + ما² = د² ، .... (۱)

ہے اور فرض کرو کہ نقطوں ا، ب، ج کے محدد علی الترتیب لاَ، ماَ اور لاً، ماً اور لاٍ، ماٍ ہیں۔

اب تین خطوط مستقیم ب ج، ج ا، اب کی مساواتیں

لاَ لا + ماَ ما − د² = ۰ ، .... (۲)

لاً لا + ماً ما − د² = ۰ ، .... (۳)

اور لاٍ لا + ماٍ ما − د² = ۰ ، .... (۴)

ہیں۔

(۲) (۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والا ایک خط ہے اور اس لیے اس کی مساوات (دفعہ ۴۳)،

لالاً + ماماً − د² = لہ (لالاٍ + ماماٍ − د²)

میں شامل ہے۔ لیکن یہ خط ا میں سے بھی گزرتا ہے جس کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں۔ اس لیے ہم لہ کو مساوات

لاَلاً + ماَماً − د² = لہ (لاَلاٍ + ماَماٍ − د²)

سے معلوم کرتے ہیں۔

پس ا اَ کی مساوات

(لالاً + ماماً − د²) (لاَلاٍ + ماَماٍ − د²)
= (لالاٍ + ماماٍ − د²) (لاَلاً + ماَماً − د²)، .... (۵)

ہے۔

(۹۷) دوسری مساواتیں متشاکل ہونے کی وجہ سے لکھ لی جا سکتی ہیں۔ چنانچہ وہ ہونگی

(لالاٍ + ماماٍ − د²) (لاًلاَ + ماًماَ − د²)
= (لالاَ + ماماَ − د²) (لاًلاٍ + ماًماٍ − د²)، .... (۶)

(لالاَ + ماماَ − د²) (لاٍلاً + ماٍماً − د²)
= (لالاً + ماماً − د²) (لاٍلاَ + ماٍماَ − د²)، .... (۷)

چونکہ یہ تین مساواتیں (۵) '(۶) اور (۷) باہم جمع کرنے پر متماثلاً معدوم ہوتی ہیں اس لیے ان مساواتوں سے تعبیر شدہ خطوط ا اَ ' ب بَ ' اور ج جَ ایک نقطہ پر ملتے یا متقاطع ہوتے ہیں (دفعہ ۲۴) ۔

(۳) دو دیے ہوئے دائروں کے نقاطِ تقاطع میں سے ایک و ہے اور و میں سے گذرنے والا کوئی خط ان دائروں کو علی الترتیب ف اور ق پر قطع کرتا ہے ۔ ف ق کے وسطی نقطہ کا طریق معلوم کرو ۔

و کو مبدا قرار دو اور فرض کرو کہ دائروں کی مساواتیں (دفعہ ۸۰)

ر = ۲ ا جم (طہ - عہ) اور ر = ۲ ب جم (طہ - بہ)

ہیں ۔

تب طہ کی کسی مخصوص قیمت کے لیے

وف = ۲ ا جم (طہ - عہ) ' .... (۱)

وق = ۲ ب جم (طہ - بہ) ' .... (۲)

اگر س ' ف ق کا وسطی نقطہ ہے تو

وس = ½ (وف + وق)

∴ وس = ا جم (طہ - عہ) + ب جم (طہ - بہ)

∴ س کا طریق

ر = ا جم (طہ - عہ) + ب جم (طہ - بہ)

= (ا جم عہ + ب جم بہ) جم طہ + (ا جب عہ + ب جب بہ) جب طہ

سے حاصل ہوتا ہے ۔ اس لیے یہ طریق وہ دائرہ ہے جس کی مساوات

ر = اَ جم (طہ - بَ)

ہے جہاں اَ اور بَ مساواتوں

اَ جم بَ = ا جم عہ + ب جم بہ ' اَ جب بَ = ا جب عہ + ب جب بہ

سے معلوم ہوتے ہیں ۔

(۴) اگر ایک مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ پر کے کسی نقطہ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے پائیں ایک خطِ مستقیم پر واقع ہونگے ۔

نقطہ و کو مبدا اور اس میں سے گذرنے والے قطر کو ابتدائی خط لو۔ تب دائرہ کی مساوات ر = ۲ ا جم طہ ہوگی۔
فرض کرو کہ نقطوں ا، ب، ج کے زاویٔ محدد علی الترتیب عہ، بہ، جہ ہیں۔ خط ب ج وہ خط ہے جو (۲ ا جم بہ، بہ) اور (۲ ا جم جہ، جہ) کو ملاتا ہے۔ ب ج کی قطبی مساوات معلوم کرنے کے لیے عام شکل ع = ر جم (طہ - فہ) لو (دفعہ ۵۸) اور ب اور ج کے محدد درج کرو۔ اس طرح ع اور فہ کو معلوم کرنے کے لیے دو مساواتیں حاصل ہونگی یہ مساواتیں

ع = ۲ ا (جم بہ) جم (بہ - فہ)

اور ع = ۲ ا جم جہ جم (جہ - فہ)

ہونگی۔ پس فہ = بہ + جہ اور ع = ۲ ا جم بہ جم جہ۔ اس لیے ب ج کی مساوات

۲ ا جم بہ جم جہ = ر جم (طہ - بہ - جہ)، .... (۱)

ہے۔

اسی طرح ج ا اور ا ب کی مساواتیں علی الترتیب

۲ ا جم جہ جم عہ = ر جم (طہ - جہ - عہ)، .... (۲)

اور ۲ ا جم عہ جم بہ = ر جم (طہ - عہ - بہ)، .... (۳)

ہونگی۔

خطوں (۱)، (۲)، (۳) پر نقطہ و سے عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے پائین کے محدد علی الترتیب (۲ ا جم بہ جم جہ، بہ + جہ)، (۲ ا جم جہ جم عہ، جہ + عہ)، (۲ ا جم عہ جم بہ، عہ + بہ) ہوں گے۔ یہ تینوں نقطے سب کے سب اس خطِ مستقیم پر ہیں جس کی مساوات

۲ ا جم عہ جم بہ جم جہ = ر جم (طہ - عہ - بہ - جہ)، ...... (۴)

ہے۔

عمودوں کے پائین میں سے گذرنے والے اس خط کو مثلث کے لحاظ سے نقطہ و کا خطِ پائین کہتے ہیں۔
فرض کرو کہ دائرہ پر دوسرا نقطہ د ہے اور اس کا زاوئی محدد ضہ ہے۔

چار نقطوں ا، ب، ج، د میں سے تین تین کو چار طریقوں سے لیا جا سکتا ہے اور اس طرح چار مثلثوں کے جواب میں و کے چار خطوط پائین حاصل ہوں گے۔ ہم نے ان میں سے ایک خط پائین کی مساوات معلوم کی ہے یعنے مساوات (۴)۔ دیگر تین کی مساواتیں تشاکل سے لکھ لی جا سکتی ہیں چنانچہ یہ مساواتیں

۲ ا جم ب جم جہ جم ضہ = جم (ط - ب - جہ - ضہ)، ..... (۵)

۲ ا جم جہ جم ضہ جم عہ = رجم (ط - جہ - ضہ - عہ)، ..... (۶)

اور ۲ ا جم ضہ جم عہ جم ب = رجم (ط - ضہ - عہ - ب)، ..... (۷)

ہوں گی۔

خطوں (۴)، (۵)، (۶) اور (۷) پر نقطہ و سے عمودوں کے پائین کے عدد (۲ ا جم عہ جم ب جم جہ، عہ + ب + جہ)، وغیرہ ہوں گے۔ یہ چار نقطے سب کے سب اُس خط پر ہیں جس کی مساوات

۲ ا جم عہ جم ب جم جہ جم ضہ = رجم (ط - عہ - ب - جہ - ضہ)

ہے۔

صریحًا اس مسئلہ کی توسیع کیجا سکتی ہے۔

(۵) خطوطِ مستقیم ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرنے والے خطوں کی مساواتیں معلوم کرنا۔

دیے ہوئے خطوطِ مستقیم اور کسی دائرہ لا^2 + ۲ لا ما جم سہ + ما^2 - ر^2 = ۰ کے نقاطِ تقاطع میں سے جہاں دائرہ کا مرکز اِن خطوں کا نقطہ تقاطع ہے متوازی خطوطِ مستقیم کے دو زوج کھینچے جا سکتے ہیں جن میں سے ہر زوج مطلوبہ ناصفوں میں سے ایک کے متوازی ہوگا۔

اب صریحًا ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + لہ (لا^2 + ۲ لا ما جم سہ + ما^2 - ر^2) = ۰، ...(۱)

خطوط اور دائرہ کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرتا ہے اور (۱) سے دو متوازی خطوطِ مستقیم تعبیر ہوتے ہیں جو

(ا + لہ) لا^2 + ۲ (ھ + لہ جم سہ) لا ما + (ب + لہ) ما^2 = ۰ ..... (۲)

سے تعبیر شدہ خطوطِ مستقیم کے متوازی ہیں بشرطیکہ (۲) کا دائیں جانبی رکن ایک کامل

مربع ہو جس کے لیے یہ شرط ہے کہ

(ا + لہ) (ب + لہ) − (ھ + لہ جم س)^2 = ۰ ...... (۳)

مزید برآں جب شرط (۳) پوری ہوتی ہے تو (۲) سے تعبیر شدہ منطبق خطوط کا (۹۹) زوج

{(ا + لہ) لا + (ھ + لہ جم س) ما}^{2} = ۰

یا {(ھ + لہ جم س) لا + (ب + لہ) ما}^{2} = ۰

سے حاصل ہوتا ہے۔

پس مطلوبہ ناصفوں میں سے ایک۔

ا لا + ھ ما + لہ (لا + ما جم س) = ۰

یا ھ لا + ب ما + لہ (ما + لا جم س) = ۰

سے حاصل ہوتا ہے جہاں لہ، دو درجی (۳) کی ایک اصل ہے۔

ان آخری دو مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنے سے ناصفوں کی مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے یعنے

(ا لا + ھ ما) (ما + لا جم س) − (ھ لا + ب ما) (لا + ما جم س) = ۰

یعنے لا^2 (ھ − ا جم س) − ما^2 (ھ − ب جم س) = (ا − ب) لا ما (دیکھو دفعہ ۳۹)

(۶) چار دائروں کے مرکز ا، ب، ج، د ہیں اور ان میں سے ہر دائرہ ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ ان کے مستوی میں کسی نقطہ سے اُن چار دائروں کے مماسوں کے مربع م$_1^2$، م$_2^2$، م$_3^2$، م$_4^2$ ہیں۔ ثابت کرو کہ

م$_1^2$ Δ ب ج د − م$_2^2$ Δ ج د ا + م$_3^2$ Δ د ا ب − م$_4^2$ Δ ا ب ج = ۰

اُس نقطہ کو جس سے مماس کھینچے گئے ہیں مبداء قرار دو اور فرض کرو کہ دائرہ

لا^2 + ما^2 − ۲ گ لا − ۲ ف ما + ج = ۰

دائروں

$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 2\text{گ}_1\,\text{لا} - 2\text{ف}_1\,\text{ما} + \text{م}_1^2 = 0$ ، وغیرہ

سے عمل القوائم منقطع ہوتا ہے۔

تب

$$\text{گ}\,\text{گ}_1 + \text{ف}\,\text{ف}_1 - \text{ج} - \text{م}_1^2 = 0,$$

$$\text{گ}\,\text{گ}_2 + \text{ف}\,\text{ف}_2 - \text{ج} - \text{م}_2^2 = 0,$$ وغیرہ

اس لیے

$$\begin{vmatrix} \text{گ}_1 & \text{ف}_1 & 1 & \text{م}_1^2 \\ \text{گ}_2 & \text{ف}_2 & 1 & \text{م}_2^2 \\ \text{گ}_3 & \text{ف}_3 & 1 & \text{م}_3^2 \\ \text{گ}_4 & \text{ف}_4 & 1 & \text{م}_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore\ \text{م}_1^2\,\Delta(\text{ب ج د}) - \text{م}_2^2\,\Delta(\text{ج د ا}) + \text{م}_3^2\,\Delta(\text{د ا ب}) - \text{م}_4^2\,\Delta(\text{ا ب ج}) = 0$$

کیونکہ ا نقطہ (گ$_1$، ف$_1$) ہے وغیرہ۔

(۷) اگر ایک دائرہ پر کوئی چار نقطے ا، ب، ج، د ہوں اور دائرہ کے مستوی میں و کوئی نقطہ ہو تو

$$\text{وا}^2 \times \Delta\,\text{ب ج د} - \text{وب}^2 \times \Delta\,\text{ج د ا} + \text{وج}^2 \times \Delta\,\text{د ا ب} - \text{ود}^2 \times \Delta\,\text{ا ب ج} = 0$$

بطلیموس کا مسئلہ اخذ کرو۔

و کو مبداء قرار دو اور فرض کرو کہ نقطہ ا کے محدد (لا$_1$، ما$_1$) ہیں وغیرہ۔

دائرہ ب ج د

$$\begin{vmatrix} \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 & \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 & \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3^2 + \text{ما}_3^2 & \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ \text{لا}_4^2 + \text{ما}_4^2 & \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(۱۰۰) ہے - اگر یہ دائرہ نقطہ (لا، ما) میں سے گذرے تو

$$\begin{vmatrix} و\, ا^۲ & لا_۱ & ما_۱ & ۱ \\ و\, ب^۲ & لا_۲ & ما_۲ & ۱ \\ و\, ج^۲ & لا_۳ & ما_۳ & ۱ \\ و\, د^۲ & لا_۴ & ما_۴ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

یعنی $و\,ا^۲ \times \Delta\, ب ج د - و\,ب^۲ \times \Delta\, ج د ا + و\,ج^۲ \times \Delta\, د ا ب$

$- و\,د^۲ \times \Delta\, ا ب ج = ۰$

و کے تمام مقامات کے لیے یہ درست ہے - اس لیے اگر دائرہ ا ب ج د کے مستوی میں کوئی چار نقطے ف، ق، ر، س ہوں تو

$ف\,ا^۲ \times \Delta_۱ - ف\,ب^۲ \times \Delta_۲ + ف\,ج^۲ \times \Delta_۳ - ف\,د^۲ \times \Delta_۴ = ۰،$

$ق\,ا^۲ \times \Delta_۱ - ق\,ب^۲ \times \Delta_۲ + ق\,ج^۲ \times \Delta_۳ - ق\,د^۲ \times \Delta_۴ = ۰،$ وغیرہ

پس $\Delta_۱$، $\Delta_۲$، $\Delta_۳$، $\Delta_۴$ کو ساقط کرنے پر

$$\begin{vmatrix} ف\,ا^۲ & ف\,ب^۲ & ف\,ج^۲ & ف\,د^۲ \\ ق\,ا^۲ & ق\,ب^۲ & ق\,ج^۲ & ق\,د^۲ \\ ر\,ا^۲ & ر\,ب^۲ & ر\,ج^۲ & ر\,د^۲ \\ س\,ا^۲ & س\,ب^۲ & س\,ج^۲ & س\,د^۲ \end{vmatrix} = ۰$$

جہاں ا، ب، ج، د ایک دائرہ پر ہیں اور ف، ق، ر، س دائرہ کے مستوی میں کوئی چار نقطے ہیں

اب فرض کرو کہ ف، ا پر منطبق ہوتا ہے، ق، ب پر منطبق ہوتا ہے، وغیرہ تو

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{اب}^2 & \text{اج}^2 & \text{اد}^2 \\ \text{با}^2 & 0 & \text{بج}^2 & \text{بد}^2 \\ \text{جا}^2 & \text{جب}^2 & 0 & \text{جد}^2 \\ \text{دا}^2 & \text{دب}^2 & \text{دج}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

یعنے $\text{اب} \times \text{جد} \pm \text{اج} \times \text{بد} \pm \text{اد} \times \text{بج} = 0$

اور یہ بطلیموس کا مسئلہ ہے۔

(۸) اگر دائروں ب ج د، ج د ا، د ا ب، ا ب ج کے مرکز و_1، و_2، و_3، و_4 اور نصف قطر ر_1، ر_2، ر_3، ر_4 ہوں جہاں ا، ب، ج، د ایک مستوی میں کوئی چار نقطے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{ا و}_1^2 - \text{ر}_1^2)^{-1} - (\text{ب و}_2^2 - \text{ر}_2^2)^{-1} + (\text{ج و}_3^2 - \text{ر}_3^2)^{-1}$$
$$- (\text{د و}_4^2 - \text{ر}_4^2)^{-1} = 0$$

دائرہ ب ج د

$$\begin{vmatrix} \text{لا}^2 + \text{ما}^2 & \text{لا} & \text{ما} & 1 \\ \text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 & \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3^2 + \text{ما}_3^2 & \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ \text{لا}_4^2 + \text{ما}_4^2 & \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ہے۔ اب

$$\text{ا و}_1^2 - \text{ر}_1^2 = \begin{vmatrix} \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 & \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 & \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3^2 + \text{ما}_3^2 & \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ \text{لا}_4^2 + \text{ما}_4^2 & \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix}$$

(۱۰۱) پس ج $(\text{۱}\,\text{و}^{\text{۲}}_{\text{۱}} - \text{ر}^{\text{۲}}_{\text{۱}})^{-\text{۱}} = \text{۰}$ بشرطیکہ

$$\begin{vmatrix} \text{لا}_{\text{۲}} & \text{ما}_{\text{۲}} & \text{۱} \\ \text{لا}_{\text{۳}} & \text{ما}_{\text{۳}} & \text{۱} \\ \text{لا}_{\text{۴}} & \text{ما}_{\text{۴}} & \text{۱} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{لا}_{\text{۱}} & \text{ما}_{\text{۱}} & \text{۱} \\ \text{لا}_{\text{۳}} & \text{ما}_{\text{۳}} & \text{۱} \\ \text{لا}_{\text{۴}} & \text{ما}_{\text{۴}} & \text{۱} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{لا}_{\text{۱}} & \text{ما}_{\text{۱}} & \text{۱} \\ \text{لا}_{\text{۲}} & \text{ما}_{\text{۲}} & \text{۱} \\ \text{لا}_{\text{۴}} & \text{ما}_{\text{۴}} & \text{۱} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \text{لا}_{\text{۱}} & \text{ما}_{\text{۱}} & \text{۱} \\ \text{لا}_{\text{۲}} & \text{ما}_{\text{۲}} & \text{۱} \\ \text{لا}_{\text{۳}} & \text{ما}_{\text{۳}} & \text{۱} \end{vmatrix} = \text{۰}$$

یعنے اگر

$$\begin{vmatrix} \text{۱} & \text{لا}_{\text{۱}} & \text{ما}_{\text{۱}} & \text{۱} \\ \text{۱} & \text{لا}_{\text{۲}} & \text{ما}_{\text{۲}} & \text{۱} \\ \text{۱} & \text{لا}_{\text{۳}} & \text{ما}_{\text{۳}} & \text{۱} \\ \text{۱} & \text{لا}_{\text{۴}} & \text{ما}_{\text{۴}} & \text{۱} \end{vmatrix} = \text{۰}$$

چوتھے باب پر مثالیں

۱ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے ایک ثابت خطِ مستقیم سے اس کا عمودی فاصلہ ثابت کرو کہ یہ نقطہ ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔

۲ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک مربع کے چار ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۳ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ثابت نقطوں سے اسکے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴ — ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں اور نقطہ ف اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ف ا = ن × ف ب - ثابت کرو کہ ف کا طریق ایک دائرہ ہے - نیز ثابت کرو کہ ن کی مختلف قیمتوں کے لیے جو دائرے حاصل ہوتے ہیں سب کے سب ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں -

۵ — ایک نقطہ کا طریق معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک متساوی الاضلاع مثلث کے قاعدے سے اس کے فاصلہ کا مربع اُس مستطیل کے مساوی ہوتا ہے جو مثلث کے دیگر ضلعوں سے اس کے فاصلوں سے بنتا ہے -

۶ — ثابت کرو کہ خطوط لا + ما = ۶ ، ۲ لا + ما = ۴ اور لا + ۲ ما = ۵ سے بننے والے مثلث کے حائط دائرہ کی مساوات

لا² + ما² - ۱۷ لا - ۱۹ ما + ۵۰ = ۰

ہے -

۷ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا قطر دائروں

لا² + ما² + ۲ لا + ۳ ما + ۱ = ۰ ، لا² + ما² + ۴ لا + ۳ ما + ۲ = ۰

کا مشترک وتر ہے -

۸ — اُن خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خط لا + ۲ ما - ۳ = ۰ اور (۱۰۲) دائرہ لا² + ما² - ۲ لا - ۲ ما = ۰ کے نقاطِ تقاطع کو مبدا ، سے ملاتے ہیں اور ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں -

۹ — ایک ثابت نقطہ و سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا گیا ہے جو ایک ثابت خطِ مستقیم سے نقطہ ف پر ملتا ہے - اگر خط پر ایک ایسا نقطہ ق لیا جائے کہ مستطیل وق × وف مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے -

۱۰ — ایک ثابت نقطہ و سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا گیا ہے جو ایک ثابت دائرہ سے ف پر ملتا ہے اور خط پر ایک ایسا نقطہ ق لیا گیا ہے کہ مستطیل وق × وف مستقل ہے - ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے -

۱۱ — چار خطوطِ مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب لا - ما - ۲ = ۰ ، ۲ لا - ما - ۳ = ۰ ، لا + ۴ ما - ۶ = ۰ اور لا + ۵ ما - ۸ = ۰ ہیں - ثابت کرو کہ اِس

ذواربعۃ الاضلاع کے تین وتروں کے سرے (۱، -۱) اور (-۲، ۲)، (۲، ۱) اور (۳، ۱)، اور ($\frac{۱۴}{۵}$، $\frac{۴}{۵}$) اور ($\frac{۲۳}{۱۱}$، $\frac{۱۳}{۱۱}$) ہیں۔ اِس سے ثابت کرو کہ وہ تین دائرے جن کے قطر یہ وتر ہیں ہم محور ہیں۔

[بنیادی محور ۲ لا + ما - ۱۱ = ۰ ہے۔]

۱۲ — ایک ذوار بعۃ الاضلاع کے ضلعوں کی مساواتیں علی الترتیب ما - ۱ = ۰، لا - ما + ۱ = ۰، لا + ۵ ما - ۱۱ = ۰، اور ۳ لا + ما - ۱۳ = ۰ ہیں۔ اُن دائروں کی مساواتیں معلوم کرو جو اِس ذوار بعۃ الاضلاع کے وتروں کو قطر مانکر کھینچے گئے ہوں اور ثابت کرو کہ یہ دائرے ہم محور ہیں۔

[بنیادی محور ۲ لا + ما - ۸ = ۰ ہے]

۱۳ — ثابت کرو کہ دو دیے ہوئے دائروں کی مساواتیں ہمیشہ شکل

لا^۲ + ما^۲ + د لا + ب = ۰، لا^۲ + ما^۲ + دَ لا + ب = ۰

میں لکھی جا سکتی ہیں اور یہ کہ ان میں سے ایک دائرہ دوسرے کے اندر ہوگا اگر د دَ اور ب دونوں مثبت ہوں۔

۱۴ — ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مرکز سے دو نقطوں کے فاصلے اُن فاصلوں کے متناسب ہوتے ہیں جو اِن نقطوں میں سے ہر ایک کے دوسرے کے قطبی سے ہیں۔

۱۵ — اگر دو دیے ہوئے دائروں کے مشابہت کے مرکزوں کو ملانیوالے خط پر اس کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اِس دائرہ پر کے کسی نقطہ سے دیے ہوئے دائروں کے مماس متناظر نصف قطروں کی نسبت میں ہوتے ہیں۔

۱۶ — ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو کہ اس سے دو ہم مرکز دائروں کے مماس اِن کے نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہوں۔ (۱۰۴۳)

۱۷ — ثابت کرو کہ دائروں لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا = ۰، اور لا^۲ + ما^۲ - ۲ لا = ۰ کے مشترک مماس ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

۱۸ — خط لا = ج دائرہ $لا^2 + ما^2 + ۲$ گ لا $- ب^2 = ۰$ کو نقطوں ف، فَ پر قطع کرتا ہے - ثابت کرو کہ اگر (۰، ب)، (۰، - ب) سے ف یا فَ پر کے مماس پر عمود کھینچے جائیں تو اِن عمودوں کا حاصلِ ضرب گ کی تمام قیمتوں کے لیے، $ج^2$ کے مساوی ہے -

۱۹ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک منتظم کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے - ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک دائرہ ہے -

۲۰ — ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور و میں سے گذرنے والے دو خطوطِ مستقیم کو جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں نقاط ف، ق پر قطع کرتا ہے اور خط ف ق ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے - دائرہ کے مرکز کے طریق کی مساوات معلوم کرو -

۲۱ — نقاط (ا، عہ) اور (ب، بہ) کو ملانے والے خط کو قطر مانکر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے - ثابت کرو کہ اِس دائرہ کی قطبی مساوات

$$ر^2 - ر \{ ا جم (طہ - عہ) + ب جم (طہ - بہ) \} + ا ب جم (عہ - بہ) = ۰$$

ہے -

۲۲ — اُس دائرہ اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع پر ر کی قیمتیں معلوم کرنیکے لیے مساوات معلوم کرو جن کی مساواتیں علی الترتیب

$$ر = ۲ ا جم طہ \quad اور \quad ر جم (طہ - بہ) = ع$$

ہیں - ع کی قیمت متعین کرو جبکہ خطِ مستقیم ایک مماس ہو جائے -

۲۳ — ایک مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں

$$۳ لا - ۴ ما = ۰، \; ۷ لا - ۲۴ ما = ۰، \; اور \; ۵ لا - ۱۲ ما - ۳۶ = ۰$$

ہیں - اس کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدد معلوم کرو -

۲۴ — ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کے قطبی بلحاظ دو دیے ہوئے دائروں کے ایک دوسرے کے ساتھ معلومہ زاویہ بنائیں -

(۱۰۴)

۲۵ — دو دائروں کے بنیادی محور پر کے کسی نقطہ سے اِن دائروں کے مماس کھینچے گئے ہیں اور وہ خطوط جو نقاطِ تماس کو دائروں کے مرکزوں سے ملاتے ہیں خارج کئے گئے ہیں تاکہ وہ ایک دوسرے سے ملیں۔ اِن کے نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۶ — اگر وہ چار نقطے جن میں دو دائرے

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{ما}+\text{ج}=0,\quad \text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{اَ}\,\text{لا}+\text{بَ}\,\text{ما}+\text{جَ}=0$$

خطوطِ مستقیم

$$\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{ما}+\text{ج}=0,\quad \text{اَ}\,\text{لا}+\text{بَ}\,\text{ما}+\text{جَ}=0$$

سے منقطع ہوتے ہیں ایک دوسرے دائرہ پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}-\text{اَ} & \text{ب}-\text{بَ} & \text{ج}-\text{جَ} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{اَ} & \text{بَ} & \text{جَ} \end{vmatrix}=0$$

۲۷ — دو ثابت نقطوں میں سے دائروں کا ایک نظام کھینچا گیا ہے اور ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی اِن دائروں کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ نقاطِ تماس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۸ — اگر تین ہم مرکز دائروں کے مرکز ا، ب، ج ہوں اور کسی نقطہ سے اِن کے مماس م$_1$، م$_2$، م$_3$ ہوں تو رشتہ

$$\text{ب}\,\text{ج}\,\text{م}_1^2+\text{ج}\,\text{ا}\,\text{م}_2^2+\text{ا}\,\text{ب}\,\text{م}_3^2=0$$

کو ثابت کرو۔

۲۹ — اگر کسی نقطہ سے تین دیے ہوئے دائروں کے مماس طول میں م$_1$، م$_2$، م$_3$ ہوں جہاں دائروں کے مرکز ایک ہی خطِ مستقیم میں نہیں ہیں تو ثابت کرو کہ کوئی دائرہ یا کوئی خطِ مستقیم شکل

$$\text{ا}\,\text{م}_1^2+\text{ب}\,\text{م}_2^2+\text{ج}\,\text{م}_3^2=\text{د}$$

ایک مساوات سے تعبیر کیا جا سکتا ہے ۔
خطوط مستقیم کے لیے ا، ب، ج کے درمیان کون سا رشتہ درست رہتا ہے ۔
۳۰ ـــ ایک دائرہ تین دیے ہوئے دائروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع
تا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے ۔

۳۱ ـــ خط $\frac{لا}{ھ} + \frac{ما}{ک} - ۱ = ۰$ کے قطبوں کا طریق جبکہ قطب اُن دائروں
کے لحاظ سے لیے گئے ہوں جو قائم محوروں کو مس کرتے ہیں مساواتوں

$$(ھ\,لا - ک\,ما)(ھ\,ما - ک\,لا) + ھ\,ک\,(ھ \pm ک)(لا \pm ما) = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے ۔
۳۲ ـــ ثابت کرو کہ وہ تمام دائرے جو دو ثابت دائروں کو مس کرتے
ہیں دو دوسرے ثابت دائروں میں سے ایک کے علی القوائم ہوتے ہیں ۔
۳۳ ـــ اگر دو دائرے علی القوائم متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے
مشترک قطر پر نقطوں کے جوڑوں کی لامتناہی تعداد معلوم کی جا سکتی ہے ایسے کہ
ان میں سے کسی ایک نقطہ کا قطبی بلحاظ ایک دائرہ کے وہی ہو جو دوسرے
نقطہ کا قطبی بلحاظ دوسرے دائرہ کے ہے ۔ نیز ثابت کرو کہ نقطوں کے کسی ایسے
زوج کا درمیانی فاصلہ دو دائروں کے نقاطِ تقاطع میں سے ایک پر قائمہ زاویہ
بناتا ہے ۔
۳۴ ـــ اگر دو دائروں کی مساواتیں جن کے نصف قطر ا، اَ ہیں س = ۰،
سَ = ۰ ہوں تو دائرے

$$\frac{س}{ا} \mp \frac{سَ}{اَ} = ۰$$

علی القوائم متقاطع ہوں گے ۔
۳۵ ـــ دو باہم علی القوائم خطوط مستقیم کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو
جن میں سے ہر ایک دو دائروں

$$(لا - ا)^۲ + ما^۲ = ب^۲ ،\quad (لا + ا)^۲ + ما^۲ = ج^۲$$

میں سے ایک کو مس کرے ۔ نیز ثابت کرو کہ ان خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویوں کے تاصف ہمیشہ دو دوسرے ثابت دائروں میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتے ہیں

۳۶ ۔ ایک مثلث کے راس علی الترتیب (۰، ۰)، (۴۸، ۲۰) اور (۶۳، ۰) ہیں ۔ ثابت کرو کہ نونقطی دائرہ کی مساوات

$$۲لا^۲ + ۲ما^۲ - ۱۵۹لا - ۵۶ما + ۳۰۲۴ = ۰$$

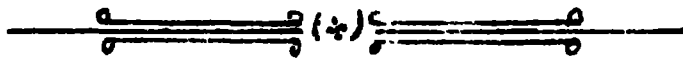
ہے اور اندرونی دائرہ کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ - ۹۰لا - ۱۸ما + ۲۰۲۵ = ۰$$

ہے ۔

ثابت کرو کہ یہ دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں ۔

(۱۰۶)

متفرق امثلہ (۱)

۱ — ثابت کرو کہ مبدا، اُس مثلث کے اندر ہے جس کے راس (۲، ۱)، (۳، ـ۲) اور (ـ۴، ـ۱) ہیں۔

۲ — ایک مربع کا ایک راس نقطہ (۳، ۴) پر ہے اور ایک وتر خط ۳ لا + ۴ ما = ۲۰ پر ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز $(\frac{۱۲}{۵}، \frac{۱۶}{۵})$ ہے اور وہ دو راس جو دیے ہوئے وتر پر ہیں $(\frac{۱۶}{۵}، \frac{۱۳}{۵})$ اور $(\frac{۸}{۵}، \frac{۱۹}{۵})$ ہیں۔

۳ — ایک دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو نقطہ (۰، ۰) میں سے گذرتا ہے اور خط لا = ج سے طول ۲ ل قطع کرتا ہے۔

جواب: ما^۲ + ۲ ج لا = ج^۲ + ل^۲

۴ — اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا نصف قطر ۳ ہے اور جو دائرہ لا^۲ + ما^۲ ـ ۴ لا ـ ۲ ما ـ ۱۲ = ۰ کو داخلاً نقطہ (ـ۱، ـ۱) پر مس کرتا ہے۔

جواب: ۵ لا^۲ + ۵ ما^۲ ـ ۸ لا ـ ۱۴ ما ـ ۳۲ = ۰

---

۵ — اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے ضلع اُن تین خطوں پر ہیں جنکی مساواتیں

لا ـ ما + ۱ = ۰، لا + ما ـ ۷ = ۰، اور لا ـ ۳ ما + ۴ = ۰

ہیں۔ جواب: $\frac{۲۵}{۸}$

۶ — اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو ۳ لا + ۲ ما + ۱ = ۰ اور لا + ما ـ ۳ = ۰ کے نقطہ تقاطع کو ۳ لا + ۲ ما ـ ۱ = ۰ اور لا + ما ـ ۵ = ۰ کے نقطہ

تقاطع سے ملاتا ہے۔ جواب: ۲لا + ما + ۴ = ۰

۷ ۔ ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا نصف قطر ۵ ہے اور جو دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} - ۲لا - ۴ما - ۲۰ = ۰ کو خارجاً نقطہ (۵، ۵) پر مس کرتا ہے۔

جواب: لا^{۲} + ما^{۲} - ۱۸لا - ۱۶ما + ۱۲۰ = ۰

۸ ۔ اُس مثلث کے حائط دائرہ اور اندرونی دائرہ کی مساواتیں معلوم کرو جو تین خطوں لا ما (۳لا + ۴ما - ۱۲) = ۰ سے بنتا ہے اور ثابت کرو کہ دائروں کا بنیادی محور ۲لا + ما + ۱ = ۰ ہے۔

---

۹ ۔ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو نقطہ (۳، ۴) میں سے گذرتے ہیں اور خط لا + ۴ما - ۱۰ = ۰ کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتے ہیں ۳لا - ۵ما + ۱۱ = ۰ اور ۵لا + ۳ما - ۲۷ = ۰ ہیں۔

(۱۰۷)

۱۰ ۔ اُن دو خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوط

۶لا^{۲} - لا ما - ما^{۲} + لا + ۱۲ما - ۳۵ = ۰

کے ساتھ ایک ایسا متوازی الاضلاع بنائیں جس کے وتر مبدا پر متقاطع ہوں۔

جواب: ۶لا^{۲} - لا ما - ما^{۲} - لا - ۱۲ما - ۳۵ = ۰

۱۱ ۔ اگر نقطہ (۰، ۰) سے دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ کے مماس و ف، و ق ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ و ف ق کی مساوات لا^{۲} + ما^{۲} + گ لا + ف ما = ۰ ہے۔

۱۲ ۔ اُن دو مماسوں کی مساوات معلوم کرو جو مبدا سے دائرہ

لا^{۲} + ما^{۲} + ۱۰ (لا + ما) + ۴۰ = ۰

کے کھینچے جا سکتے ہیں اور اِن کا درمیانی زاویہ معلوم کرو

جواب: مس$^{-۱}$ $\frac{۴}{۳}$

---

۱۳ ۔ اُس مستطیل کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جو خطوط

ا(لا - ۳) + ب ما = ۰، ا(لا - ۴) + ب ما = ۰،

ب لا ـ ا (ما ـ ۳) = ۰، اور ب لا ـ ا (ما ـ ۲) = ۰

سے بنتا ہے۔ جواب: (ا ـ ب) لا + (ا + ب) ما = ۲ ا،

(ا + ب) لا ـ (ا ـ ب) ما = ا

۱۴ ـــ ۳ لا ـ ما ـ ۲۰ = ۰ اور لا ـ ۲ ما ـ ۵ = ۰ کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرنے والے وہ خطوط معلوم کرو جو مبدا سے فاصلہ ۵ پر ہیں۔

جواب: ۳ لا + ۴ ما ـ ۲۵ = ۰، ۴ لا ـ ۳ ما ـ ۲۵ = ۰

۱۵ ـــ ثابت کرو کہ دو دائرے

لا^۲ + ما^۲ + ۲ ا لا + ج = ۰،

لا^۲ + ما^۲ + ۲ ب ما + ج = ۰

ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اگر $\frac{۱}{ا^۲} + \frac{۱}{ب^۲} = \frac{۱}{ج}$

۱۶ ـــ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا مرکزِ عمودی جس کے راس (ا جم عہ، ا جب عہ)، (ا جم بہ، ا جب بہ) اور (ا جم جہ، ا جب جہ) ہیں نقطہ (ا ∑ جم عہ، ا ∑ جب عہ) ہے۔

پس ثابت کرو کہ کسی مثلث کا مرکزِ ہندسی، حائط مرکز اور مرکزِ عمودی کو ملانے والے خط کو نسبت ۱ : ۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

۱۷ ـــ ایک مثلث کے ضلع ۴ ما + ۳ لا = ۰، ۱۲ ما ـ ۵ لا = ۰، اور ما ـ ۱۵ = ۰ ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے اندرونی دائرہ اور تین جانبی دائروں کے مرکز علی الترتیب (۱، ۸)، (ـ ۲۴، ۳) (۴۰، ـ ۵) اور (۱۵، ۱۲۰) ہیں۔ (۱۰۸)

۱۸ ـــ ثابت کرو کہ مساواتوں

۱۲ لا^۲ + ۷ لا ما ـ ۱۲ ما^۲ = ۰، ۱۲ لا^۲ + ۷ لا ما ـ ۱۲ ما^۲ ـ لا + ۷ ما ـ ۱ = ۰

سے تعبیر شدہ خطوطِ مستقیم ایک مربع کے ضلعوں پر ہیں۔

۱۹ ـــ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر نقطوں (ا م^۲، ۲ ا م)، ($\frac{ا}{م^۲}$، ـ $\frac{۲ا}{م}$) کو ملانے والا خطِ مستقیم ہے م کی تمام قیمتوں کے لیے لا + ا = ۰ کو مس کرتا ہے۔

۲۰ — ثابت کرو کہ چار نقطے (ا م$_۱$، $\frac{ا}{م_۱}$)، (ا م$_۲$، $\frac{ا}{م_۲}$)، (ا م$_۳$، $\frac{ا}{م_۳}$) اور (ا م$_۴$، $\frac{ا}{م_۴}$) ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اگر م$_۱$ م$_۲$ م$_۳$ م$_۴$ = ۱

---

۲۱ — ثابت کرو کہ مساوات

و ب لا^۲ + (و^۲ + ب^۲) لا ما + و ب ما^۲ + و ب (و - ب)(لا - ما) - و^۲ ب^۲ = ۰

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبداء سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔

۲۲ — اُس مستطیل کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے اضلاع مساواتوں

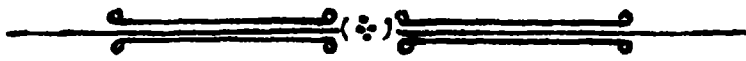
(۳ لا + ۴ ما)^۲ - ۴۹ = ۰ اور (۴ لا - ۳ ما)^۲ - ۳۶ = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۳ — ثابت کرو کہ دو دائروں لا^۲ + ما^۲ - ۲ ج ما - و^۲ = ۰ اور لا^۲ + ما^۲ - ۲ ب لا + و^۲ = ۰ کے نقاطِ تقاطع، اِن کے مرکز اور محددوں کا مبداء ایک دائرہ پر ہیں۔

۲۴ — لا^۲ + ما^۲ - ۴ لا - ۲ ما + ۴ = ۰ اور لا^۲ + ما^۲ + ۴ لا + ۲ ما - ۴ = ۰ کے مشترک مماس معلوم کرو۔

جواب: لا = ۱، ما = ۲، ۳ لا + ۴ ما = ۵ اور ۴ لا - ۳ ما - ۱۰ = ۰

(۱۰۹)

پانچواں باب

قطع مکافی

۸۹ - تعریفیں - مخروطی تراش یا مخروطی ایسے نقطہ کا طریق ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط مستقیم سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے - ثابت نقطہ کو ماسکہ، ثابت خط مستقیم کو مرتب اور مستقل نسبت کو خروج المرکز کہتے ہیں -

آئندہ یہ ثابت کیا جائے گا کہ اگر ایک قائم مستدیر مخروط کو کسی مستوی سے قطع کیا جائے تو تمام صورتوں میں ایک مخروطی تراش اوپر کی تعریف کی بموجب حاصل ہوگی - چنانچہ اولاً ان منحنیوں کے خواص کو مخروط کی تراشیں سمجھ کر ہی معلوم کیا گیا تھا -

اب ہم ان میں سے سادہ ترین منحنی کی مساوات معلوم کریں گے اور اس کے چند خواص پر بحث کریں گے - یہ منحنی وہ ہے جس میں خروج المرکز اکائی کے مساوی ہوتا ہے - اس کو قطع مکافی یا صرف مکافی کہتے ہیں -

۹۰ - مکافی کی مساوات معلوم کرنا -

فرض کرو کہ س ماسکہ اور ما مَا مرتب ہے۔ س و، ما مَا پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ و س = ۲ا فرض کرو کہ و س محور لا ہے اور و ما محور ما۔

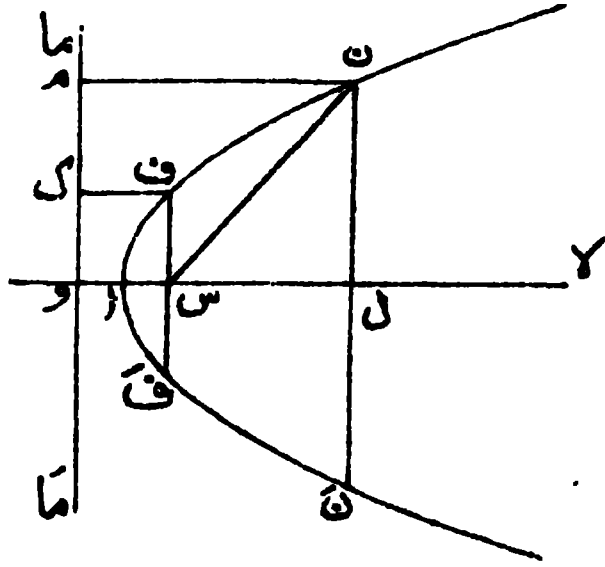
فرض کرو کہ منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدد (لا، ما) ہیں تو محوروں پر ن ل، ن م عمود کھینچو (حسب شکل) اور س ن کو ملاؤ۔

تب بموجب تعریف س ن = ن م

اس لیے ن م^2 = س ن^2 = ن ل^2 + س ل^2

یعنے لا^2 = ما^2 + (لا − ۲ا)^2

یا ما^2 = ۴ا (لا − ا) .... (۱)

یہ منحنی کی مطلوبہ مساوات ہے۔

منحنی محور لا کو ایک نقطہ ا پر قطع کرتا ہے جہاں ما = ۰ اور (۱) کی رو سے جبکہ ما = ۰ تو لا = ا یعنے و ا = ا۔

نقطہ ا کو مکافی کا راس کہتے ہیں۔

اگر ہم مبدا کو ا پر منتقل کریں اور محوروں کی سمتوں کو نہ بدلیں

تو مساوات (۱) ہو جائے گی (دفعہ ۴۹)

ما۲ = ۴ ا لا .... (۲)

ماسکہ نقطہ (ا، ۰) ہے اور مرتب خط

لا + ا = ۰

ہے ۔ نیز

س ن = م ن = و ا + ا ل = ا + لا

۹۱ — چونکہ مکافی کی مساوات ما۲ = ۴ ا لا ہے اور ما۲ ایک مثبت مقدار ہے اس لیے لا کو ہمیشہ مثبت ہونا چاہیے اور اس لیے منحنی کُل محور لا کی مثبت جانب واقع ہوگا۔ (۱۱)

لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے صریحاً ما کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں مساوی ہیں لیکن ایک مثبت ہے اور دوسری منفی ۔ اس لیے منحنی کے تمام وتر جو محور لا پر عمود ہوں اس سے تنصیف ہوتے ہیں اور منحنی کے وہ حصے جو محور ما کی مثبت اور منفی جانبوں پر ہیں ہر لحاظ سے مساوی ہیں۔

جب لا بڑھتا ہے تو ما بھی بڑھتا ہے اور لا اور ما کے بڑھنے پر کوئی حد نہیں ہے اس لیے محور لا کی مثبت جانب منحنی کی کوئی حد نہیں ہے۔

وہ خط جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور مرتب پر عمود ہے مکافی کا محور کہلاتا ہے ۔

وہ وتر جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور محور پر عمود ہے وتر خاص کہلاتا ہے

دفعہ ۹۰ کی شکل میں س ف = ک ف = و س = ۲ ا

اس لیے وتر خاص کا کُل طول ۴ ا ہے ۔

۹۲ — ہم معلوم کر چکے ہیں کہ مکافی پر تمام نقطوں کے لیے ما۲ - ۴ ا لا = ۰۔ منحنی کے اندر تمام نقطوں کے لیے ما۲ - ۴ ا لا منفی ہے۔ کیونکہ اگر ق کوئی ایسا نقطہ ہو اور ق میں سے محور کے عمود وار ایک خط کھینچا جائے جو منحنی سے نقطہ ف پر ملے اور محور سے نقطہ ل پر تو ق، ن کی نسبت محور سے قریب ہوگا اور اس لیے ل ق۲ > ل ن۲ ۔ لیکن ن منحنی پر ہے

اس لیے $ل ن^{۲} - ۴ ا \times ا ل = ۰$. اور اس لیے $ل ق^{۲} - ۴ ا \times ا ل$ منفی ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ منحنی کے باہر تمام نقطوں کے لیے $ما^{۲} - ۴ ا لا$ مثبت ہے۔

پس اگر ایک مکافی کی مساوات $ما^{۲} - ۴ ا لا = ۰$ ہو اور اگر ہم اس مساوات کی دائیں جانبی رکن میں کسی نقطہ کے محدد درج کریں تو نتیجہ مثبت ہوگا اگر نقطہ منحنی کے باہر ہے' منفی ہوگا اگر نقطہ منحنی کے اندر ہے' اور صفر ہوگا اگر نقطہ منحنی پر ہے۔

۹۳ — اُن نقطوں کے محدد جو خطِ مستقیم $ما = م لا + ج$ اور قطع مکافی $ما^{۲} = ۴ ا لا$ میں مشترک ہیں اِن دونوں مساواتوں کو پورا کرنے چاہئیں۔ (۱۱۲ ؛)

پس مشترک نقطہ پر رشتہ

$$(م لا + ج)^{۲} = ۴ ا لا \quad .... (۱)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے مشترک نقطوں کے فصلے مساوات (۱) سے حاصل ہوتے ہیں جس کو شکل

$$م^{۲} لا^{۲} + (۲ م ج - ۴ ا) لا + ج^{۲} = ۰ \quad .... (۲)$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اب چونکہ مساوات (۲) ایک دو درجی مساوات ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ہر خطِ مستقیم ایک مکافی سے دو نقطوں پر ملتا ہے جو حقیقی' منطبق' یا خیالی ہو سکتے ہیں۔

جب' م بہت چھوٹا ہو تو مساوات (۲) کی ایک اصل بہت بڑی ہوگی اور جب' م صفر کے مساوی ہو تو ایک اصل لا انتہا بڑی ہوگی۔ اس لیے ہر وہ خطِ مستقیم جو مکافی کے محور کے متوازی ہو مکافی سے ایسے دو نقطوں پر ملیگا جن میں سے ایک محدود فاصلہ پر ہوگا اور دوسرا اس سے لا متناہی فاصلہ پر

۹۴ — وہ شرط معلوم کرو کہ خط $ما = م لا + ج$ ' مکافی $ما^{۲} = ۴ ا لا$

کو مس کرے ۔

حسب دفعہ سابق اُن نقطوں کے فصلے جو خطِ مستقیم اور مکافی میں مشترک ہیں مساوات

(م لا + ج)^۲ = ۴ ا لا

یعنے م^۲ لا^۲ + (۲ م ج - ۴ ا) لا + ج^۲ = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں ۔

اگر خط مماس ہے یعنے اگر وہ مکافی کو دو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے تو مساوات کی جذریں ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہییں - اسکے لیے شرط ہے

۴ م^۲ ج^۲ = (۲ م ج - ۴ ا)^۲

جو م ج = ا یا ج = ا/م میں تحویل ہوتی ہے ۔

پس خواہ م کچھ بھی ہو خط

ما = م لا + ا/م

مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کو مس کرے گا ۔

مثال ۱ ـــ خط ما = لا + ۲ مکافی ما^۲ - ۸ لا = ۰ کو مس کرتا ہے ۔

مثال ۲ ـــ خط ما = ۳ لا + ۱/۲ مکافی ما^۲ - ۲ لا = ۰ کو مس کرتا ہے ۔

۹۵ ـــ اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو ایک مکافی پر کے دو دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرے نیز اِس کے کسی نقطہ پر مماس کی مساوات معلوم کرنا ۔ (۱۱۳)

فرض کرو کہ مکافی کی مساوات

ما^۲ = ۴ ا لا

ہے اور فرض کرو کہ اس پر دو نقطوں کے محدد (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) ہیں۔

مساوات (ما - ما۱)(ما - ما۲) = ما۲ - ۴ ا لا، .... (۱)

کو مختصر کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ وہ پہلے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے وہ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔ اگر اس میں لا = لا۱ اور ما = ما۱ درج کیا جائے تو دائیں جانبی رکن متماثلاً معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن اس وجہ سے معدوم ہوتا ہے کہ (لا۱، ما۱) مکافی پر ہے۔

اِس لیے نقطہ (لا۱، ما۱) خطِ مستقیم (۱) پر ہے اور اسی طرح نقطہ (لا۲، ما۲) بھی اِس خط پر ہے۔

پس مطلوبہ خط کی مساوات (۱) ہے اور یہ مساوات

ما (ما۱ + ما۲) - ۴ ا لا - ما۱ ما۲ = ۰، .... (۲)

میں تحویل ہوتی ہے۔

(لا۱، ما۱) پر مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۲) میں صرف ما۲ = ما۱ درج کرنا ہوگا چنانچہ مطلوبہ مساوات

۲ ما ما۱ - ۴ ا لا - ما۱^۲ = ۰

ہے یا چونکہ ما۱^۲ = ۴ ا لا۱ اس لیے

ما ما۱ = ۲ ا (لا + لا۱)، .... (۳)

دوسرا ثبوت:- (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) میں سے گذرنے والے خط کی مساوات [حسب دفعہ ۲۴]

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & ۱ \\ \text{لا}_۱ & \text{ما}_۱ & ۱ \\ \text{لا}_۲ & \text{ما}_۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

ہے اور اس لیے

$$\begin{vmatrix} ۴ا\,لا & ما & ۱ \\ ما_۱^۲ & ما_۱ & ۱ \\ ما_۲^۲ & ما_۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

اس آخری مقطع کو پھیلاؤ اور $ما_۲ - ما_۱$ سے تقسیم کرو، تب حسب سابق وتر کی مساوات

$$ما\,(ما_۱ + ما_۲) - ۴ا\,لا - ما_۱\,ما_۲ = ۰$$

حاصل ہوگی۔

نتیجہ صریح :- نقطہ (۰، ۰) پر مماس لا = ۰ ہے یعنی راس پر کا مماس محور کے عمود وار ہوتا ہے۔

۹۶ — ہم نے دو مختلف طریقوں (دفعات ۹۴ اور ۹۵) سے مکافی کے مماس کی مساوات کی دو شکلیں حاصل کی ہیں۔ ان میں سے کسی ایک شکل کو دوسری سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ فرض کرو کہ ہم جانتے ہیں کہ (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات (۱۱۴)

$$ما\,ماَ = ۲ا\,(لا + لاَ)$$

ہے۔ تب

$$ما = \frac{۲ا}{ماَ}\,لا + \frac{۲ا\,لاَ}{ماَ}$$

اگر یہ وہی خط ہو جو مساوات

$$ما = م\,لا + ج$$

سے حاصل ہوتا ہے تو

$$م = \frac{۲ا}{ماَ} \quad \text{اور} \quad ج = \frac{۲ا\,لاَ}{ماَ}$$

اس لیے $م\,ج = ا$، جیسا کہ دفعہ ۹۴ میں حاصل ہوا تھا۔

سوالات کے حل کرنے میں مماس کی مساوات کی وہ شکل لینی چاہیے جو سہولت بخش معلوم ہو۔

مثال ۱ — ایک مکافی کے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا معین اِن مماسوں کے نقاطِ تماس کے معینوں کا اوسط حسابی ہوتا ہے ۔

نقاط $(\text{لا}_{\text{۱}}،\ \text{ما}_{\text{۱}})$ اور $(\text{لا}_{\text{۲}}،\ \text{ما}_{\text{۲}})$ پر مماسوں کی مساواتیں

$$\text{ما}\,\text{ما}_{\text{۱}} = \text{۲}\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لا}_{\text{۱}})$$

$$\text{ما}\,\text{ما}_{\text{۲}} = \text{۲}\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لا}_{\text{۲}})$$

تفریق سے اِن کے مشترک نقطہ کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}\,(\text{ما}_{\text{۱}} - \text{ما}_{\text{۲}}) = \text{۲}\,\text{ا}\,\text{لا}_{\text{۱}} - \text{۲}\,\text{ا}\,\text{لا}_{\text{۲}}$$

$$= \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,(\text{ما}_{\text{۱}}^{\text{۲}} - \text{ما}_{\text{۲}}^{\text{۲}})$$

$$\therefore\quad \text{ما} = \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,(\text{ما}_{\text{۱}} + \text{ما}_{\text{۲}})$$

تب معلوم ہوگا کہ $\quad \text{۴}\,\text{ا}\,\text{لا} = \text{ما}_{\text{۱}}\,\text{ما}_{\text{۲}}$

مثال ۲ — ایک مکافی کے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو جبکہ مماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں ۔

فرض کرو کہ دو مماسوں کی مساواتیں

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}}\,،\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{۱})$$

$$\text{ما} = \text{مَ}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{مَ}}\,،\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{۲})$$

ہیں ۔ یہ مماس چونکہ علی القوائم ہیں اس لیے م مَ = ـ۱ ۔ پس دوسری مساوات لکھی جا سکتی ہے

$$\text{ما} = -\frac{\text{۱}}{\text{م}}\,\text{لا} - \text{ا}\,\text{م}\,،\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{۳})$$

اِن کا مشترک نقطہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں صرف (۳) کو (۱) میں سے تفریق کرنا ہوگا چنانچہ (۱۱۵)

$$\text{۰} = \text{لا}\,(\text{م} + \frac{\text{۱}}{\text{م}}) + \text{ا}\,(\text{م} + \frac{\text{۱}}{\text{م}})$$

اور اس لیے $\text{لا} + \text{ا} = \text{۰}$

پس مطلوبہ طریق کی مساوات $\text{لا} + \text{ا} = \text{۰}$ ہے اور یہ (بموجب دفعہ ۹۰) مرتب کی مساوات ہے۔

۹۷ ــ ایک مکافی کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔

مکافی $\text{ما}^{\text{۲}} - \text{۴}\,\text{ا}\,\text{لا} = \text{۰}$ کے نقطہ $(\text{لا}_{\text{۱}}،\ \text{ما}_{\text{۱}})$ پر مماس کی مساوات (دفعہ ۹۵)

$$\text{ما}\,\text{ما}_{\text{۱}} = \text{۲}\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لا}_{\text{۱}})، \qquad \text{(۱)}$$

ہے ۔

عماد وہ خط ہے جو $(\text{لا}_{\text{۱}}،\ \text{ما}_{\text{۱}})$ میں سے گذرتا ہے اور مماس پر عمود ہے۔ اس لیے اس کی مساوات (دفعہ ۳۰)

$$(\text{ما} - \text{ما}_{\text{۱}})\,\text{۲}\,\text{ا} + \text{ما}_{\text{۱}}\,(\text{لا} - \text{لا}_{\text{۱}}) = \text{۰}، \qquad \text{(۲)}$$

ہے ۔

چونکہ $\text{۴}\,\text{ا}\,\text{لا}_{\text{۱}} = \text{ما}_{\text{۱}}^{\text{۲}}$ اس لیے اوپر کی مساوات کو شکل

$$\text{۸}\,\text{ا}^{\text{۲}}\,(\text{ما} - \text{ما}_{\text{۱}}) + \text{ما}_{\text{۱}}\,(\text{۴}\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{ما}_{\text{۱}}^{\text{۲}}) = \text{۰}، \qquad \text{(۳)}$$

میں لکھا جا سکتا ہے ۔ اس کو لکھ سکتے ہیں

$$\text{ما} = -\frac{\text{ما}_{\text{۱}}}{\text{۲}\,\text{ا}}\,\text{لا} + \text{ما}_{\text{۱}} + \frac{\text{ما}_{\text{۱}}^{\text{۳}}}{\text{۸}\,\text{ا}^{\text{۲}}}، \qquad \text{(۴)}$$

اگر ہم $\text{م} = -\dfrac{\text{ما}_{\text{۱}}}{\text{۲}\,\text{ا}}$ رکھیں تو $\text{ما}_{\text{۱}} = -\text{۲}\,\text{ا}\,\text{م}$ اور $\dfrac{\text{ما}_{\text{۱}}^{\text{۳}}}{\text{۸}\,\text{ا}^{\text{۲}}} = -\text{ا}\,\text{م}^{\text{۳}}$

اس لیے مساوات (۴) ہو جاتی ہے

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} - \text{۲}\,\text{ا}\,\text{م} - \text{ا}\,\text{م}^{\text{۳}}، \qquad \text{(۵)}$$

عماد کی مساوات کی یہ شکل بعض اوقات مفید ہوتی ہے ۔

۹۸ ــ اب ہم مکافی کے چند ہندسی خواص ثابت کریں گے ۔

فرض کرو کہ نقطہ ن پر کا مماس مرتب سے ر پر اور محور سے ت پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ ن سے محور پر اور مرتب پر عمود ن ل اور ن م ہیں۔ فرض کرو کہ ن پر کا عماد ن گ، محور سے گ پر ملتا ہے۔

(۱۱۶) تب اگر ن کے محدد لا، ما ہوں تو ن پر کے مماس کی مساوات

$$ما ما_۱ = ۲ لا (لا + لا_۱) \quad \ldots\ldots (۱) \quad [دفعہ ۹۵]$$

ہوگی۔

یہ مماس محور سے جہاں ملتا ہے وہاں ما = ۰ اور اس نقطہ پر (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$لا + لا_۱ = ۰$$

$$\therefore \quad ت ا = ا ل، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (عہ)$$

$$\therefore \quad ت س = ا س + ا ل = س ن، \quad \ldots\ldots (بہ)$$

اور چونکہ ت س = س ف اس لیے زاویہ س ت ن، زاویہ س ن ت کے مساوی ہے اس لیے ن ت، زاویہ س ن م کی تنصیف کرتا ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ مثلثات ر س ن اور ر م ن ہر لحاظ سے

مساوی ہیں۔

اس لیے زاویہ ر س ن = زاویہ ر م ن = ایک زاویہ قائمہ ۔ (ضہ)

پھر چونکہ م نقطہ (۔ ا، ما) ہے اور س نقطہ (ا، ۰) ہے اسلیے خط س م کی مساوات

$$\frac{ما - ما_۱}{-ما_۱} = \frac{لا + ا}{۲ا}، \quad ....(۲)$$

ہے۔ یہ صریحاً نقطہ ن پر کے مماس پر جو مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے عمود ہے

∴ س م، ن ت پر عمود ہے، ....(ضہ)

(۱۱۷) چونکہ س م، ن ت پر عمود ہے اور ن ت زاویہ س ن م کی تنصیف کرتا ہے اس لیے وہ س م کی تنصیف کرے گا۔ پس اگر س م اور ن ت کا نقطہ تقاطع ے ہو تو س ے = ے م۔ لیکن س ا = ا و۔ اس لیے ا و، و م کے متوازی ہے اور اس لیے وہ مکافی کے راس پر مماس ہے۔ پس وہ خط جو مکافی کے ماسکہ میں سے گذرے اور کسی مماس ن ت پر عمود ہو اس مماس سے راس پر کے مماس پر ملتا ہے۔

ہم اس آخری مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر ثابت کر سکتے ہیں:۔
فرض کرو کہ مکافی کے کسی مماس کی مساوات

$$ما = م لا + \frac{ا}{م}، \quad ....(۳)$$

ہے۔ اُس خط کی مساوات جو ماسکہ (ا، ۰) میں سے گذرے اور (۳) پر عمود ہو

$$ما = -\frac{۱}{م}(لا - ا)$$

یا

$$ما = -\frac{لا}{م} + \frac{ا}{م}، \quad ....(۴)$$

ہے ۔

خطوط (۳) اور (۴) سرِ گیا وہاں ملتے ہیں جہاں لا = ۰
نقطہ ن (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات

۲ ا (ما - ما) + ما (لا - لا) = ۰

ہے [دفعہ ۹] ۔
نقطہ گ پر ما = ۰ اور اس لیے

- ۲ ا ما + ما (لا - لا) = ۰

یا ۲ ا = لا - لا = اگ - ال = ل گ

∴ ل گ = ۲ ا ، .... (۵)

مثالیں

۱۔ مکافی $ما^2$ - ۴ ا لا = ۰ کے وتر خاص کے سروں پر کے مماسوں کی اور عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو ۔ جواب: لا ∓ ما + ا = ۰،

ما ± لا ∓ ۳ ا = ۰

۲۔ وہ نقطے معلوم کرو جہاں خط ما = ۳ لا - ا، مکافی $ما^2$ - ۴ ا لا = ۰ کو قطع کرتا ہے ۔ جواب: (ا، ۲ ا)، ($\frac{ا}{۹}$، - $\frac{۲}{۳}$ ا)

۳۔ ثابت کرو کہ مکافی $ما^2$ - ۴ ا لا = ۰ کے نقطہ (لا، ما) پر کا مماس مکافی کے نقطہ ($\frac{ا^2}{لا}$، $\frac{-۴ ا^2}{ما}$) پر کے مماس پر عمود ہے ۔ (۱۱۸)

۴۔ ثابت کرو کہ خط ما = ۲ لا + $\frac{ا}{۲}$، مکافی $ما^2$ - ۴ ا لا = ۰ کو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے ۔
ثابت کرو کہ وہ ۲۰ $لا^2$ + ۲۰ $ما^2$ = $ا^2$ کو بھی منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے ۔

۵ — ایک خطِ مستقیم، لا^{۲} + ما^{۲} = ۲و^{۲} اور ما^{۲} = ۸و لا دونوں کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی مساوات ما = ± (لا + ۲و) ہے۔

۶ — ثابت کرو کہ خط ۷ لا + ۶ ما = ۱۳، منحنی

ما^{۲} − ۷ لا − ۸ ما + ۱۴ = ۰

کو مس کرتا ہے۔

۷ — ثابت کرو کہ مساوات لا^{۲} + ۴و لا + ۲و ما = ۰، ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا راس نقطہ (−۲و، ۲و) پر ہے اور جس کا وتر خاص ۲و ہے اور جس کا محور محور ما کے متوازی ہے۔

۸ — ثابت کرو کہ وہ تمام مکافی جن کے محور محور ما کے متوازی ہیں شکل

لا^{۲} + ۲و لا + ۲ب ما + ج = ۰

کی مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۹ — حسب ذیل مکافیوں میں سے ہر ایک کے راس کے محدد اور وتر خاص کا طول معلوم کرو۔

(۱) ما^{۲} = ۵لا + ۱۰، (۲) لا^{۲} − ۴لا + ۲ما = ۰،

(۳) (ما − ۲)^{۲} = ۵(لا + ۴)، (۴) ۳لا^{۲} + ۱۲لا − ۸ما = ۰۔

جواب: (۱) (−۲، ۰)، ۵ (۲) (۲، ۲)، ۲

(۳) (−۴، ۲)، ۲ (۴) (−۲، −$\frac{۳}{۲}$)، $\frac{۸}{۳}$

۱۰ — مثال ۹ کے مکافیوں میں سے ہر ایک کے ماسکہ کے محدد اور مرتب کی مساوات معلوم کرو۔

جواب (۱) (−$\frac{۳}{۴}$، ۰)، ۴لا + ۱۳ = ۰،

(۲) (۲، $\frac{۳}{۲}$)، ۲لا − ۵ = ۰،

(۳) (−$\frac{۱۱}{۴}$، ۲)، ۴لا + ۲۱ = ۰،

(۴) (−۲، −$\frac{۵}{۶}$)، ۶ما + ۱۳ = ۰۔

۱۱ — اُس مکافی کی مساوات لکھو جس کا ماسکہ مبدا پر ہے اور جس کا مرتب خط ۲لا − ما − ۱ = ۰ ہے۔ ثابت کرو کہ خط ۲ما = ۴لا − ۱، اِس مکافی کو مس کرتا ہے۔

۱۲ ـــ اگر ایک مکافی کے محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے کوئی وتر ن و نَ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ن اور نَ پر کے معینوں کا مستطیل، رقبہ میں مستقل ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ فصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہوگا۔

۱۳ ـــ مماسوں $ما = م لا + \frac{ا}{م}$ اور $ما = \frac{لا}{مَ} + \frac{ا}{مَ}$ کے نقطۂ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جبکہ م مَ مستقل ہو۔ نیز ثابت کرو کہ اگر م مَ + ۱ = ۰ تو یہ خطِ مرتب ہے۔

۱۴ ـــ ثابت کرو کہ م کی تمام قیمتوں کے لیے خط $ما = م (لا + ا) + \frac{ا}{م}$، مکافی $ما^2 = ۴ ا (لا + ا)$ کو مس کرے گا۔ (۱۱۹)

۱۵ ـــ دو خطوطِ مستقیم باہم علی القوائم ہیں اور ان میں سے ایک، مکافی $ما^2 = ۴ ا (لا + ا)$ کو مس کرتا ہے اور دوسرا، $ما^2 = ۴ اَ (لا + اَ)$ کو۔ ثابت کرو کہ خطوطِ مستقیم کا نقطۂ تقاطع خط $لا + ا + اَ = ۰$ پر ہوگا۔

۱۶ ـــ اگر ایک مکافی کے کسی مماس پر محور پر کے دو نقطوں سے جو ماسکہ سے مساوی فاصلوں پر ہوں عمود کھینچے جائیں تو ان کے مربعوں کا فرق مستقل ہوگا۔

۱۷ ـــ دو خطوطِ مستقیم ا ف اور ا ق کو ایک مکافی کے راس میں سے ایک دوسرے کے علی القوائم کھینچا گیا ہے اور یہ خطوط منحنی سے نقطوں ف اور ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط ف ق محور کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

۱۸ ـــ اگر دائرہ $لا^2 + ما^2 + ا لا + ب ما + ج = ۰$، مکافی $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کو چار نقطوں پر قطع کرے تو ان نقطوں کے معینوں کا جبری مجموعہ صفر ہوگا۔

[۱۶ $ا^2$ سے ضرب دو اور ۴ ا لا کی بجائے $ما^2$ درج کرو۔ تب معین مساوات

$$ما^4 + ۱۶ اَ ما^2 + ۴ ا (ما^2 + ۱۶ اَ ب ما + ۱۶ اَ^2 ج = ۰$$

سے حاصل ہوں گے۔ ان چار معینوں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ مساوات میں $ما^3$ کی رقم نہیں ہے]

۱۹ ـــ اگر مکافی $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کا مماس محور سے ت پر اور ا پر کے

مماس سے ما پر ملے اور مستطیل ت ا ما ق کی تکمیل کیجائے تو ثابت کرو کہ ق کا طریق مکافی $ما^2 + ا\,لا = ۰$ ہے -

۲۰ — اگر ایک مکافی پر تین نقطے ف' ق' ر ہوں جن کے محدد سلسلہ ہندسیہ میں ہیں تو ثابت کرو کہ ف' ر پر کے مماس' ق کے معین پر ملینگے۔

۲۱ — ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو مکافی $ما^2 - ۴\,ا\,لا = ۰$ میں بنایا گیا ہو

$$\frac{۱}{۸ا}\,(ما_۱ - ما_۲)(ما_۲ - ما_۳)(ما_۳ - ما_۱)$$

ہے جہاں $ما_۱$' $ما_۲$' $ما_۳$ راسوں کے معین ہیں۔

۹۹ — کسی نقطہ سے ایک مکافی پر دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں جو حقیقی' منطبق' یا خیالی ہونگے بموجب اس کے کہ نقطہ' مکافی کے باہر' اس کے اوپر' یا اس کے اندر ہو —

وہ خط جس کی مساوات

$$ما = م\,لا + \frac{ا}{م}\text{ ،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے مکافی $ما^2 = ۴\,ا\,لا$ کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ بھی ہو (دفعہ ۹۴)۔

(۱۲۰) خط (۱) مخصوص نقطہ ($لاَ$ ' $ماَ$) میں سے گذرے گا اگر

$$ماَ = م\,لاَ + \frac{ا}{م}$$

یعنے اگر

$$م^2\,لاَ - م\,ماَ + ا = ۰\text{ ،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۲) ایک دو درجی مساوات ہے اور اس سے مکافی کے اُن مماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ ($لاَ$ ' $ماَ$) میں سے گذرتے ہیں — لیکن چونکہ کسی دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے

کسی نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے دو مماس گذریں گے۔

(۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں گی بموجب اس کے کہ ماَ² - ۴ ا لاَ مثبت، صفر، یا منفی ہو۔ یعنے [دفعہ ۹۲] بموجب اسکے کہ (لاَ، ماَ)، مکافی کے باہر، مکافی کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

۱۰۰ ـــ اُس خط کی مساوات معلوم کرنا جو اُن دو مماسوں کے نقاطِ تماس میں سے گذرے جو کسی نقطہ سے ایک مکافی پر کھینچے جا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ (لاَ، ماَ) اُس نقطہ کے محدد ہیں جس سے مماس کھینچے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ مماسوں کے نقاطِ تماس کے محدد (ھ، ک) اور (ھَ، کَ) ہیں۔

(ھ، ک) اور (ھَ، کَ) پر کے مماسوں کی مساواتیں

ما ک = ۲ ا (لا + ھ)،

ما کَ = ۲ ا (لا + ھَ)

ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ (لاَ، ماَ) اِن دو خطوں پر ہے۔

∴ ماَ ک = ۲ ا (لاَ + ھ)، .... (۱)

ماَ کَ = ۲ ا (لاَ + ھَ)، .... (۲)

لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) وہ شرطیں ہیں کہ نقاط (ھ، ک) اور (ھَ، کَ) اُس خطِ مستقیم پر واقع ہوں جس کی مساوات

ماَ ما = ۲ ا (لاَ + لا)، .... (۳)

ہے۔

پس (۳) اُس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو نقطہ (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاطِ تماس میں سے گذرتا ہے۔

اگر کسی نقطہ ن سے ایک مکافی کے مماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاطِ تماس کو ملانے والے خط کو ہم مکافی کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی کہینگے۔

[دفعہ ۹۰ دیکھو]۔

۱۰۱ — اگر ایک مکافی کے لحاظ سے نقطہ ف کا قطبی، نقطہ ق میں سے گذرے تو نقطہ ق کا قطبی، ف میں سے گذرے گا۔

فرض کرو کہ ف کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں اور ق کے (لاً، ماً)۔

مکافی ما² - ۴ا لا = ۰ کے لحاظ سے نقطہ ف کے قطبی کی مساوات

$$\text{ما}\,\text{ماَ} = 2\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لاَ})$$

ہے۔ اگر یہ خط نقطہ (لاً، ماً) میں سے گذرتا ہے تو حاصل ہونا چاہیے

$$\text{ماً}\,\text{ماَ} = 2\text{ا}\,(\text{لاً} + \text{لاَ})$$

اس نتیجہ کے تشاکل سے ظاہر ہے کہ یہ وہ شرط بھی ہے کہ ق کا قطبی ف میں سے گذرے۔

ٹھیک اسی طریقہ پر جو دفعہ ۸۰ میں اختیار کیا گیا ہے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر دو نقطوں ف اور ق کے قطبی نقطہ ر پر ملیں تو ر، خط ف ق کا قطب ہوگا۔

ماسکہ (ا، ۰) کا قطبی لا + ا = ۰ ہے اور اس لیے ماسکہ کا قطبی مرتب ہے۔

اگر مرتب پر کوئی نقطہ ق ہو تو ق، ماسکہ س کے قطبی پر ہوگا اور اس لیے ق کا قطبی، س میں سے گذرے گا۔ پس مرتب پر کے کسی نقطہ سے ایک مکافی کے مماس کھینچے جائیں تو نقاطِ تماس کو ملانے والا خط ماسکہ میں سے گذرے گا۔

۱۰۲ — مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہوتا ہے جو مکافی کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

مکافی $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ پر کے دو نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) کو ملانیوالے خط کی مساوات [دفعہ ۹۵ (۴)]

$$ما (ما_1 + ما_2) - ۴ ا لا - ما_1 ما_2 = ۰، \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے۔ اب اگر خط (۱) مکافی کے محور کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو

$$مس\ طہ = \frac{۴ ا}{ما_1 + ما_2}، \quad \ldots\ldots (۲)$$

لیکن اگر اس وتر کے وسطی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو

$$۲ لا = لا_1 + لا_2، \quad ۲ ما = ما_1 + ما_2$$

(۱۲۲) اس لیے (۲) سے $مس\ طہ = \frac{۴ ا}{۲ ما}$

یا

$$ما = ۲ ا\ مم\ طہ، \quad \ldots\ldots (۳)$$

اس لیے ما مستقل ہے تا آنکہ طہ مستقل ہو۔

پس مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق، مکافی کے محور کے متوازی ایک خط مستقیم ہے۔

دوسرا ثبوت: خط $ما = م لا + ج$، مکافی $ما^2 = ۴ ا لا$ کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں $۴ ا ما = م ما^2 + ۴ ا ج$ اس لیے اگر وتر کے نقطہ وسطی کا معین ما ہو تو ج کی تمام قیمتوں کے لیے $ما = \frac{۲ ا}{م}$

تعریف - کسی مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کے طریق کو مخروطی کا قطر کہتے ہیں اور قطر جن وتروں کی تنصیف کرتا ہے اُن کو قطر کے معین کہتے ہیں۔

ہم دفعہ ۹۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ مکافی کا کوئی قطر، اس سے صرف ایک

نقطے پر ملتا ہے جن کا فاصلہ راس سے محدود ہوتا ہے۔ وہ نقطہ جہاں قطر منحنی کو قطع کرتا ہے قطر کا سرا کہلاتا ہے۔

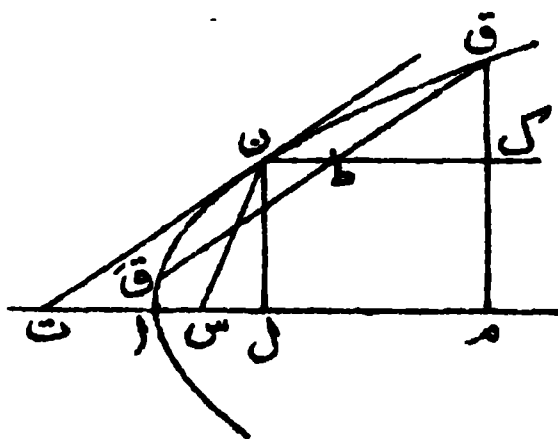
۱۰۳ ـــ ایک قطر کے سرے پر کا مماس اُن وتروں کے متوازی ہوتا ہے جنکی وہ تنصیف کرتا ہے۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطے سب کے سب ایک قطر پر واقع ہوتے ہیں۔ پس متوازی مماس یعنے اُس متوازی وتر پر غور کرنے سے جو منحنی کو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ متوازی وتروں کے نظام کا قطر اُس مماس کے نقطۂ تماس میں سے گذرتا ہے جو وتروں کے متوازی ہے۔

۱۰۴ ـــ مکافی کی مساوات معلوم کرنا جبکہ کسی قطر اور اس کے سرے پر کے مماس کو محور قرار دیا جائے۔

فرض کرو کہ قطر کا سرا ن ہے اور فرض کرو کہ ن پر کا مماس محور کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ تب

ل ن = ۲ اک مم طہ [دفعہ ۱۰۲(۳)]

$$\therefore \text{ ال} = \frac{\text{ن ل}^2}{4\text{ا}} = \text{ا مم}^2 \text{ طہ}$$

فرض کرو کہ نئے محوروں کے حوالے سے ق کے محدد (لا، ما) ہیں۔ ق مہ کو مکافی کے محور پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ وہ قطر ن ط کو ک پہ قطع کرتا ہے۔

تب مہ ق = ل ن + ک ق = ۲ ا مم طہ + ماجب طہ، . . . (۱)

ا مہ = ا ل + ل مہ = ا ل + ن ط + ط ک

= ا مم^2 طہ + لا + ماجم طہ، . . . . (۲)

لیکن

ق مہ^2 = ۴ ا × ا مہ

اس لیے (۱) اور (۲) سے

(۲ ا مم طہ + ماجب طہ)^2 = ۴ ا (ا مم^2 طہ + لا + ماجم طہ)

یا ما^2 جب^2 طہ = ۴ ا لا، . . . . (۳)

لیکن ال = ا مم^2 طہ، اس لیے س ن = ا + ال = $\frac{\text{ا}}{\text{جب}^2 \text{ طہ}}$

اس لیے س ن کی بجائے اَ یا $\frac{\text{ا}}{\text{جب}^2 \text{ طہ}}$ رکھنے سے منحنی کی مساوات

ما^2 = ۴ اَ لا، . . . . (۴)

ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ محوروں کو خواہ کسی طرح تبدیل کیا جائے مساوات ما^2 ـ ۴ ا لا = ۰ کی شکل

(ل لا + م ما + ن)^2 + لَ لا + مَ ما + نَ = ۰

ہوگی (دیکھو تیسرا باب) اور اس لیے کسی مکافی کی مساوات میں جو خواہ کسی محوروں کے حوالے سے ہو دوسرے درجہ کی رقمیں ایک کامل مربع بناتی ہیں۔

اس کے بالعکس شکل

(ل لا + م ما + ن)۲ + (لَ لا + مَ ما + نَ) = ۰

کی کوئی مساوات جس میں دوسرے درجہ کی رقمیں ایک کامل مربع بناتی ہیں ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے ۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی کے کسی نقطہ سے خط ل لا + م ما + ن = ۰ پر کا عمود ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو اسی نقطہ سے لَ لا + مَ ما + نَ = ۰ پر کھینچا گیا ہو اور اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ان خطوں کو لا اور ما کے نئے محور قرار دیا جائے تو منحنی کی مساوات کی شکل ما۲ = ۴ ا لا ہو جاتی ہے ۔

اس طرح مساوات (ل لا + م ما + ن)۲ + لَ لا + مَ ما + نَ = ۰ ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ایک قطر ل لا + م ما + ن = ۰ ہے اور اس کے سرے پر کا مماس لَ لا + مَ ما + نَ = ۰ ہے ۔

۱۰۵ ۔ اگر ایک مکافی کی مساوات کسی قطر اور اس مماس کے حوالے سے جو قطر کے سرے پر کھینچا گیا ہو ما۲ = ۴ ا لا ہو تو خط ما = م لا + ا/م ، م کی تمام قیمتوں کے لیے اس کا ایک مماس ہوگا ، کسی نقطہ (لَ ، مَ) پر کے مماس کی مساوات ما مَ ۔ ۲ ا (لا + لَ) = ۰ ہوگی ، مکافی کے لحاظ سے نقطہ (لَ ، مَ) کے قطبی کی مساوات ما مَ ۔ ۲ ا (لا + لَ) = ۰ ہوگی ، اور خط ما = م لا کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ما = ۲ا/م ہوگا ۔

ان مسئلوں کے لیے نئی تحقیق کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ دفعات ۹۴ ، ۹۵ ، ۱۰۰ ، اور ۱۰۲ برابر درست رہتے ہیں خواہ محاور علی القوائم ہوں یا نہ ہوں ۔

(۱) مکافی کے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرنا جبکہ مماس ایک دوسرے کے ساتھ ایک دیا ہوا زاویہ بنائیں۔

خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}}$ ، مکافی $\text{ما}^{۲} - ۴\,\text{ا}\,\text{لا} = ۰$ کا مماس ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو [دفعہ ۴۹]۔

اگر (لا، ما) کو معلومہ فرض کیا جائے تو اس مساوات سے اُن مماسوں کی سمتیں معلوم ہونگی جو اِس نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ چنانچہ سمتوں کو معلوم کرنیکے لیے مساوات ہوگی

$$\text{م}^{۲}\,\text{لا} - \text{م}\,\text{ما} + \text{ا} = ۰ \qquad (۱۲۵)$$

اور اگر اِس دو درجی مساوات کی اصلیں $\text{م}_{۱}$ اور $\text{م}_{۲}$ ہوں تو

$$\text{م}_{۱} + \text{م}_{۲} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} \quad \text{اور} \quad \text{م}_{۱}\text{م}_{۲} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$$

$$\therefore \quad (\text{م}_{۱} - \text{م}_{۲})^{۲} = \frac{\text{ما}^{۲} - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}}{\text{لا}^{۲}}$$

لیکن اگر دو مماس ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ ع بنائیں تو

$$\text{مس}\,\text{ع} = \frac{\text{م}_{۱} - \text{م}_{۲}}{۱ + \text{م}_{۱}\text{م}_{۲}}$$

$$\therefore \quad \text{مس}^{۲}\,\text{ع} = \frac{\text{ما}^{۲} - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}}{(\text{ا} + \text{لا})^{۲}}$$

اس لیے مطلوبہ طریق کی مساوات

$$\text{ما}^{۲} - ۴\,\text{ا}\,\text{لا} - (\text{لا} + \text{ا})^{۲}\,\text{مس}^{۲}\,\text{ع} = ۰$$

ہے۔

(۲) اُس عمود کے پائین کا طریق معلوم کرنا جو ایک ثابت نقطہ سے مکافی کے کسی مماس پر کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ مکافی کی مساوات $\text{ما}^{۲} - ۴\,\text{ا}\,\text{لا} = ۰$ ہے اور ثابت نقطہ و کے

محدد (ھ، ک) ہیں۔

مکافی کے کسی مماس کی مساوات

$$ما = م لا + \frac{ا}{م} ، \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے۔ اُس خط کی مساوات جو (ھ، ک) میں سے گذرتا ہے اور خط (۱) پر عمود ہے

$$ما - ک = -\frac{۱}{م} (لا - ھ) ، \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہے۔

طریق کو معلوم کرنے کے لیے م کو مساواتوں (۱) اور (۲) سے ساقط کرنا ہوگا۔ چنانچہ (۲) کی رو سے

$$م = -\frac{لا - ھ}{ما - ک}$$

اور اس لیے (۱) میں درج کرنے سے

$$ما + \frac{لا - ھ}{ما - ک} لا + ا \frac{ما - ک}{لا - ھ} = ۰$$

یا $ما (ما - ک)(لا - ھ) + لا (لا - ھ)^۲ + ا (ما - ک)^۲ = ۰ ، \ldots (۳)$

اس لیے طریق تیسرے درجہ کا ایک منحنی ہے۔

(۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ و خود ہمیشہ طریق پر رہتا ہے۔ اگر نقطہ و مکافی کے باہر ہو تو اس سے کوئی اشکال پیدا نہیں ہوتی کیونکہ ایسی صورت میں و میں سے دو حقیقی مماس کھینچے جا سکتے ہیں اور و سے ان مماسوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان کا پائین خود نقطہ و ہوگا۔ جب نقطہ و مکافی کے اندر ہوتا ہے تو و سے کھینچے ہوئے مماس خیالی ہوتے ہیں اور اس لیے و سے ان پر کھینچے ہوئے عمود بھی خیالی ہوتے ہیں لیکن وہ سب نقطہ و میں سے گذرتے ہیں اور اس لیے و، طریق پر ایک نقطہ ہے۔

اگر ھ = ا تو ک = ۰ یعنے جب و مکافی کے ماسکہ پر ہوتا ہے تو

(۱۲۶) مساوات (۳) تحویل ہو کر لا $\{ \text{ما}^2 + (\text{لا} - \text{ا})^2 \} = 0$ ہو جاتی ہے اور اس لیے کبھی نقطہ دائرہ $\text{ما}^2 + (\text{لا} - \text{ا})^2 = 0$ اور خطِ مستقیم لا = ۰ میں تحویل ہوتا ہے۔

(۳) اس مثلث کا مرکز عمودی جو مکافی کے تین مماسوں سے بنے مرتب پر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مثلث کے اضلاع کی مساواتیں

$$\text{ما} = \text{م}'\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}'} \text{ ، } \text{ما} = \text{م}''\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}''} \text{ ، } \text{ما} = \text{م}'''\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}'''}$$

ہیں دوسرے اور تیسرے اضلاع کا نقطہ تقاطع

$$\left(\frac{\text{ا}}{\text{م}''\text{م}'''} \text{ ، } \frac{\text{ا}}{\text{م}''} + \frac{\text{ا}}{\text{م}'''} \right)$$

ہے۔ اس خط کی مساوات جو اس نقطہ میں سے گذرتا ہے اور پہلے ضلع پر عمود ہے

$$\text{ما} - \frac{\text{ا}}{\text{م}''} - \frac{\text{ا}}{\text{م}'''} = -\frac{1}{\text{م}'} \left(\text{لا} - \frac{\text{ا}}{\text{م}''\text{م}'''} \right)$$

ہے۔ اب یہ خط مرتب لا = ‎-‎ا کو اس نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کا معین

$$\text{ا} \left(\frac{1}{\text{م}'} + \frac{1}{\text{م}''} + \frac{1}{\text{م}'''} + \frac{1}{\text{م}'\text{م}''\text{م}'''} \right)$$

ہے۔ اس نتیجہ کے تشاکل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دوسرے عمود بھی مرتب کو اسی نقطہ پر قطع کرتے ہیں جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

(۴) دو مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

وہ خط جس کی مساوات

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} - 2\,\text{ا}\,\text{م} - \text{ا}\,\text{م}^3 \text{ ، } \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے مکافی $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کا ایک عماد ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔
اگر نقطہ (لا، ما) کو معلومہ فرض کیا جائے تو مساوات (۱) سے اُن عمادوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو اس نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔
اگر (۱) کی اصلیں $م_۱$، $م_۲$، $م_۳$ ہوں تو

$$م_۱ م_۲ م_۳ = - \frac{ما}{ا} ، \quad \ldots\ldots (۲)$$

لیکن اگر عمادوں میں سے دو (فرض کرو وہ جو $م_۱$، $م_۲$ سے حاصل ہوتے ہیں) علی القوائم ہوں تو

$$م_۱ م_۲ = -۱ ، \text{ اور اس لیے (۲) سے } م_۳ = \frac{ما}{ا}$$

لیکن $م_۳$، (۱) کی ایک اصل ہے

$$\therefore \quad ما = \frac{لا ما}{ا} - ۲ ما - \frac{ما^۳}{ا^۲}$$

اس طرح $ما^2 = ا (لا - ۳ ا)$، مطلوبہ طریق کی مساوات ہے۔

۱۰۶ ۔ ہم عماد نقطے ۔ مکافی $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کے کسی نقطہ

(لاَ، ماَ) پر کے عماد کی مساوات

$$۲ ا (ما - ماَ) + ماَ (لا - لاَ) = ۰ ، \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے۔ اگر خط (۱)، نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرے تو

$$۸ ا^2 (ک - ماَ) + ماَ (۴ ا ھ - ماَ^2) = ۰ ، \quad \ldots (۲)$$

مساوات (۲) سے اُن نقطوں کے معیّن حاصل ہوتے ہیں جن پر کے عماد مخصوص نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتے ہیں۔ یہ مساوات ایک کعبی مساوات ہے اور اس لیے کسی نقطہ میں سے مکافی کے تین عماد (جن میں سے کم از کم ایک حقیقی ہونا چاہیے) کھینچے جا سکتے ہیں۔
چونکہ مساوات (۲) میں $ماَ^2$ کی کوئی رقم شامل نہیں ہے اس لیے

اگر اس کی اصلیں $م_1$، $م_2$، $م_3$ ہوں تو

$$م_1 + م_2 + م_3 = 0 \quad \ldots\ldots (۳)$$

اب ہم جانتے ہیں کہ مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے لیے ان میں سے کسی وتر کے سروں پر کے دو معینوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ [دفعہ ۱۰۲]۔ اس لیے ان نقطوں پر کے عماد ایک ثابت نقطہ کے عماد پر ملتے ہیں جس کے معین کو عمادوں کے معینوں کے مجموعہ میں جمع کرنے پر صفر حاصل ہوتا ہے۔

پس ان عمادوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق جو ایک مکافی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے سروں پر کھینچے گئے ہوں ایک خطِ مستقیم ہے جو منحنی کا ایک عماد ہے۔

اگر ف، ق، ر پر کے عماد (ہ، ک) پر ملیں تو ف، ق، ر کے معین مساوات

$$م^3 + 4ا(2ا - ہ)م - 8ا^2ک = 0 \quad \ldots\ldots (۴)$$

کی اصلیں ہیں۔

اب فرض کرو کہ دائرہ ف ق ر،

$$لا^2 + ما^2 + 2گ\,لا + 2ف\,ما + ج = 0$$

ہے۔ $16ا^2$ سے ضرب دو اور $4ا\,لا$ کی بجائے $ما^2$ رکھو تو دائرہ اور مکافی کے نقاطِ تقاطع کے معین مساوات

$$م^4 + 16ا^2م^2 + 8ا\,گ\,م^2 + 32ا^2ف\,م + 16ا^2ج = 0 \quad \ldots (۵)$$

کی اصلیں ہیں۔

پس $م_1 + م_2 + م_3 + م_4 = 0$۔ لیکن (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطوں ف، ق، ر کے لیے $م_1 + م_2 + م_3 = 0$

اس لیے $م_4 = 0$ اور اس لیے دائرہ ف ق ر (ہ، ک) کی تمام

قیمتوں کے لیے مکافی کے راس میں سے گذرتا ہے۔

(۱۲۸) پس ج = ۰۔ اور پھر (۴) سے ف، ق، ر کے معیّن، مساوات

ما^{۲} + ۸ ا (گ + ۲ ا) ما + ۳۲ ا^{۲} ف = ۰، ...... (۶)

کی اصلیں ہیں۔

(۴) اور (۶) کا مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

۲ گ = - (ھ + ۲ ا) اور ۸ ف = - ک

اِس طرح وہ دائرہ جو اُن تین نقطوں میں سے گذرتا ہے جن پر کے عماد نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتے ہیں

لا^{۲} + ما^{۲} - (ھ + ۲ ا) لا - $\frac{۱}{۴}$ ک ما = ۰

ہے۔

۱۰۷ ـــ مکافی ما^{۲} - ۴ ا لا = ۰ پر کے کسی نقطہ کے دونوں محددوں کو ایک متغیر کی رقوم میں بیان کرنا اکثر مفید ہوتا ہے۔

سادہ ترین طریقہ لا کو ما کی رقوم میں بیان کرنے کا ہے۔

نقطہ ($\frac{ما_{۱}^{۲}}{۴ ا}$، ما$_{۱}$) صریحاً ما^{۲} - ۴ ا لا = ۰ پر ہے اور اگر اس کو نقطہ ما$_{۱}$ کہا جائے تو ہم نے حسب ذیل مساواتیں علی الترتیب (۱) وتر ما$_{۱}$، ما$_{۲}$ کے لیے، (۲) ما$_{۱}$ پر کے مماس کے لیے، اور (۳) ما$_{۱}$ اور ما$_{۲}$ پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کے لیے معلوم کی ہیں:

(۱) ما (ما$_{۱}$ + ما$_{۲}$) - ۴ ا لا - ما$_{۱}$ ما$_{۲}$ = ۰،

(۲) ۲ ما ما$_{۱}$ - ۴ ا لا - ما$_{۱}^{۲}$ = ۰،

(۳) ۴ ا لا = ما$_{۱}$ ما$_{۲}$ اور ۲ ما = ما$_{۱}$ + ما$_{۲}$

دوسرا طریقہ جو اکثر استعمال کیا جاتا ہے لا = ا ع^{۲} اور ما = ۲ ا ع رکھنے کا ہے۔

نقطہ (ا ع^{۲}، ۲ ا ع) صریحاً ما^{۲} - ۴ ا لا = ۰ پر ہے اور اگر اس کو نقطہ ع کہا جائے تو ہم وتر ع$_{۱}$ ع$_{۲}$ وغیرہ کی مساواتیں دفعہ ۹۵ وغیرہ کے

طریقہ پر معلوم کر سکتے ہیں (یا اوپر کی مساواتوں میں ما$_1$ کی بجائے ۲ اع$_1$ درج کر کے)۔ چنانچہ یہ مساواتیں

(۱) ما (ع$_1$ + ع$_2$) − ۲ لا − ۲ اع$_1$ ع$_2$ = ۰،

(۲) ما ع$_1$ − لا − اع$_1^2$ = ۰،

(۳) لا = اع$_1$ ع$_2$، اور ما = ا (ع$_1$ + ع$_2$)

ہیں۔

مثال ۱ ۔ اگر ایک دائرہ کا قطر ایک مکافی کا ایسا وتر ہو جس کے سروں کے معینوں کا فرق وتر خاص کے طول کا دگنا ہے تو ثابت کرو کہ دائرہ مکافی کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ وتر کے سرے ما$_1$، ما$_2$ ہیں تو ما$_1$ − ما$_2$ = ۸ ا ۔

دائرہ کی مساوات [دفعہ ۶۶ مثال ۲] (۱۲۹)

(ما − ما$_1$)(ما − ما$_2$) + (لا − لا$_1$)(لا − لا$_2$) = ۰

ہے۔ یہ دائرہ مکافی کو اُن نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کے معین

۱۶ ا^2 (ما − ما$_1$)(ما − ما$_2$) + (ما^2 − ما$_1^2$)(ما^2 − ما$_2^2$)) = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح دوسرے دو نقاط تقاطع کے معین مساوات

۱۶ ا^2 + (ما + ما$_1$)(ما + ما$_2$) = ۰

یعنے ما^2 + ما (ما$_1$ + ما$_2$) + ما$_1$ ما$_2$ + ۱۶ ا^2 = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس آخری مساوات کی اصلیں مساوی ہونگی اگر

(ما$_1$ + ما$_2$)^2 = ۴ ما$_1$ ما$_2$ + ۶۴ ا^2

یعنے اگر (ما$_1$ − ما$_2$)^2 = (۸ ا)^2

مثال ۲ ۔ مکافیوں ما^2 − ۴ ا لا = ۰ اور لا^2 − ۴ ب ما = ۰ میں سے

کسی ایک میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جن کے ضلع دوسرے مکافی کو مس کریں۔

فرض کرو کہ $ما^{2} - ۴ د لا = ۰$ پر کوئی تین نقطے $ما_{1}$، $ما_{2}$، $ما_{3}$ ہیں ایسے کہ خطوط $ما_{1} ما_{2}$ اور $ما_{1} ما_{3}$ میں سے ہر ایک مکافی $لا^{2} - ۴ ب ما = ۰$ کو مس کر سکے۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ خط $ما_{2} ما_{3}$ بھی اس مکافی کو مس کرتا ہے۔

$ما_{1}$، $ما_{2}$ کو ملانے والا خط

$$ما (ما_{1} + ما_{2}) - ۴ د لا - ما_{1} ما_{2} = ۰$$

ہے۔ یہ خط دوسرے مکافی کو مس کرتا ہے اور اس لیے مساوات

$$(ما_{1} + ما_{2}) لا^{2} - ۱۶ د ب لا - ۴ ب ما_{1} ما_{2} = ۰$$

کی اصلیں مساوی ہیں اور اس لیے

$$ما_{1} ما_{2} (ما_{1} + ما_{2}) + ۱۶ د^{2} ب = ۰، \quad \ldots\ldots (۱)$$

نیز

$$ما_{1} ما_{3} (ما_{1} + ما_{3}) + ۱۶ د^{2} ب = ۰، \quad \ldots\ldots (۲)$$

تفریق کرنے اور $ما_{1} (ما_{2} - ما_{3})$ سے تقسیم کرنے پر جہاں $ما_{1} (ما_{2} - ما_{3})$ صفر نہیں ہے حاصل ہوتا ہے

$$ما_{1} + ما_{2} + ما_{3} = ۰، \quad \ldots\ldots (۳)$$

$ما_{1}$ کو (۱) اور (۳) سے ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$ما_{2} ما_{3} (ما_{2} + ما_{3}) + ۱۶ د^{2} ب = ۰۔$$

جس سے ثابت ہے کہ $ما_{2}$، $ما_{3}$ کو ملانے والا خط بھی $لا^{2} = ۴ ب ما$ کو مس کرتا ہے۔

مثال ۴۔ مکافی $ما^{2} - ۴ د لا = ۰$ میں کھینچے ہوئے متساوی الاضلاع مثلثوں کے مرکزوں کا طریق مکافی $۹ ما^{2} - ۴ د لا + ۳۲ د^{2} = ۰$ ہے۔

متساوی الاضلاع مثلث میں مرکزِ ہندسی مرکزِ عمودی پر منطبق ہوتا ہے۔
اب اُس مثلث کا مرکزِ ہندسی جس کے راس نقطے $ع_{1}$، $ع_{2}$، $ع_{3}$ ہیں

$$\text{۳لا} = \text{ا} \sum \text{ع}_1^2 = \text{ا} (\sum \text{ع}_1)^2 - \text{۲ا} \sum \text{ع}_1 \text{ع}_2 \text{ ،}$$

اور

$$\text{۳م} = \text{۲ا} \sum \text{ع}_1$$

سے معلوم ہوتا ہے۔

مثلث کے عمودوں میں سے دو، مساواتوں

$$\text{۲}(\text{م} - \text{۲ا ع}_1) + (\text{ع}_2 + \text{ع}_3)(\text{لا} - \text{ا ع}_1^2) = \text{۰ ،}$$

$$\text{۲}(\text{م} - \text{۲ا ع}_2) + (\text{ع}_3 + \text{ع}_1)(\text{لا} - \text{ا ع}_2^2) = \text{۰}$$

سے معلوم ہوتے ہیں۔

تفریق کرنے پر (۱۳۰)

$$\text{۴ا} + \text{لا} + \text{ا} \sum \text{ع}_2 \text{ع}_3 = \text{۰}$$

پس چونکہ مرکزِ ہندسی اور مرکزِ عمودی منطبق ہوتے ہیں اس لیے

$$\text{۳لا} = \text{ا} (\sum \text{ع}_1)^2 + \text{۸ا} + \text{۲لا ،}$$

$$\text{۴الا} - \text{۳۲ا}^2 = \text{۴ا}^2 (\sum \text{ع}_1)^2 = \text{۹م}^2$$

مثال ۴ — ایک مثلث کے اضلاع $\text{م}^2 - \text{۴الا} = \text{۰}$ کو مس کرتے ہیں اور اس کے دو راس $\text{م}^2 - \text{۴ب}(\text{لا} + \text{ج}) = \text{۰}$ پر ہیں۔ تیسرے راس کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ تین مماس

$$\text{م ع}_1 - \text{لا} - \text{ا ع}_1^2 = \text{۰ ،} \qquad \text{(۱)}$$

$$\text{م ع}_2 - \text{لا} - \text{ا ع}_2^2 = \text{۰ ،} \qquad \text{(۲)}$$

اور

$$\text{م ع}_3 - \text{لا} - \text{ا ع}_3^2 = \text{۰ ،} \qquad \text{(۳)}$$

ہیں۔ تب مثلث کے تین راس

$$\{ا ع_2 ع_3، ا(ع_2+ع_3)\}، \{ا ع_3 ع_1، ا(ع_3+ع_1)\}، \{ا ع_1 ع_2، ا(ع_1+ع_2)\}$$

ہیں۔

فرض کرو کہ آخری دو راس دوسرے مکافی پر ہیں، تب

$$ا^2(ع_3+ع_1)^2 - ۴ب ا ع_3 ع_1 - ۴ب ج = ۰$$

اور

$$ا^2(ع_1+ع_2)^2 - ۴ب ا ع_1 ع_2 - ۴ب ج = ۰$$

اس لیے

$$ا(ع_2+ع_3) = (۴ب - ۲ا) ع_1$$

اور

$$ا^2 ع_2 ع_3 = ا^2 ع_1^2 - ۴ب ج$$

$$= \frac{ا^2}{۴(۲ب-ا)^2}(ع_2+ع_3)^2 - ۴ب ج$$

لیکن تیسرے راس کے لیے $لا = ا ع_2 ع_3$ اور $ما = ا(ع_2+ع_3)$۔
اس لیے مطلوبہ طریق مکافی

$$ا لا = \frac{ا^2}{۴(۲ب-ا)^2} ما^2 - ۴ب ج$$

یا

$$ما^2 = ۴\left(\frac{۲ب}{ا} - ۱\right)^2 (ا لا + ۴ب ج)$$

ہے جو خود دوسرا مکافی ہے اگر $ا = ۴ب$۔

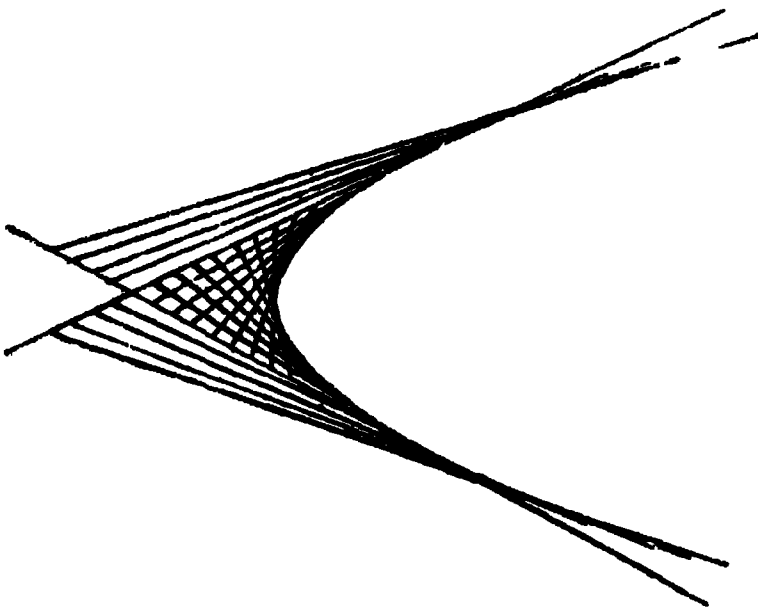
لفاف

۱۰۸۔ اگر ایک نقطہ کے محددوں میں کوئی جبری رشتہ ہو تو وہ ہر طرح حرکت کرنے میں آزاد نہیں ہو گا لیکن وہ ایک خاص منحنی پر کوئی محل اختیار

کرسکتا ہے۔ اس منحنی کو متحرک نقطہ کا طریق کہتے ہیں۔

اسی طرح اگر ایک خطِ مستقیم کی مساوات کے دو مستقلوں میں کوئی نسبت ہو تو خط ہر طرح حرکت کرنے میں آزاد نہیں ہوگا لیکن وہ ایسے لاتعداد محل اختیار کرسکتا ہے جو سب کے سب ایک خاص منحنی کے مماس ہوں گے۔ اس منحنی کو متحرک خط کا لفافہ کہتے ہیں۔

مثلاً اگر مساوات ل لا + م ما - ا = ۰ کے مستقلوں ل اور م میں نسبت $ل^۲ + م^۲ = ۱$ ہو تو خطِ مستقیم ل لا + م ما - ا = ۰ اس طرح حرکت کرے گا کہ نقطہ (۰، ۰) سے اس کا عمودی فاصلہ ہمیشہ ا کے مساوی ہوگا اور اس لیے یہ خط اپنے تمام ممکن محلوں میں دائرہ $لا^۲ + ما^۲ = ا^۲$ کو مس کرتا چاہیے۔

حسب ذیل شکل میں ایک خطِ مستقیم کے مختلف محل دکھائے گئے ہیں جو محوروں پر ایسے مقطوعے قطع کرتا ہے جن کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

اب اگر ت ف اور ت ق، کسی منحنی کے دو متصلہ مماس ہوں

اور اگر مماس ت ق بتدریج ت ف کی طرف حرکت کرکے بالآخر ت ف پر منطبق ہو جائے تو مماسوں کا نقطۂ تقاطع، نقطہ ف کے قریب اور قریب تر حرکت کرے گا اور بالآخر اس پر منطبق ہو جائیگا۔ اس طرح دو منطبق مماسوں کا نقطۂ تقاطع اُس منحنی پر ہوتا ہے جس کو سب مماس مس کرتے ہیں۔ نیز وہ دو مماس جو کسی نقطہ سے ایک منحنی کے کھینچے جائیں منطبق ہوں گے اگر نقطہ منحنی پر ہو۔

اب خطوطِ مستقیم کے اُس نظام پر غور کرو جو مساوات

$$\frac{لا}{ھ} + \frac{ما}{ل - ھ} = ۱ \text{ یا } ھ^2 + ھ(ما - لا - ل) + ل\,لا = ۰ \quad \ldots (۱)$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ل مستقل ہے۔

چونکہ (۱) دو درجی مساوات ہے اس لیے ھ کی دو قیمتیں، لا اور ما کی کسی معلومہ قیمتوں کے جواب میں، حاصل ہوں گی۔ اس طرح کسی دئے ہوئے نقطہ میں سے نظام کے دو خطوطِ مستقیم کھینچے جا سکتے ہیں۔ جب یہ دو خطوط منطبق ہوتے ہیں تو نقطہ (لا، ما) کو اُس منحنی پر ہونا چاہیے جس کو تمام خطوط مس کرتے ہیں۔

پس اُس منحنی کی مساوات جس کو نظام کے تمام خطوط مس کرتے ہیں یہ شرط لکھ لینے سے حاصل ہوگی کہ دو درجی (۱) کی دو اصلیں مساوی ہیں۔ اب (۱) کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر

$$۴\,ل\,لا = (ما - لا - ل)^2 \text{،} \quad \ldots\ldots (۲)$$

جو [دفعہ ۱۰۴] ایک مکافی کی مساوات ہے۔
یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے کہ مکافی (۲) محوروں کو نقطوں (ل، ۰) اور (۰، ل) پر مس کرتا ہے۔
اس طرح وہ تمام خطوط جو صفحہ (۱۸۶) کی شکل میں کھینچے گئے ہیں ایک مکافی کو مس کرتے ہیں۔

(۳۳۲) **مثال ۱۔** خطِ مستقیم ما = م لا + $\frac{ا}{م}$ کا لفاف معلوم کرو۔
مساوات کو لکھا جا سکتا ہے

م^2 لا - م ما + ا = ۰ .... (۱)

چونکہ (۱) دو درجی مساوات ہے اس لیے لا اور ما کی کسی معلومہ قیمتوں کے جواب میں م کی دو قیمتیں ہیں۔ پس نظام کے دو خطوط کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں۔ جب م کی دو قیمتیں مساوی ہوتی ہیں تو خطوط منطبق ہوتے ہیں اور (لا، ما) مطلوبہ لفاف پر ہوتا ہے۔
اب وہ شرط کہ (۱) کی دو اصلیں مساوی ہوں یہ ہے کہ

ما^2 - ۴ ا لا = ۰

اور یہ مطلوبہ لفاف ہے۔

مثال ۲۔ خط ا لاجم طہ + ب ما جب طہ + ج = ۰ کا لفاف معلوم کرو۔
اس مساوات کو لکھا جا سکتا ہے

ا لا (جم^2 $\frac{طہ}{۲}$ - جب^2 $\frac{طہ}{۲}$) + ۲ ب ما جب $\frac{طہ}{۲}$ جم $\frac{طہ}{۲}$ + ج (جم^2 $\frac{طہ}{۲}$ + جب^2 $\frac{طہ}{۲}$) = ۰

یا ا لا + ج + ۲ ب ما ت + (ج - ا لا) ت^2 = ۰

جہاں ت = مس $\frac{طہ}{۲}$۔

اس طرح نظام کے دو خطوط کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں۔ یہ خطوط منطبق ہوں گے اگر

(ا لا + ج) (ج - ا لا) - ب^2 ما^2 = ۰

اس لیے لفاف ہے $\text{ا}^2\text{لا}^2 + \text{ب}^2\text{ما}^2 = \text{ج}^2$

مثال (۳) ۔ خط $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + 1 = 0$ کا لفاف شرط $\text{ا}\,\text{ل}^2 + \text{ب}\,\text{م}^2 + \text{ج} = 0$ کے ساتھ معلوم کرو ۔

$$\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + 1 = 0 \quad \text{اور} \quad \text{ا}\,\text{ل}^2 + \text{ب}\,\text{م}^2 + \text{ج} = 0 \quad \text{سے}$$

$$\text{ا}\,\text{ل}^2 + \text{ب}\,\text{م}^2 + \text{ج}\,(\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما})^2 = 0$$

$\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ کی دو قیمتوں سے نظام کے اُن دو خطوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں ۔

یہ دو خطوط منطبق ہوں گے اگر $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ کا مندرجہ صدر دو درجی دو مساوی اصلیں رکھے جس کے لیے یہ شرط ہے کہ

$$(\text{ا} + \text{ج}\,\text{لا}^2)(\text{ب} + \text{ج}\,\text{ما}^2) = \text{ج}^2\,\text{لا}^2\,\text{ما}^2$$

اس لیے مطلوبہ طریق $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ج}} = 0$ ہے ۔

مثال (۴) ۔ مکافی $\text{ما}^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا} = 0$ پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ل ہے، مکافی کا راس ا ہے اور مستطیل ا ل ن م کی تکمیل کی گئی ہے ۔ ثابت کرو کہ م ل کا لفاف $\text{ما}^2 + 16\,\text{ا}\,\text{لا} = 0$ ہے ۔

مثال (۵) ۔ ثابت کرو کہ اگر اُن مقطوعوں کا مجموعہ جو ایک متحرک خط محوروں پر قطع کرتا ہے مستقل رہے تو خط ایک مکافی کو لف کرے گا ۔

مثال (۶) ۔ ایک خط مستقیم کا لفاف معلوم کرو جو محوروں کو علی الترتیب ف، ق پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ مثلث و ف ق کا رقبہ مستقل رہتا ہے ۔ (۴۴)

مثال ۷ ۔ ایک مکافی کے ایسے وتر کا لفاف جس کے سروں پر کے عینوں کا فرق مستقل رہے مساوی مکافی ہوتا ہے ۔

مثال ۸ ۔ ایک مکافی کے وتر ن ق، ن م معلومہ خطوط مستقیم کے

متوازی ہیں - ثابت کروکہ ق ر ا مساوی مکافی کو لف کرتا ہے -

مثال ۹ — ایک کثیر الاضلاع کو ایک مکافی میں بنایا گیا ہے اور اس کثیر الاضلاع کے تمام اضلاع اِلّا ایک کے معلومہ خطوطِ مستقیم کے متوازی ہیں - ثابت کرو کہ اگر اضلاع کی تعداد جفت ہے تو باقی ضلع بھی ایک ثابت خطِ مستقیم کے متوازی ہوگا لیکن اگر اضلاع کی تعداد طاق ہے تو باقی ضلع ایک مکافی کو لف کرے گا -

مثال ۱۰ — اگر دو ثابت نقطوں سے ایک متحرک خط پر عمود کھینچے جائیں اور ان عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط ایک مکافی کو لف کرے گا -

مثال ۱۱ — مکافی ما^{۲} - ۴ ا لا = ۰ کے کسی نقطہ ن پر کا عماد محور کو گ پر قطع کرتا ہے - ثابت کرو کہ وہ خط جو گ میں سے گذرتا ہے اور ن پر کے مماس کے متوازی ہے ہم ماسکی مکافی ما^{۲} + ۴ ا (لا - ۲ ا) = ۰ کو لف کرتا ہے -

مثال ۱۲ — ثابت کرو کہ ایک خط ف ق کا لفاف جو ایک مکافی کے کسی نقطہ ف میں سے اس طرح کھینچا گیا ہو کہ ف میں سے گذرنے والا قطر ف ق اور ف پر کے مماس کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے دوسرا مکافی ہے -

مثال ۱۳ — ایک دائرہ کے ایک وتر کا نقطہ وسطی ایک ثابت خطِ مستقیم پر ہے - ثابت کرو کہ یہ وتر ایک مکافی کو لف کرتا ہے -

مثال ۱۴ — ایک مکافی کا ایک متغیر مماس ایک ثابت مماس کو نقطہ ن پر قطع کرتا ہے - ثابت کرو کہ وہ خط جو ن میں سے گذرتا ہے اور متغیر مماس پر عمود ہے ایک مکافی کو لف کرتا ہے -

مثال ۱۵ — ایک دئے ہوئے خط پر کے کسی نقطہ ن میں سے خط ن ق اس طرح کھینچا گیا ہے کہ وہ ایک دئے ہوئے مکافی کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی کے متوازی ہے - ثابت کرو کہ ن ق کا لفاف ایک دوسرا مکافی ہے -

مثال ۱۶ — ایک دئے ہوئے خط پر کے کسی نقطہ ن میں سے خط ن ق اس طرح کھینچا گیا ہے کہ وہ ایک دئے ہوئے مکافی کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پر

عمود ہے - ثابت کرو کہ ن ق کا لفاف ایک دوسرا مکافی ہے -

مثال ۱۷ - ایک خط کا لفاف معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر دو نقطوں (ا، ۰)، (-ا، ۰) سے اس خط پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ ۲ ج کے مساوی ہوتا ہے -

جواب: $\frac{لا^2}{ج^2 - ا^2} + \frac{ما^2}{ج^2} = 1$

مثال ۱۸ - ثابت کرو کہ وہ خطِ مستقیم جو دو دیے ہوئے دائروں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ دائروں کے وتر مساوی ہیں ایک مکافی کو لف کرتا ہے -

مثال ۱۹ - و لا، و ما دو ثابت خط ہیں اور (ایک ثابت نقطہ ہے - کوئی دائرہ جو و اور (میں سے گذرتا ہے و لا، و ما کو علی الترتیب ف، ق پر قطع کرتا ہے - ثابت کرو کہ ف ق، ایک ثابت مکافی کا مماس ہے - (۱۳۵)

مثال ۲۰ - ایک خط جو نقطہ ن میں سے گذرتا ہے اور (مکافی $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کے لحاظ سے) نقطہ ن کے قطبی پر عمود ہے ثابت نقطہ (عہ، بہ) میں سے گذرتا ہے - ثابت کرو کہ ن کا قطبی، مکافی

$$(لا - ۲ ا + عہ)^2 + ۴ بہ ما = ۰$$

کو لف کرتا ہے -

مثال ۲۱ - ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا قطبی جبکہ دائرہ دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرے دو مکافیوں میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتا ہے -

مثال ۲۲ - ایک خطِ مستقیم دو دیے ہوئے خطوط و لا، و ما کو نقطوں ف، ق پر قطع کرتا ہے اور ف ق کا نقطہ وسطی ایک دیے ہوئے خط پر ہے - ثابت کرو کہ ف ق ایک مکافی کو لف کرتا ہے -

مثال ۲۳ - ف ق اور ف ر مکافی $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کے وتر ہیں جو ما = ۰ کو علی الترتیب نقطوں ($ج_1$، ۰)، ($ج_2$، ۰) پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ ق ر، مکافی $(ج_1 + ج_2)^2 ما^2 = ۱۶ ا ج_1 ج_2 لا$ کو لف کرتا ہے

مثال ۲۴ — $ما^۲ = ۴ ا لا$ کا ایک وتر متوازی ماسکی وتر کے طول کا ک گنا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر، مکافی $ما^۲ = ۴ اَ (لا + اَ)$ کو مس کرتا ہے جہاں $اَ = ا (۱ - ک^۲)$ ۔

مثال ۲۵ — مکافی $ما^۲ - ۴ ا لا = ۰$ کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد خط $ما = ک$ پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ف ق ر کے اضلاع مکافی $لا^۲ - ۲ ک ما = ۰$ کو مس کرتے ہیں۔

پانچویں باب پر مثالیں

۱ — ایک مکافی کے لحاظ سے ایک نقطہ و کے قطبی پر نقطہ و سے عمود کھینچا گیا ہے جو قطبی سے نقطہ م پر ملتا ہے اور محور کو گ پر قطع کرتا ہے۔ قطبی، محور کو ت پر قطع کرتا ہے اور و میں سے گذرنے والا معین منحنی کو ن پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقاط ت، ف، م، گ، ن سب کے سب ایک دائرہ پر ہیں جس کا مرکز س ہے۔

۲ — ثابت کرو کہ دو مکافی $ما^۲ = ا لا$، $لا^۲ = ب ما$ ایک دوسرے کو زاویہ

$$\text{مس}^{-1} \frac{۳ \, ا^{\frac{1}{3}} ب^{\frac{1}{3}}}{۲ (ا^{\frac{2}{3}} + ب^{\frac{2}{3}})}$$

پر قطع کرینگے۔

۳ — اگر ایک مکافی کا ایک ماسکی وتر ن س ق ہو اور ن ا مرتب سے م پر ملے تو ثابت کرو کہ م ق مکافی کے محور کے متوازی ہوگا۔

۴ — ثابت کرو کہ اگر مکافی پر کے دو نقطوں کے معین ایک مستقل نسبت میں ہوں تو ان نقطوں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک

مکافی ہے۔

۵ — نقطہ ن سے مکافی ی² - ۴ ا لا = ۰ کے دو مماس کھینچے گئے ہیں اور یہ مماس محور لا کے ساتھ زاویے طہ₁ طہ₂ بناتے ہیں۔ ن کا طریق معلوم کرو (۱) جبکہ مس طہ₁ + مس طہ₂ مستقل ہو اور (۲) جبکہ مس² طہ₁ + مس² طہ₂ مستقل ہو۔

۶ — ایک مکافی کے اُن دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو جو ایک دوسرے کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتے ہیں۔

۷ — ثابت کرو کہ اگر ایک مکافی کے دو مماس کسی ثابت مماس پر ایک مستقل طول قطع کریں تو اِن کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دوسرا مساوی مکافی ہے۔

۸ — ثابت کرو کہ ایک مکافی کے دو مماس جو علی الترتیب محور اور مرتب کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں لیکن علی القوائم نہیں ہیں وتر تماس پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۹ — ایک مکافی کے وتر ماس پر کے کسی نقطہ سے اس کے سروں کے مماسوں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو اِن عمودوں کے پائین کو ملاتا ہے مکافی کو مس کرتا ہے۔

۱۰ — اگر خط لا + ۴ ا = ۰ پر کے ایک نقطہ سے مکافی ی² - ۴ ا لا = ۰ پر مماس کھینچے جائیں تو اِن کے وتر تماس کے محاذی راس پر ایک قائمہ زاویہ بنے گا۔

۱۱ — ایک مکافی کے لحاظ سے ت کے قطبی پر ت سے عمود ت ل کھینچا گیا ہے جو محور سے م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ت ل . ت م مستقل ہو تو ت کا طریق ایک مکافی ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ اگر ت ل : ت م مستقل ہو تو ت کا طریق ایک مکافی ہوگا۔

۱۲ — دو مساوی مکافیوں کے محور متوازی ہیں اور ان کے راسوں پر کا مماس مشترک ہے۔ خطوطِ مستقیم کسی ایک محور کے متوازی

کھینچے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ منحنیوں کے درمیان ان خطوط کے جو حصے منقطع ہوتے ہیں ان کے نقاط وسطی کا طریق ایک مساوی مکافی ہے ۔

۱۳ ـــ دو مکافی ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور ان کے محور متوازی ہیں ۔ ثابت کرو کہ اگر ان مکافیوں کے دو نقطوں پر کے مماس ان کے مشترک مماس پر متقاطع ہوں تو ان کے نقاط تماس کو ملانے والا خط محور کے متوازی ہوگا ۔

۱۴ ـــ دو مکافیوں کا محور وہی ہے ۔ ایک مکافی کے نقطوں سے دوسرے مکافی کے مماس کھینچے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ دوسرے مکافی کے وتر تماس کے وسطی نقطے ایک ثابت مکافی پر واقع ہوتے ہیں ۔ (۱۲۷)

۱۵ ـــ ایک مکافی کا ایک وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ وتر کے نقطہ وسطی کا طریق ایک مکافی ہے ۔

۱۶ ـــ ایک وتر ن نَ کا نقطہ وسطی ایک ثابت خط مستقیم پر ہے جو ایک مکافی کے محور پر عمود ہے ۔ ثابت کرو کہ وتر کے قطب کا طریق دوسرا مکافی ہے ۔

۱۷ ـــ اگر ایک مکافی کے جس کا راس ا ہے دو مماس ت ف اور ت ق ہوں اور اگر خطوط اف، ات، اق (ممدودہ بہ ضرورت) مرتب کو علی الترتیب ف، ت، اور ق پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ف ت = ت ق ۔

۱۸ ـــ اگر کسی نقطہ و میں سے ایک مکافی کا قطر کسی وتر سے ف پر ملے اور اس وتر کے سروں پر کے مماس قطر سے ق، قَ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

و ف^۲ = و ق × و قَ ـــ

۱۹ ـــ ایک مثلث کا راس ثابت ہے، قاعدہ کا طول مستقل ہے، اور قاعدہ ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ مثلث کے حائط دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکافی ہے ۔

۲۰ ـــ ثابت کرو کہ دائرہ

لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا ا – ۳ ا^۲ = ۰

کے لحاظ سے دائرہ

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 2\,\text{ا لا} - 3\,\text{ا}^2 = 0 .$$

پر کے کسی نقطہ کا قطبی مکافی

$$\text{ما}^2 + 4\,\text{ا لا} = 0 .$$

کو مس کرے گا۔

۲۱ — ن س نَ ایک مکافی کا ایک ماسکی وتر ہے، ن نَ کا نقطہ وسطی ط ہے اور ط و، ن نَ پر عمود ہے، اور محور کو و پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ س نَ اور س ن کے درمیان س و اور ط و حسابی اور ہندسی اوسط ہیں۔

۲۲ — ایک مکافی کے تین ماسکی وتر ف س فَ، ق س قَ، ر س رَ ہیں، ق ر اس قطر سے جو ف میں سے گزرتا ہے ا پر ملتا ہے، ر ف اس قطر سے جو ق میں سے گزرتا ہے ب پر ملتا ہے، اور ف ق اس قطر سے جو ر میں سے گزرتا ہے ج پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ تین نقطے ا، ب، ج ایک خطِ مستقیم پر ہیں جو س میں سے گزرتا ہے۔

(۱۳۰۸) ۲۳ — ایک مکافی کے متوازی وتروں کے نظام میں سے ایک وتر ن نَ ہے اور ن نَ پر و ایک ایسا نقطہ ہے کہ مستطیل ن و × و نَ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک مکافی ہے۔

۲۴ — ایک مکافی کے نقطہ و میں سے گزرنے والے قطر پر دو نقطے ن، نَ لئے گئے ہیں ایسے کہ و ن × و نَ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اگر نقاط ن، نَ سے مکافی کے مماس کھینچے جائیں تو مماسوں کے چار نقاطِ تقاطع دو ثابت خطوطِ مستقیم پر واقع ہوں گے جو و پر کے مماس کے متوازی اور اس سے مساوی فاصلہ پر واقع ہوں گے۔

۲۵ — اگر ایک ذوالاربعۃ الاضلاع ایک مکافی کے گرد کھینچا جائے تو اس کے وتروں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا خط مکافی کے محور کے متوازی ہوگا۔

۲۶ — اگر ایک مکافی کے ایک ماسکی وتر پر کے کسی نقطہ سے دو مماس کھینچے جائیں تو یہ مماس اُن مماسوں کے ساتھ مساوی میلان رکھیں گے جو ماسکی وتر کے سروں پر کھینچے گئے ہوں۔

۲۷ — اگر ایک مکافی کے دو مماس ایک ثابت خطِ مستقیم کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو ثابت کرو کہ وترِ تماس ایک ثابت نقطہ میں سے گزرنا چاہیے۔

۲۸ — دو مکافی ایک مشترک مماس رکھتے ہیں اور ان کے محور مخالف سمتوں میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ان میں سے ایک مکافی کے وتر دوسرے کو مس کرتے ہوئے کھینچے جائیں تو ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک دوسرا مکافی ہوگا۔

۲۹ — ایک مکافی کے ایسے وتر کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو جس کے محاذی راس پر قائمہ زاویہ بنے۔

۳۰ — مکافی ما² - ۴ الا = ۰ کے عماد وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق

$$\frac{ما^2}{۲ا} + \frac{۴ا^3}{ما^2} = لا - ۲ا$$ ہے۔

۳۱ — ایک مکافی کا ایک وتر ف ق ہے جو ف پر عماد ہے، ا ق کو راس ا سے کھینچا گیا ہے اور ف میں سے ایک خط، ا ق کے متوازی کھینچا گیا ہے جو محور سے ر پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا ر، ف کے ماسکی فاصلہ کا دگنا ہے۔

۳۲ — ایک مکافی کے متوازی وتر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان وتروں کے سروں پر کھینچے ہوئے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے، نیز عمادوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق بھی ایک خطِ مستقیم ہے اور وتروں کی مختلف سمتوں کے لیے ان دو خطوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک مکافی ہے۔

۳۳ — اگر ایک مکافی کے دو نقطوں پر کے عماد منحنی پر متقاطع ہوں تو ان نقطوں کو ملانے والا خط محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔

(۱۳۹)

۳۴ — اگر ایک مکافی کے دو نقطوں پر کے عماد محور کے ساتھ زاویوں طہ، فہ پر مائل ہوں اور سس طہ سس فہ = ۲ تو ثابت کرو کہ وہ مکافی پر متقاطع ہوں گے —

۳۵ — ایک ایسے نقطہ کا طریق جس سے دو ایسے عماد کھینچے جا سکیں کہ محور کے ساتھ ان کے زاویے متکملہ ہوں ایک مکافی ہوگا —

۳۶ — ایک نقطہ ن سے مکافی کے عماد کھینچے گئے ہیں اور ان میں سے دو عماد ایک دئے ہوئے خط کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک مکافی ہے —

۳۷ — ایک مکافی کے نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملتا ہے، ن گ کو ہ تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ گ ہ = ½ ن گ۔ ثابت کرو کہ نقطہ ہ میں سے گذرنے والے مکافی کے دوسرے دو عماد ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں —

۳۸ — ایک مکافی کے تین نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ س ن + س ق + س ر + س ا = ۲ و م، جہاں س ماسکہ ہے اور راس پر کے مماس پر و سے عمود و م ہے —

۳۹ — ایک مکافی کے کوئی تین مماس مستقل رقبہ کا ایک مثلث بنائیں گے اگر محور کے ساتھ ان میلانوں کے مماس کسی دئے ہوئے سلسلہ موسیقیہ میں ہوں —

۴۰ — ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو ایک مکافی کے تین عمادوں سے بنتا ہے

$$\frac{ا}{۲}{}^{۲}(م_۱ - م_۲)(م_۲ - م_۳)(م_۳ - م_۱)(م_۱ + م_۲ + م_۳)^{۲}$$

ہے —

۴۱ — اگر ایک مکافی کا ایک مماس دو دئے ہوئے متوازی خطوط مستقیم کو ف، ق پر قطع کرے تو ف، ق سے منحنی کے دوسرے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع

کا طریق ایک مکافی ہوگا۔

۴۲ — اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث ایک مکافی کے گرد کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مثلث کے کسی راس سے ماسکے تک کھینچے جائیں مقابل کے ضلع کے نقطہ تماس میں سے گذریں گے۔

۴۳ — $ما^۲ = ۴ا(لا + ج)$ پر کے کسی نقطہ سے $ما^۲ = ۴ الا$ کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط تماس پر اس مکافی کے عماد ایک ثابت خط مستقیم پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۴۴ — مکافی $ما^۲ - ۴ الا = ۰$ کے ثابت نقطہ $(لا_۱، ما_۱)$ میں سے وتر کھینچے گئے ہیں جو علی القوائم ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے دوسرے سروں کو ملانیوالا خط ثابت نقطہ $(لا_۱ + ۴ا، - ما_۱)$ میں سے گذرتا ہے۔ (۱۴۰)

۴۵ — اگر ایک ثابت نقطہ میں سے ایک مکافی کا کوئی وتر کھینچا جائے اور وتر کے سروں پر عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق دوسرا مکافی ہے۔

۴۶ — اگر ایک نقطہ سے مکافی $ما^۲ = ۴ الا$ کے تین عماد محور کو ایسے نقطوں پر قطع کریں جن کے فاصلے راس سے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ نقطہ منحنی $۲۷ ا ما^۲ = ۲ (لا - ۲ا)^۳$ پر واقع ہے۔

۴۷ — $ما^۲ - ۴ الا = ۰$ کے عماد وتروں کے قطبوں کا طریق $(لا + ۲ا) ما^۲ + ۴ ا^۳ = ۰$ ہے۔

۴۸ — ایک مکافی کے کسی دو ماسکی وتروں کو قطر مان کر دو دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مشترک وتر مکافی کے راس میں سے گذرتا ہے۔

۴۹ — ایک دیے ہوئے مکافی کے دو مماس محور کے ساتھ ایسے زاویے بناتے ہیں کہ ان کے نصفوں کے مماسوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ہم ماسکی مکافی ہے۔

۵۰ — اگر وہ دائرہ جو ایک مکافی کے وتر ف ق پر اس کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو مکافی کو مکرر نقطوں ر، س پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ف ق

اور س من مکافی کے محور پر ایک مستقل طول قطع کرتے ہیں ۔

۵۱ ۔ اگر ف، ق، س پر کے عماد نقطہ و پر ملیں اور ف، ق، س میں سے خطوط ف فَ، ق قَ، س سَ کھینچے جائیں جو محور کے ساتھ وہی زاویے بنائیں جو ف و، ق و، س و علی الترتیب بناتے ہیں تو ثابت کرو کہ ف فَ، ق قَ، س سَ دوسرے نقطہ وَ میں سے گذرتے ہیں اور خط و وَ، وَ کے قطبی پر عمود ہے ۔

۵۲ ۔ ایک مکافی کے عماد جو ف، ق، س پر کھینچے گئے ہیں نقطہ و پر ملتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ و ف × و ق × و س = ا × و ل × و م جہاں و ل اور و م، نقطہ و سے مکافی کے مماس ہیں اور ۴ ا وتر خاص کا طول ہے ۔

۵۳ ۔ اگر ایک خطِ مستقیم کے کسی نقطہ سے جہاں خطِ مستقیم ایک مکافی کے محور پر عمود ہے مکافی کے عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ اُس مثلث کے ضلعوں کے مربعوں کا مجموعہ جو اِن عمادوں کے پائینوں کو ملانے سے بنتا ہے مستقل ہے ۔ (۱۴۱)

۵۴ ۔ ایک مکافی کے تین مماسوں سے ایک مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے، اور دوسرا مثلث د ع ف اُن نقطوں کو ملانے سے بنایا گیا ہے جن پر دو نقاط تماس میں سے گذرنے والا وتر، تیسرے نقطہ تماس میں سے گذرنے والے قطر کو قطع کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ د ع ف کے وسطی نقطے ا، ب، ج ہیں ۔

۵۵ ۔ اگر ایک مثلث ا ب ج کو ایک مکافی میں کھینچا گیا ہو اور اَ بَ جَ وہ مثلث ہو جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے متوازی تین مماسوں سے بنا ہے تو ثابت کرو کہ ا ب ج کے ضلع اَ بَ جَ کے متناظر ضلعوں کے چار گنا ہوں گے ۔

۵۶ ۔ اگر چار خطوطِ مستقیم ایک مکافی کو مس کریں تو ثابت کرو کہ ان میں سے دو کے نقطۂ تقاطع اور دیگر دو کے نقطہ تقاطع کے فصلوں کے مربعوں کا حاصل ضرب چار نقاطِ تماس کے فصلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے ۔

۵۷ — ت سے ایک مکافی کے مماس ت ف اور ت ق ہیں اور کسی دوسرے مماس پر ف، ت، ق سے عمود طول میں علی الترتیب ع۱، ع۲، ع۳ ہیں۔ ثابت کرو کہ ع۱ع۳ = ع۲² —

۵۸ — و سے ایک مکافی کے مماس و ا اور و ب ہیں اور متناظر عماد ا ف، ب ف ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف ایک ثابت خط پر واقع ہو جو محور پر عمود ہے تو و ایک مکافی کو مرتسم کرے گا۔ و کا طریق معلوم کرو اگر ف ایک ثابت قطر پر واقع ہو —

۵۹ — مکافی ما² − ۴ ا لا = ۰ کے نقطہ ف پر کا عماد ف گ ہے جہاں گ محور پر ہے۔ گ ف کو باہر وار نقطہ ق تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ف ق = گ ف۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مکافی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ف اور ق جن مکافیوں پر واقع ہیں اُن کے نقطوں ف اور ق پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق

ما² (لا + ۴ ا) + ۱۶ ا³ = ۰

ہے —

۶۰ — مکافی ما² − ۴ ا لا = ۰ کا ایک وتر ثابت نقطہ (عہ، بہ) میں سے گذرتا ہے اور اس کے ہر سرے میں سے ایک خط مستقیم دوسرے سرے پر کے مماس کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان دو خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق مکافی

۴ ما² − ۶ بہ ما = ۴ ا (لا − ۳ عہ)

ہے —

(۱۳۲) ۶۱ — اگر ما² − ۴ ا لا = ۰ کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد نقطہ (عہ، بہ) پر ملیں تو مثلث ف ق ر کا مرکز عمودی (عہ − ۶ ا، − بہ/۲) ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ ف ق ر کا مرکز ہندسی {۲/۳ (عہ − ۲ ا)، ۰} ہے —

۶۲ — کسی نقطہ (عہ، بہ) سے مکافی ما² − ۴ ا لا = ۰ کے تین عماد کھینچے

گئے ہیں اور ان کے پائینوں پر مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس مثلث کے راسوں کے محدد جو اِن مماسوں سے بنے مساواتوں

لا³ + لا² (ع – ۲ ا) – ا بہ² = ۰

اور ما³ – ا ما (ع – ۲ ا) + ا² بہ = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۶۳ — ایک مکافی پر کوئی تین نقطے ف، ق، ر ہیں۔ ف، ق، ر میں سے گذرنے والے قطر وتروں ف ق، ق ر، ر ف سے علی الترتیب رَ، قَ، فَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ قَ رَ، رَ فَ، فَ قَ علی الترتیب ف، ق، ر پر کے مماسوں کے متوازی ہیں۔

۶۴ — ایک مکافی کے نقطہ ف پر کا عماد محور کو گ پر قطع کرتا ہے اور ق، ر پر کے عماد، ف گ کے نقطہ وسطی میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق ر، مرتب کے پائیں میں سے گذرتا ہے۔

۶۵ — ایک مکافی کے نقطہ ف سے مکافی کے دو عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن عمادوں اور ف میں سے گذرنے والے قطر کے درمیانی زاویوں کے ناصف اور ف پر کا عماد ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۶۶ — نقطہ (–۳ ا، ۰) میں سے گذرنے والا کوئی خط مکافی ما² = ۴ ا لا = ۰ کو نقطوں ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جو ف، ق اور راس کے میں سے گذرتا ہے مکافی کو مس کرتا ہے۔

۶۷ — ف، ق، ر پر کے عماد ہم نقطہ ہیں اور ف ق، ر میں سے گذرنے والے قطر سے مرتب پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق مکافی ما² + ۱۲ ا (لا + ا) = ۰ کو مس کرتا ہے۔

۶۸ — مکافی ما² – ۴ ا لا = ۰ کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد، خط لا = ع پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ف ق ر کے اضلاع مکافی ما² = ۱۶ ا (لا + ۲ ا – ع) کو مس کرتے ہیں۔

۶۹ — ما² – ۴ ا لا = ۰ میں ایک مثلث بنایا گیا ہے اور اس کے

دو اضلاع، $ما^۲ - ۴ب(لا + ج) = ۰$ کو مس کرتے ہیں۔ تیسرے ضلع کا لفاف معلوم کرو۔

۷۰ ـــ $ما^۲ - ۴ ا لا = ۰$ کے نقطوں ق، ر پر کے عماد مکافی سے نقطہ ف پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلث ف، ق، ر کے مرکز عمودی کا طریق مکافی $ما^۲ = ا(لا + ۲ا)$ ہے اور (۲) حائط دائرہ کے مرکز کا طریق مکافی $۲ما^۲ - ا لا + ا^۲ = ۰$ ہے۔

۷۱ ـــ اگر $ما^۲ - ۴ اَ لا = ۰$ پر کے کسی نقطہ سے مکافی $ما^۲ - ۴ ا لا = ۰$ کے مماس کھینچے جائیں تو نقاط تماس پر کے عماد منحنی $ما^۲ (ا - ۴ اَ)^۲ + ۴ ا اَ (لا - ۲ا)^۲ = ۰$ پر ملیں گے۔

۷۲ ـــ مکافی $ما^۲ - ۴ ا لا = ۰$ کا کوئی وتر ثابت نقطہ (غ، ہ) میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا مرکز ہندسی جو وتر اور اسکے سروں پر کے مماسوں سے بنتا ہے مکافی $۲ما^۲ - ہ ما - ۲ ا لا + ۲ ا غ = ۰$ کو مرتسم کرتا ہے۔

۷۳ ـــ مکافی $ما^۲ - ۴ ا لا = ۰$ میں مثلث ف ق ر بنایا گیا ہے اور ف ق، ف ر علی الترتیب نقاط (۰، ۲ا)، (۰، -۲ا) میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف ق، دائرہ $لا^۲ + ما^۲ - ۴ ا لا = ۰$ کو مس کرتا ہے۔

۷۴ ـــ $ما^۲ - ۴ ا لا = ۰$ کا کوئی مماس خطوط $ما - م(لا - ج) = ۰$ اور $ما = مَ(لا - ج)$ کو علی الترتیب ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف، ق سے مکافی کے دوسرے مماس اُس منحنی پر متقاطع ہوتے ہیں جس کی مساوات

$$ا^۲(م - مَ)^۲ (لا + ج)^۲ = (ج م مَ - ا)^۲ (ما^۲ - م ا لا)$$

ہے۔

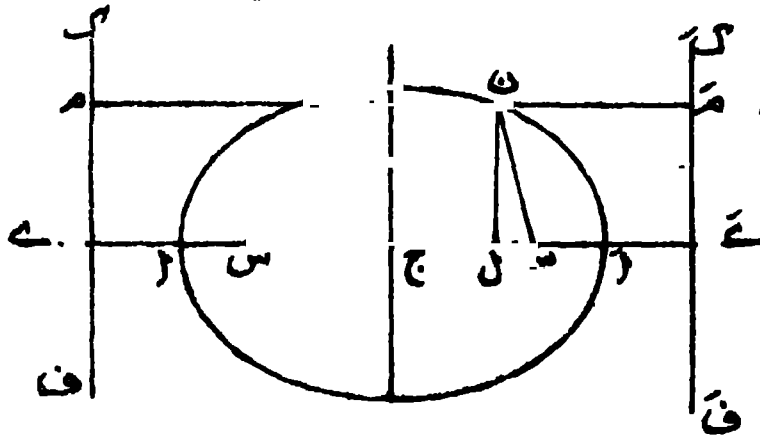
۷۵ ـــ ثابت کرو کہ $ما^۲ - ۴ ا لا = ۰$ میں ایسے بیشمار مثلث کھینچے جا سکتے ہیں جو $لا^۲ - ۴ب ما = ۰$ کے لحاظ سے خود قطبی ہوں۔ نیز ثابت کرو کہ مثلثوں کے ہندسی مرکزوں کا طریق $۳ما^۲ = ۴ ا لا$ ہے۔

(۱۴۴)

چھٹا باب

قطع ناقص

تعریف۔ قطع ناقص ایک نقطہ کا طریق ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ، ایک ثابت خط سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے جو اکائی سے کم ہوتی ہے۔ ثابت نقطہ کو ماسکہ اور ثابت خط کو مرتب کہتے ہیں۔

۱۰۹۔ ناقص کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ س ماسکہ اور ک ف مرتب ہے۔

س سے، مرتب پر عمود کھینچو۔
ے س کو ا پر اس طرح تقسیم کرو کہ س ا : ا ے = دی ہوئی نسبت = ز : ۱ (فرض کرو)۔
ے س ممدودہ میں ایک ایسا نقطہ اَ ہوگا کہ

س اَ : ے اَ = ز : ۱

(۱۲۵) فرض کرو کہ ا اَ کا نقطہ وسطی ج ہے اور ا اَ = ۲ ا،
تب ا س = ز × ے ا ، اور س اَ = ز × ے اَ

∴ ا س + س اَ = ز (ے ا + ے اَ)

∴ ۲ ا ج = ۲ ز × ے ج

∴ ے ج = ا/ز ، .... (۱)

نیز س اَ - س ا = ز (ے اَ - ے ا)

یا ا اَ - ۲ ا س = ز × ا اَ

∴ س ج = ز × ا ج = ا ز ، .... (۲)

اب فرض کرو کہ ج کو مبدا، ج اَ کو محور لا، اور ج اَ کے عمود وار ایک خط کو محور ما قرار دیا گیا ہے۔
فرض کرو کہ منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدد (لا، ما) ہیں تب شکل میں

س ن۲ = ز۲ × ن م۲

∴ س ل۲ + ل ن۲ = ز۲ × ے ل۲

اب س ل = س ج + ج ل = ا ز + لا ،

اور ے ل = ے ج + ج ل = ا/ز + لا

∴ (ا ز + لا)۲ + ما۲ = ز۲ (لا + ا/ز)۲

یا ما۲ + لا۲ (۱ - ز۲) = ا۲ (۱ - ز۲)

یا لا۲/ا۲ + ما۲/(ا۲ (۱ - ز۲)) = ۱ ، .... (۳)

لا = ۰ رکھنے سے ما = ± ا √(۱ - ز^۲) حاصل ہوتا ہے جس سے محور ما پر کے وہ مقطوعے حاصل ہوتے ہیں جو منحنی قطع کرتا ہے۔ اگر ان طولوں کو ± ب لکھا جائے تو

ب^۲ = ا^۲ (۱ - ز^۲)، .... (۴)

اور مساوات (۲) شکل

لا^۲/ا^۲ + ما^۲/ب^۲ = ۱، .... (۵)

اختیار کرتی ہے۔

(۱۴۶) وتر خاص وہ وتر ہے جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہوتا ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۵) میں لا = - ز ا رکھنا چاہئے۔

تب ما^۲ = ب^۲ (۱ - ز^۲) = ب^۴/ا^۲، (۴) سے

اس لیے نیم وتر خاص کا طول ب^۲/ا ہے۔

۱۱۰ — مساوات (۵) [دفعہ ۱۰۹] میں ما کی قیمت ب سے بڑی نہیں ہو سکتی کیونکہ اگر ایسا ہو تو لا^۲ منفی ہوگا، اسی طرح لا، ا سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ پس قطع ناقص ایک ایسا منحنی ہے جو تمام سمتوں میں محدود ہوتا ہے۔

اگر لا عدداً ا سے کم ہو تو ما^۲ مثبت ہوگا اور لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہونگی۔ اس لیے محور لا منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

اسی طرح اگر ما عدداً ب سے کم ہو تو لا^۲ مثبت ہوگا اور ما کی کسی مخصوص قیمت کے لیے لا کی دو قیمتیں حاصل ہونگی جو مساوی اور

مختلف العلامت ہوں گی ۔ اس لیے محور ما منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے ۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر محور لا پر نقطے سَ، ےَ ایسے لیے جائیں کہ ج سَ = س ج اور ج ےَ = ے ج تو نقطہ سَ بھی منحنی کا ماسکہ ہوگا اور ےَ میں سے گذرنیوالا وہ خط جو ج ےَ پر عمود ہو متناظر مرتب ہوگا ۔

اگر منحنی پر کوئی نقطہ (لاَ، ماَ) ہو تو محدد (لاَ، ۔ماَ) مساوات $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کو پورا کرینگے اور یہ ظاہر ہے کہ ایسی صورت میں محدد (۔لاَ، ۔ماَ) بھی مساوات کو پورا کرینگے اور اس لیے نقطہ (۔لاَ، ۔ماَ) بھی منحنی پر ہوگا۔ لیکن نقطے (لاَ، ماَ) اور (۔لاَ، ۔ماَ) مرکز میں سے گذرنے والے ایک خط مستقیم پر ہیں اور مبداء سے مساوی فاصلوں پر ہیں ۔ پس مبداء ہر اُس وتر کی تنصیف کرتا ہے جو اس میں سے گذرتا ہے اور اس لیے اس کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں ۔

وہ وتر جو ماسکوں میں سے گذرتا ہے محور اعظم کہلاتا ہے اور وہ وتر جو مرکز میں سے گذر کر محور اعظم پر عمود ہوتا ہے محور اصغر کہلاتا ہے ۔

(۱۴۷) ۱۱۱ ۔ ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلے معلوم کرنا ۔

دفعہ ۱۰۹ کی شکل میں چونکہ س ن = ز × ن م اس لیے

$$س ن = ز × ے ل = ز (ے ج + ج ل) = ز (\frac{ا}{ز} + لا) = ا + ز لا$$

$$نیز\ سَ ن = ز × ل ےَ = ز (ج ےَ ۔ ج ل) = ا ۔ ز لا$$

$$\therefore\ س ن + سَ ن = ۲ ا$$

بعض اوقات ناقص کی یہ تعریف کی جاتی ہے کہ وہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے ۔

اس تعریف سے منحنی کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مستقل مجموعہ ۲ ا ہے۔ فرض کرو کہ دو ثابت نقطوں کے درمیان فاصلہ ۲ ا ز ہے۔

ان ثابت نقطوں کو ملانے والے خط کے وسطی نقطہ کو مبدا قرار دو۔ فرض کرو کہ یہ خط اور اس کے عمود وار دوسرا خط محاور لا اور ما ہیں۔ تب دی ہوئی شرط سے

$$\sqrt{(\text{لا} - \text{ا ز})^2 + \text{ما}^2} + \sqrt{(\text{لا} + \text{ا ز})^2 + \text{ما}^2} = ۲\,\text{ا}$$

اس کو منطق بنانے سے $\text{ما}^2 + \text{لا}^2(۱ - \text{ز}^2) = \text{ا}^2(۱ - \text{ز}^2)$

اور یہ وہی مساوات ہے جو سابق میں حاصل ہو چکی ہے۔

۱۱۲ — ناقص کی قطبی مساوات جبکہ مرکز کو قطب کے طور پر لیا جائے مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ میں لا کی بجائے ر جم طہ اور ما کی بجائے ر جب طہ لکھنے سے حاصل ہوگی۔ اس لیے یہ مساوات

$$\frac{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ}}{\text{ب}^2} = ۱$$

یا

$$\frac{۱}{\text{ر}^2} = \frac{\text{جم}^2\,\text{طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2\,\text{طہ}}{\text{ب}^2}, \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے۔ اس مساوات کو شکل

$$\frac{۱}{\text{ر}^2} = \frac{۱}{\text{ا}^2} + \left(\frac{۱}{\text{ب}^2} - \frac{۱}{\text{ا}^2}\right)\text{جب}^2\,\text{طہ}, \quad \ldots\ldots (۲)$$

میں لکھا جا سکتا ہے اب چونکہ $\frac{۱}{\text{ب}^2} - \frac{۱}{\text{ا}^2}$ مثبت ہے ہم مساوات (۲) سے دیکھتے ہیں کہ $\frac{۱}{\text{ر}^2}$ کی کم سے کم قیمت $\frac{۱}{\text{ا}^2}$ ہے اور $\frac{۱}{\text{ر}^2}$ بڑھتا ہے جیسے (۱۴۸)

$ط$ صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے - نیز $\frac{1}{ا^2}$ کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{1}{ب^2}$ ہے - اس لیے سمتی نصف قطر $ا$ سے $ب$ تک گھٹتا ہے جیسے $ط$ صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے -

ہم معلوم کر چکے ہیں کہ ناقص پر کے تمام نقطوں کے لیے

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱ = ۰$$

اسی طریقہ پر جو دفعہ ۹۲ میں اختیار کیا گیا تھا یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر منحنی کے اندر کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱$ منفی ہوگا اور اگر منحنی کے باہر کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱$ مثبت ہوگا -

۱۱۴ — ایک ناقص اور ایک معلومہ خطِ مستقیم کے نقاط تقاطع معلوم کرنا اور وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خط ایک ناقص کو مس کرے -

[نوٹ: ہم آیندہ ناقص کی مساوات کو ہمیشہ $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ لینگے اِلّا آنکہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو -]

فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات

$$ما = م لا + ج \text{،} \quad \dots\dots\dots\dots (۱)$$

ہے -

اُن نقطوں پر جو خطِ مستقیم اور ناقص میں مشترک ہیں دونوں رشتے پورے ہوتے ہیں۔ پس مشترک نقطوں پر

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{(م لا + ج)^2}{ب^2} = ۱$$

یا $لا^2 (ب^2 + ا^2 م^2) + ۲ م ج ا^2 لا + ا^2 (ج^2 - ب^2) = ۰ \quad ...(۲)$

یہ ایک دو درجی مساوات ہے اور ہر دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں حقیقی، منطبق، یا خیالی۔

پس لا کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے جواب میں ما کی دو قیمتیں مساوات (۱) سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۱۴۹) مساوات (۲) کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہونگی اگر

$$ا^2 (ج^2 - ب^2)(ب^2 + ا^2 م^2) = م^2 ج^2 ا^4$$

یعنے اگر $ج^2 = ا^2 م^2 + ب^2$

لا کی دو قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو (۱) کی رو سے ما کی دو قیمتیں بھی ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہییں۔

پس وہ دو نقطے جنمیں ناقص، خط مستقیم سے منقطع ہوتا ہے منطبق ہوں گے اگر

$$ج = \sqrt{ا^2 م^2 + ب^2} ،$$

اس لیے وہ خط جس کی مساوات

$$ما = م لا + \sqrt{ا^2 م^2 + ب^2} ، \quad ....(۳)$$

ہے م کی تمام قیمتوں کے لیے ناقص کو مس کرے گا۔

چونکہ (۳) میں علامت جذر کے قبل مثبت یا منفی کوئی علامت

رکھی جا سکتی ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ م کی ہر قیمت کے لیے ناقص کے دو مماس ہیں یعنے کسی دئے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی دو مماس ہوتے ہیں۔ یہ دو مماس ناقص کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہوتے ہیں۔

۱۱۵ ۔ ناقص پر کے دو نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات معلوم کرنا اور کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ناقص پر کے دو نقطوں کے محدد (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) ہیں۔

مساوات

$$\frac{(\text{لا}-\text{لاَ})(\text{لا}-\text{لاً})}{\text{ا}^2}+\frac{(\text{ما}-\text{ماَ})(\text{ما}-\text{ماً})}{\text{ب}^2}=\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}-1, \quad \ldots\ldots (1)$$

مختصر کرنے پر پہلے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے وہ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

اس مساوات میں اگر لا کی بجائے لاَ اور ما کی بجائے ماَ رکھا جائے تو دائیں جانبی رکن متماثلاً معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن بھی معدوم ہوتا ہے کیونکہ نقطہ (لاَ، ماَ) ناقص پر ہے۔

پس نقطہ (لاَ، ماَ) خط (۱) پر ہے اور اسی طرح (لاً، ماً) بھی اس خط پر ہے۔

اس لیے مساوات (۱) اُس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) میں سے گذرتا ہے۔

یہ مساوات شکل

$$\frac{\text{لا}(\text{لاَ}+\text{لاً})}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}(\text{ماَ}+\text{ماً})}{\text{ب}^2}=1+\frac{\text{لاَ}\,\text{لاً}}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ماَ}\,\text{ماً}}{\text{ب}^2}, \quad \ldots\ldots (2) \qquad (150)$$

میں لکھی جا سکتی ہے۔

(لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۲) میں لاَ = لاَ اور ماَ = ماَ رکھنا چاہتے ہیں، چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا\,لاَ}{ا^2} + \frac{ما\,ماَ}{ب^2} = ۱ \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

نتیجہ صریح ۱ — محور اعظم کے سروں کے محدد علی الترتیب (ا، ۰) اور (-ا، ۰) ہیں اور (۳) سے اِن نقطوں پر کے مماس لا = ا اور لا = -ا ہیں۔

پس محور اعظم کے سروں پر کے مماس محور اصغر کے متوازی ہیں۔
اسی طرح محور اصغر کے سروں پر کے مماس محور اعظم کے متوازی ہیں۔

نتیجہ صریح ۲ — نقطہ (لاَ، ماَ) پر کا مماس نقطہ (-لاَ، -ماَ) پر کے مماس کے متوازی ہوتا ہے اور یہ دو نقطے ایک خطِ مستقیم پر ہوتے ہیں جو مرکز میں سے گذرتا ہے۔

پس ناقص کے مرکز میں سے گذرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

۱۱۶ — وہ شرط معلوم کرنا کہ خط ل لا + م ما + ن = ۰ ناقص کو مس کرے۔

خطِ مستقیم $\quad$ ل لا + م ما + ن = ۰، $\quad \ldots\ldots\ldots (۱)$

ناقص $\quad \frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \text{،} \quad \ldots\ldots (۲)$

کو جہاں قطع کرتا ہے اُن نقطوں کو مبدا سے ملانے والے خطوں کی مساوات [دفعہ ۳۸]

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - \left(\frac{ل\,لا + م\,ما}{ن}\right)^2 = ۰ \text{،} \quad \ldots\ldots (۳)$$

ہے -

اگر خط مستقیم (۲) ناقص کو منطبق نقطوں پر قطع کرے تو مساوات (۱۵۱)
(۳) منطبق خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ اس لیے (۳) کا دائیں جانبی
رکن ایک کامل مربع ہونا چاہیئے، اس کے لیے شرط

$$\left(\frac{1}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ل}^2}{\text{ن}^2}\right)\left(\frac{1}{\text{ب}^2}-\frac{\text{م}^2}{\text{ن}^2}\right)=\frac{\text{ل}^2\text{م}^2}{\text{ن}^4}$$

ہے۔ اس لیے مطلوبہ شرط ہے

$$\text{ا}^2\text{ل}^2+\text{ب}^2\text{م}^2=\text{ن}^2 \text{، } \qquad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

نتیجہ صریح ـ خط لا جم عہ + ما جب عہ − ع = ۰ ناقص کو مس کرے گا اگر

$$\text{ا}^2\text{جم}^2\text{عہ}+\text{ب}^2\text{جب}^2\text{عہ}=\text{ع}^2 \text{، } \qquad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

۱۱۷ ـ ناقص کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔

ناقص کے کسی نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2}=1$$

ہے۔ عماد وہ خط ہے جو نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذر کر مماس پر عمود ہوتا ہے۔
اس لیے اس کی مساوات [دفعہ ۳۰]

$$\frac{(\text{لا}-\text{لاَ})}{\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^2}}=\frac{\text{ما}-\text{ماَ}}{\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^2}} \text{، }$$

ہے۔

مثالیں

۱ ـ حسب ذیل ناقصوں کے خروج المرکز اور ماسکوں کے محدد معلوم کرو۔

(۱) ۲لا² + ۳ما² − ۱ = ۰ ، (۲) ۸ (لا − ۱)² + ۶ (ما + ۱)² − ۱ = ۰

جواب: (۱) ۱/√۳ ، (± ۱/√۶ ، ۰) ، (۲) ، ۱/۲ ، (۱ ، −۱ ± ۱/۱۲ √۶)

۲ ـــ مثال ۱ کے ناقصوں کے وتر خاص کے طول معلوم کرو۔

جواب: ۲/۳ √۲ اور ۱/۴ √۶

۳ ـــ ثابت کرو کہ خط ما = لا + √(۵/۶) ، ناقص ۲لا² + ۳ما² = ۱ کو مس کرتا ہے۔

۴ ـــ ثابت کرو کہ خط ۳ما = لا − ۳ ، منحنی ۴لا² − ۳ما² − ۲لا = ۰ کو دو نقطوں پر جو محور ما سے مساوی فاصلوں پر ہیں قطع کرتا ہے۔

۵ ـــ نقطہ (۲ ، ۱) ناقص ۲لا² + ۳ما² − ۱۲ = ۰ کے باہر ہے یا اندر؟

۶ ـــ لا²/و² + ما²/ب² = ۱ کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محور لا کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتے ہیں۔ (۱۵۲)

۷ ـــ ۲لا² + ۳ما² = ۶ کے وتر خاص کے سروں پر کے (۱) مماسوں کی مساواتیں اور (۲) عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

چار نقطے (± ۱ ، ± ۲/۳ √۳) ہیں۔

۸ ـــ لا²/و² + ما²/ب² = ۱ کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محوروں پر مساوی مقطوعے قطع کرتے ہیں۔

جواب: لا ± ما ± √(و² + ب²) = ۰

۹ ـــ ثابت کرو کہ مساوات ۴لا² + ۲ما² = ۶لا ایک ناقص کو تعبیر

کرتی ہے جس کا خروج المرکز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ہے اور ثابت کرو کہ مبدا محور اصغر کے ایک سرے پر ہے۔

۱۰۔ اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (-۱، ۱) مرتب ۴ لا - ۳ ما = ۰ اور خروج المرکز $\frac{5}{4}$ ہے۔

جواب: ۲۰ لا^2 + ۲۴ لا ما + ۲۷ ما^2 + ۲۷ (لا - ما + ۱) = ۰

۱۱۔ اگر ایک ناقص کے وتر خاص کے سرے پر کا عماد محور اصغر کے ایک سرے میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ منحنی کا خروج المرکز مساوات ز^4 + ز^2 - ۱ = ۰ سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۲۔ اگر کسی معیّن م ن کو خارج کیا جائے اور وہ س میں سے گذرنے والے وتر خاص کے سرے پر کے مماس سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ق کا معین فاصلہ س ن کے مساوی ہے۔

۱۳۔ معلومہ طول کے ایک خطِ مستقیم کے سرے، دو ثابت خطوطِ مستقیم و ا، و ب پر ہیں جو علی القوائم ہیں۔ ثابت کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ج کا راہ ایک ناقص ہے جس کے نیم محور علی الترتیب ج ا اور ج ب کے مساوی ہیں۔

۱۴۔ ایک ناقص کا کوئی مماس محور اعظم کے سروں پر کے مماسوں سے نقطوں ت، تَ پر منقطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ت تَ ہے ماسکوں میں سے گذرے گا۔

[کیونکہ $\frac{لا لاَ}{ا^2} + \frac{ما ماَ}{ب^2} - ۱ = ۰$، خط لا = ا کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں

$ما = \frac{ب^2}{ماَ}\left(۱ - \frac{لاَ}{ا}\right)$ اور خط لا = -ا کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں $ما = \frac{ب^2}{ماَ}\left(۱ + \frac{لاَ}{ا}\right)$

پس وہ دائرہ جس کا قطر ت تَ ہے

$$(لا - ا)(لا + ا) + \left\{ما - \frac{ب^2}{ماَ}\left(۱ - \frac{لاَ}{ا}\right)\right\}\left\{ما - \frac{ب^2}{ماَ}\left(۱ + \frac{لاَ}{ا}\right)\right\} = ۰$$

ہے جو ما = ۰ کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں

$$لا^2 - ا^2 + \frac{ب^2}{ما^2}\left(1 - \frac{لاَ}{ا^2}\right) = 0$$

یعنے $لا^2 - ا^2 + ب^2 = 0$ کیونکہ (لاَ، ماَ) ناقص پر ہے۔]

۱۱۸ ۔ کسی نقطہ سے ایک قطع ناقص کے دو مماس کھینچے جاسکتے ہیں جو حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں گے بموجب اس کے کہ نقطہ منحنی کے باہر، اس کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔ (۱۵۳)

وہ خط جس کی مساوات

$$ما = م لا + \sqrt{ا^2 م^2 + ب^2}، \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ [دفعہ ۱۱۴]۔

خط (۱) مخصوص نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرے گا اگر

$$ماَ = م لاَ + \sqrt{ا^2 م^2 + ب^2}$$

یعنے اگر $(ماَ - م لاَ)^2 - ا^2 م^2 - ب^2 = 0$

یا $م^2 (لاَ^2 - ا^2) - 2م لاَ ماَ + ماَ^2 - ب^2 = 0، \ldots (2)$

مساوات (۲) م میں ایک دو درجی مساوات ہے اور اس سے ناقص کے ان مماسوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرتے ہیں۔ چونکہ دو درجی مساوات کی اصلیں دو ہوتی ہیں اس لیے دو مماس نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذریں گے۔

مساوات (۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہیں بموجب اس کے کہ

$(لاَ^2 - ا^2)(ماَ^2 - ب^2) - لاَ^2 ماَ^2$

منفی، صفر، یا مثبت ہو، یا بموجب اس کے کہ $\frac{لاَ^۲}{ا^۲} + \frac{ماَ^۲}{ب^۲} - ۱$ مثبت، صفر، یا منفی ہو۔ یعنے بموجب اس کے کہ نقطہ (لاَ، ماَ) ناقص کے باہر، اسکے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

۱۱۹ ـــ کسی نقطہ سے ایک ناقص کے دو مماس کھینچے گئے ہیں۔ ان مماسوں کے نقاط تماس کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ لاَ، ماَ اس نقطہ کے محدد ہیں جس سے مماس کھینچے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ مماسوں کے نقاط تماس کے محدد (ھ، ک) اور (ھَ، کَ) ہیں۔ (ھ، ک) اور (ھَ، کَ) پر کے مماسوں کی مساواتیں (۱۵۴)

$$\frac{لا ھ}{ا^۲} + \frac{ما ک}{ب^۲} = ۱،$$

اور

$$\frac{لا ھَ}{ا^۲} + \frac{ما کَ}{ب^۲} = ۱$$

ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ (لاَ، ماَ) ان دونوں مماسوں پر ہے۔

$$\therefore \frac{لاَ ھ}{ا^۲} + \frac{ماَ ک}{ب^۲} = ۱، \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور

$$\frac{لاَ ھَ}{ا^۲} + \frac{ماَ کَ}{ب^۲} = ۱، \ldots\ldots\ldots (۲)$$

لیکن (۱) اور (۲) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ (ھ، ک) اور (ھَ، کَ) دونوں اس خطِ مستقیم پر ہیں جس کی مساوات

$$\frac{لاَ لا}{ا^۲} + \frac{ماَ ما}{ب^۲} = ۱ \ldots\ldots\ldots (۳)$$

ہے۔ پس (۳) اُس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاط تماس کو ملاتا ہے

اگر کسی نقطہ ن سے ایک ناقص کے دو مماس کھینچے جائیں تو اِن مماسوں کے نقاط تماس کو ملانے والے خط کو ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی کہا جاتا ہے۔

۱۲۰ ـــ اگر ایک ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی نقطہ ق میں سے گذرے تو نقطہ ق کا قطبی، ن میں سے گذرے گا۔

اِس کو ٹھیک اُسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے جیسا کہ دفعہ ۸۰ میں ثابت کیا گیا تھا۔

۱۲۱ ـــ ایک ناقص کے ایسے دو مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا جو باہم علی القوائم ہوں۔

وہ خط جس کی مساوات

$$ما = م لا + \sqrt{ا^2 م^2 + ب^2} \text{، } \ldots\ldots (۱)$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔

اگر ہم لا اور ما کو معلوم فرض کریں تو اِس مساوات سے اُن مماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں۔

اِس مساوات کو منطبق بنانے پر وہ

(۱۵۵)

$$م^2 (لا^2 - ا^2) - ۲ م لا ما + ما^2 - ب^2 = ۰ \text{، } \ldots\ldots (۲)$$

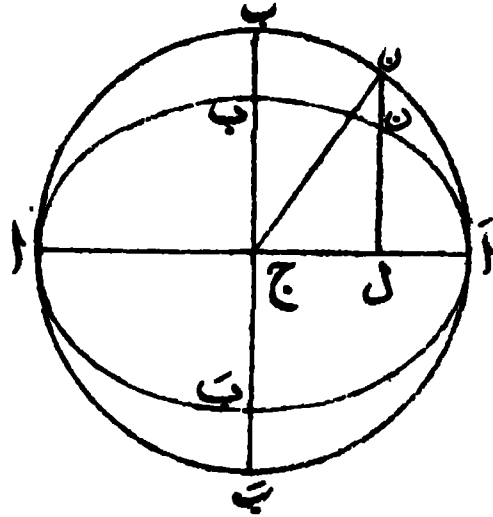
ہو جاتی ہے

فرض کرو کہ (۲) کی اصلیں $م_۱$ اور $م_۲$ ہیں، تب اگر مماس علی القوائم ہیں تو $م_۱ م_۲ = -۱$ اور اس لیے

$$\frac{\text{ما}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}} = -۱$$

یا $\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = \text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}$، .... (۳)

اس لیے مطلوبہ طریق ایک دائرہ ہے۔
اِس دائرہ کو ناقص کا مرتب دائرہ کہتے ہیں۔

۱۲۲ ــــ وہ دائرہ جو ایک ناقص کے محور اعظم پر اس کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو امدادی دائرہ کہلاتا ہے۔

اگر ناقص کی مساوات $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ۱$، .... (۱)

ہو تو امدادی دائرہ کی مساوات $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ا}^{2}} = ۱$، .... (۲)

ہوگی۔

(۱۰۶) اِس لیے اگر ناقص کے کسی معین ن ل کو خارج کیا جائے اور وہ امدادی دائرہ سے ن پر ملے تو (۱) اور (۲) سے

$$\frac{\text{ل ن}^2}{\text{ب}^2} = 1 - \frac{\text{ج ل}^2}{\text{ا}^2} = \frac{\text{ل ن}^2}{\text{ا}^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ل ن}}{\text{ل ن}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

پس ناقص کے اور دائرہ کے معین ایک دوسرے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتے ہیں۔

زاویہ ا ج ن کو نقطہ ن کا خارج المرکز زاویہ کہتے ہیں۔ امدادی دائرہ کے نقطہ ن کو ناقص کے نقطہ ن کا جواب کہتے ہیں۔

اگر زاویہ ا ج ن، فہ ہو تو ن کے محدد ا جم فہ، ا جب فہ ہوں گے اور ن کے محدد ا جم فہ، ب جب فہ ہوں گے۔

۱۲۳ — دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے دئے گئے ہیں۔ ان کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ان دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے طہ_1، طہ_2 ہیں، تب ان کے محدد علی الترتیب ا جم طہ_1، ب جب طہ_1 اور ا جم طہ_2، ب جب طہ_2 ہیں۔

پس ان کو ملانے والے خط کی مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & 1 \\ \text{ا جم طہ}_1 & \text{ب جب طہ}_1 & 1 \\ \text{ا جم طہ}_2 & \text{ب جب طہ}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad [\text{دفعہ } 24]$$

ہے۔

$$\therefore \quad \frac{\text{لا}}{\text{ا}}(\text{جب طہ}_1 - \text{جب طہ}_2) + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}(\text{جم طہ}_2 - \text{جم طہ}_1) - \text{جب}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2) = 0,$$

اس کو $\text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2)$ سے تقسیم کرنے پر مساوات

$\frac{لا}{ا}$ جم $\frac{1}{2}$ (طہ۱ + طہ۲) + $\frac{ما}{ب}$ جب $\frac{1}{2}$ (طہ۱ + طہ۲) = جم $\frac{1}{2}$ (طہ۱ − طہ۲) ... (۱)

حاصل ہوتی ہے جو مطلوبہ مساوات ہے ۔

طہ۱ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۱) میں طہ۲ = طہ۱ رکھنا ہوگا چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{لا}{ا}$ جم طہ۱ + $\frac{ما}{ب}$ جب طہ۱ = ۱ .... (۲)

۱۲۴ ۔ دفعہ سابق کی مساوات (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ناقص کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ مستقل ہو اور ۲ عہ کے مساوی ہو تو ان نقطوں کو ملانے والا وتر ہمیشہ خط (۱۵۷

$\frac{لا}{ا}$ جم عہ + $\frac{ما}{ب}$ جب عہ = ۱

کے متوازی ہوتا ہے ۔ یعنے وتر ہمیشہ اُس نقطہ پر کے مماس کے متوازی ہوتا ہے جس کا خارج المرکز زاویہ عہ ہے ۔

اس کے بالعکس ایک ناقص کے متوازی وتروں کے نظام کے لیے کسی وتر کے سروں کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے ۔

۱۲۵ ۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات اِس نقطہ کے خارج المرکز زاویہ کی رقوم میں معلوم کرنا ۔

فرض کرو کہ ناقص کے نقطہ ن کا خارج المرکز زاویہ طہ ہے ۔
ن پر کے مماس کی مساوات (دفعہ ۱۲۳)

$\frac{لا}{ا}$ جم طہ + $\frac{ما}{ب}$ جب طہ = ۱

ہے۔ اس خط کی مساوات جو نقطہ (ا جم طہ، ب جب طہ) میں سے گذرتا ہے اور مماس پر عمود ہے [دفعہ ۳۰ کی بموجب]

$$(\text{لا} - \text{ا جم طہ})\frac{\text{ا}}{\text{جم طہ}} - (\text{ما} - \text{ب جب طہ})\frac{\text{ب}}{\text{جب طہ}} = ۰ ،$$

یا
$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب طہ}} = \text{ا}^{۲} - \text{ب}^{۲}$$

ہے۔

اگر طہ۱، طہ۲ پر کے مماسوں کا نقطہ تقاطع (لاَ، ماَ) ہو تو

$$\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}}\,\text{جم طہ}_{۱} + \frac{\text{ماَ}}{\text{ب}}\,\text{جب طہ}_{۱} = ۱ ،$$

اور
$$\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}}\,\text{جم طہ}_{۲} + \frac{\text{ماَ}}{\text{ب}}\,\text{جب طہ}_{۲} = ۱ ،$$

پس
$$\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب طہ}_{۲} - \text{جب طہ}_{۱}}{\text{جب}\,(\text{طہ}_{۲} - \text{طہ}_{۱})} = \frac{\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}(\text{طہ}_{۱} + \text{طہ}_{۲})}{\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}(\text{طہ}_{۱} - \text{طہ}_{۲})}$$

اور
$$\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جم طہ}_{۱} - \text{جم طہ}_{۲}}{\text{جب}\,(\text{طہ}_{۲} - \text{طہ}_{۱})} = \frac{\tfrac{۱}{۲}\,\text{جب}\,\tfrac{۱}{۲}(\text{طہ}_{۱} + \text{طہ}_{۲})}{\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}(\text{طہ}_{۱} - \text{طہ}_{۲})}$$

[یا چونکہ وتر (طہ۱، طہ۲) نقطہ (لاَ، ماَ) کا قطبی ہے اس لیے دفعہ ۱۲۳ کی مساوات (۱) وہی ہے جو

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^{۲}} - ۱ = ۰$$

ہے۔ پس اوپر کا نتیجہ فوراً لکھ لیا جا سکتا ہے]

(۱۵۸) طہ۱، طہ۲ پر کے عادوں کے نقطہ تقاطع کے محدد

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}} \times \frac{\text{جم طہ}_1 \text{ جم طہ}_2 \text{ جم } \frac{1}{2}(\text{طہ}_1 + \text{طہ}_2)}{\text{جم } \frac{1}{2}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2)}$$

$$\text{ما} = \frac{\text{ب}^2 - \text{ا}^2}{\text{ب}} \times \frac{\text{جب طہ}_1 \text{ جب طہ}_2 \text{ جب } \frac{1}{2}(\text{طہ}_1 + \text{طہ}_2)}{\text{جم } \frac{1}{2}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2)}$$

حاصل ہوں گے۔

مثال ــ متوازی وتروں کے ایک نظام کے سروں پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا۔

چونکہ $\text{طہ}_1 + \text{طہ}_2 =$ مستقل $= 2\text{عہ}$ (فرض کرو)

اس لیے اوپر کی مساواتوں سے

$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم عہ}} + \frac{\text{ب ما}}{\text{جب عہ}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2) \frac{\text{جم } 2\text{عہ}}{\text{جم } \frac{1}{2}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2)}, \quad \ldots\ldots (1)$$

اور

$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم عہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب عہ}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2) \frac{\text{جم}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2)}{\text{جم } \frac{1}{2}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2)}$$

$$= (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\left\{2 \text{ جم } \frac{1}{2}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2) - \frac{1}{\text{جم } \frac{1}{2}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2)}\right\}$$

پہلی مساوات سے $\text{جم } \frac{1}{2}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2)$ کی بجائے اندراج کرو تو کچھ اختصار کے بعد مساوات

$$\text{ا}^2 \text{لا}^2 + 2 \text{ ا ب لا ما قم } 2\text{عہ} + \text{ب}^2 \text{ما}^2 = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2) \text{ جم}^2 \text{ } 2\text{عہ}$$

حاصل ہو گی۔

۱۲۶ ــ اب ہم ناقص کے بعض ہندسی خواص ثابت کرینگے۔

فرض کرو کہ ن پر کا مماس محوروں لا اور ما سے علی الترتیب نقطوں ت، ت' پر ملتا ہے۔

اور فرض کرو کہ عماد محوروں سے نقطوں گ، گَ پر ملتا ہے ۔ ن پر کے عماد پر س سے، سَ سے، ج ک عمود کھینچو ۔ نیز ج ع کو ن پر کے مماس کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ عماد سے ف پر ملتا ہے اور ماسکی فاصلہ س ن سے ع پر ملتا ہے ۔

تب اگر نقطہ ن کے محدد لاَ، ماَ ہوں تو ن پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots (1)$$

ہوگی ۔ یہ مماس محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ما = ۰ ۔ اور اس نقطہ پر (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} = 1$$

$$\therefore \frac{\text{ج ل} \times \text{ج ت}}{\text{ج ا}^2} = 1 \text{، یا ج ل} \times \text{ج ت} = \text{ج ا}^2 \quad \ldots (\text{عہ})$$

اسی طرح $\text{ل ن} \times \text{ج ت} = \text{ج ب}^2 \quad \ldots\ldots (\text{ب})$

ن پر کے عماد کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^2}} \quad \ldots\ldots (2)$$

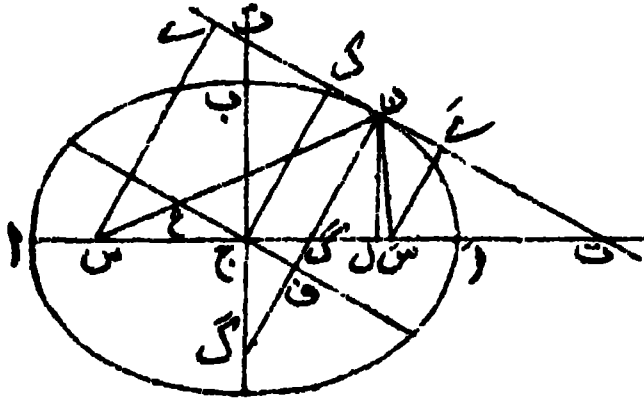
ہے ۔ یہ عماد محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ما = ۰ ۔ اور اس لیے (۲) سے

$$\text{لا} - \text{لاَ} = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\text{لاَ} \text{، یا لا} = \text{لاَ}\left(1 - \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\right) = \text{ز}^2 \times \text{لاَ}$$

$$\therefore \text{ج گ} = \text{ز}^2 \times \text{ج ل} \quad \ldots\ldots (\text{جہ})$$

(159)

نیز چونکہ

س̄ گ = س ج + ج گ = ا ز + ز² لا̄ ، اور گ س̄ = ا ز - ز² لا̄

$$\therefore\ \frac{\text{س گ}}{\text{گ س̄}} = \frac{\text{ا ز + ز² لا̄}}{\text{ا ز - ز² لا̄}} = \frac{\text{ا + ز لا̄}}{\text{ا - ز لا̄}} = \frac{\text{س ن}}{\text{س̄ ن}}$$

اِس لیے ن گ، زاویہ س ن س̄ کی تنصیف کرتا ہے۔ ...(ضہ)

پھر چونکہ ن گ² = گ ل² + ل ن² = (ج ل - ج گ)² + ل ن²

$$\therefore\ \text{ن گ}^2 = \text{ما̄}^2 + \text{لا̄}^2\,(\text{ا} - \text{ز}^2)^2$$

$$\text{یا}\qquad \text{ن گ} = \text{ب}^2\sqrt{\frac{\text{ما̄}^2}{\text{ب}^4} + \frac{\text{لا̄}^2}{\text{ب}^4}}$$

$$\text{اسی طرح}\qquad \text{ن گ} = \text{ا}^2\sqrt{\frac{\text{لا̄}^2}{\text{ا}^4} + \frac{\text{ما̄}^2}{\text{ب}^4}}$$

$$\text{اور}\qquad \text{ن ف} = \text{ک ج} = \frac{1}{\left(\frac{\text{ما̄}^2}{\text{ب}^4} + \frac{\text{لا̄}^2}{\text{ا}^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (۱۶۰)\qquad \text{(دفعہ ۱۳۱)}$$

∴ ن ف × ن گ = ب^۲، اور ن ف × ن گ = لو^۲ ...(صہ)
وہ خط جس کی مساوات

ما = م لا + √(لو^۲ م^۲ + ب^۲)، .... (۳)

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ پس اگر اس خط پر ماسکوں سے عمود س ے، سَ ےَ کھینچے جائیں تو [دفعہ ۳۱]

س ے = (−م و ز + √(لو^۲ م^۲ + ب^۲))/√(۱ + م^۲) اور سَ ےَ = (م و ز + √(لو^۲ م^۲ + ب^۲))/√(۱ + م^۲)

∴ س ے × سَ ےَ = (لو^۲ م^۲ + ب^۲ − م^۲ لو^۲ ز^۲)/(۱ + م^۲)، ..... (طہ)

پھر اُس خط کی مساوات جو س میں سے گذرتا ہے اور (۳) پر عمود ہے
م ما + لا + و ز = ۰، .... (۴)

ہے۔
(۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع سے کا طریق معلوم کرنے کے لیے م کو اِن دو مساواتوں سے ساقط کرنا چاہئے۔ یہ مساواتیں شکل

ما − م لا = √(لو^۲ م^۲ + ب^۲) اور م ما + لا = − و ز

میں لکھی جا سکتی ہیں۔ اِن مساواتوں کی طرفین کا مربع لیکر جمع کرو تو حاصل ہوگا

(لا^۲ + ما^۲)(۱ + م^۲) = لو^۲ م^۲ + ب^۲ + لو^۲ ز^۲ = لو^۲ (۱ + م^۲)

اس لیے سے کا طریق امدادی دائرہ ہے جس کی مساوات

لا^۲ + ما^۲ = لو^۲، .... (ظہ)

ہے۔
یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر ہم یہ فرض کرتے کہ سَ سے عمود کھینچا گیا ہے۔

۱۲۷ — فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ ہے اور فرض کرو کہ ن کا قطبی ق قَ ہے۔ فرض کرو کہ ق قَ محوروں سے ت، تَ پر ملتا ہے۔ س ے، سَ ےَ، ج ک، اور ن و کو ق قَ پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ ن و محوروں سے گ، گَ پر ملتا ہے۔ تب اگر ن کے محدد لاَ، ماَ ہوں تو ق قَ کی مساوات [دفعہ ۱۱۹]

$$\frac{لالاَ}{ا^2} + \frac{ماماَ}{ب^2} = ۱ ، \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہوگی۔ اس لیے ن و گ کی مساوات [دفعہ ۱۳۰] (۱۶۱)

$$\frac{لا - لاَ}{\frac{لاَ}{ا^2}} = \frac{ما - ماَ}{\frac{ماَ}{ب^2}} ، \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہوگی۔

(۱) اور (۲) سے پچھلی دفعہ کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

(ء) ج ل × ج ت = ج ا^۲، (ب) ل ن × ج تَ = ج ب^۲

(ج) ج گ = ز^۲ × ج ل اور (ض) ک ج × ن گ = ب^۲

مثالیں

۱ ـــ ثابت کرو کہ ایک ناقص کا ماسکہ، متناظر مرتب کا قطب ہوتا ہے ۔

۲ ـــ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے ایک مماس پر مرکز سے عمود گرایا جائے تو عمود کے پائین کے طریق کی مساوات $ر^2 = ا^2 جم^2 ط + ب^2 جب^2 ط$ ہوگی ۔

۳ ـــ ثابت کرو کہ ایک ناقص کے کوئی دو قطر جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں لیے جائیں تو اِن کے مربعوں کے مکافیوں کا مجموعہ مستقل ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۱۱۲] ۔

۴ ـــ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کو ایک ناقص میں بنایا جائے تو ثابت کرو کہ ضلعوں کے متوازی قطروں کے مکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوگا ۔

۵ ـــ ایک ناقص دو خطوط مستقیم کے درمیان جو باہم علی القوائم ہیں پھسلتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اِس کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے ۔ [دیکھو دفعہ ۱۲۱] ۔ (۱۶۲)

۶ ـــ اگر ایک ناقص کے محور اصغر پر دو ایسے نقطے سَ، ھَ لیے جائیں کہ سَ ج = ج ھَ = ج س جہاں ج مرکز اور س ماسکہ ہے تو ثابت کرو کہ ناقص کے کسی مماس پر سَ اور ھَ سے عمودوں کا مجموعہ مستقل ہے ۔

۷ ـــ ایک ناقص کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا فرق مستقل ہے ۔ ثابت کرو کہ اِن نقطوں پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے ۔

[اگر فہ + عہ اور فہ ـ عہ پر کے مماس (لاَ ، ماَ) پر ملیں تو $\frac{لاَ}{ا}$ = جم فہ قط عہ ،

$\frac{ماَ}{ب}$ = جب فہ قط عہ ـ طریق حاصل کرنے کے لیے فہ کو ساقط کرو ۔]

۸ ـــ ایک نقطہ ن کا قطبی محور اصغر کو ت پر قطع کرتا ہے اور ن سے قطبی پر کا عمود قطبی کو و پر قطع کرتا ہے اور محور اصغر کو گ پر ۔ ثابت کرو کہ ت، و، گ میں سے گذرنے والا دائرہ ماسکوں میں سے گذرے گا ۔

[ثابت کرو کہ ت ج × ج گ = س ج × ج س]

۹ــ ثابت کرو کہ خط ل لا + م ما + ن = ۰، منحنی

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$$

کا عماد ہے اگر

$$\frac{ا^2}{ل^2} + \frac{ب^2}{م^2} = \frac{(ا^2 - ب^2)^2}{ن^2}$$

[$\frac{ا لا}{جم ن} - \frac{ب ما}{جب ط} = ا^2 - ب^2$ کے ساتھ مقابلہ کرو تو $\frac{ل جم ط}{ا} = \frac{م جب ط}{ب}$

$= \frac{ن}{ا^2 - ب^2}$ پھر ط کو ساقط کرو۔]

۱۰ــ ایک ناقص کے ماسکوں سے (جس کا مرکز ج ہے) کسی نقطہ ن کے قطبی پر عمود ڈالا جائے تو یہ عمود خط ج ن سے مرتب پر ملیگا۔

۱۱ــ اگر ایک ناقص کے نقطہ ن کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ماسکوں س، ھ کے عمودی فاصلے ق پر کے عماد سے علی الترتیب س ن اور ھ ن کے مساوی ہوں گے۔

۱۲ــ اگر ایک ناقص کے نقطہ ن کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے عماد ایک ثابت دائرہ پر ملتے ہیں۔

۱۳ــ ثابت کرو کہ ایک ناقص میں بنائے ہوئے مثلث کا رقبہ

$$\frac{1}{2} ا ب \left\{ جب (بہ - جہ) + جب (جہ - عہ) + جب (عہ - بہ) \right\}$$

$$= - 2 ا ب \; جب \frac{1}{2}(بہ - جہ) \; جب \frac{1}{2}(جہ - عہ) \; جب \frac{1}{2}(عہ - بہ)$$

ہے جہاں عہ، بہ، جہ، مثلث کے راسوں کے خارج المرکز زاویئے ہیں۔

۱۲۸ــ ایک ناقص کے متوازی وتروں کے نظام کے نقاط وسطی کا طریق معلوم کرنا۔

(۱۶۳)

اُس وتر کی مساوات جو نقطوں ط_1 اور ط_2 کو ملاتا ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2)+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2)=\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ط}_1-\text{ط}_2)$$

ہے ۔ اگر یہ وتر $\text{ما}-\text{م}\,\text{لا}=0$ کے متوازی ہے تو

$$\text{م}=-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{مم}\,\frac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2)\,،\quad\ldots\ldots(1)$$

لیکن اگر وتر کا نقطہ وسطی (لا، ما) ہے تو

$$2\,\text{لا}=\text{ا}(\text{جم}\,\text{ط}_1+\text{جم}\,\text{ط}_2)=2\,\text{ا}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2)\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ط}_1-\text{ط}_2)$$

اور $$2\,\text{ما}=\text{ب}(\text{جب}\,\text{ط}_1+\text{جب}\,\text{ط}_2)=2\,\text{ب}\,\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2)\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ط}_1-\text{ط}_2)$$

پس $$\frac{\text{ما}}{\text{لا}}=\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2)$$

$$=-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2\,\text{م}}\,،\quad (1)\ \text{سے}$$

اِس لیے اُن تمام وتروں کے نقاط وسطی کا طریق جو خط ما = م لا کے متوازی ہیں وہ خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات

$$\text{ما}=-\frac{\text{ب}^2\,\text{لا}}{\text{ا}^2\,\text{م}}\,،\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ہے ۔

(۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ناقص کے تمام قطر (دفعہ ۱۰۲، تعریف) مرکز میں سے گذرتے ہیں ۔

مساوات (۲) کو شکل ما = مَ لا میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{م}\,\text{مَ}=-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\,،\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

رشتہ (۳) کے تشاکل سے یہ ظاہر ہے کہ وہ تمام وترجو مَ لاَ کے متوازی ہیں خط ما = م لا سے تنصیف ہوتے ہیں۔

پس اگر ناقص کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو یہ دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے گا۔

تعریف: دو قطر مزدوج کہلاتے ہیں جبکہ ہر ایک، دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے۔

(۱۶۴) **۱۲۹۔ کسی قطر کے ایک سرے پر کا مماس اُن وتروں کے متوازی ہوتا ہے جو اس قطر سے تنصیف ہوتے ہیں۔**

متوازی وتروں کے نظام کے تمام نقاط وسطی ایک قطر پر ہوتے ہیں۔ اس لیے متوازی مماسوں پر یعنے اُن متوازی وتروں پر جو ناقص کو منطبق نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔ غور کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ متوازی وترو نظام کے نقاط وسطی کا قطر اُن مماسوں کے نقاط تماس میں سے گذرتا ہے جو وتروں کے متوازی ہیں۔

مثال ۱۔ ناقص کے ایک قطر کے کسی نقطہ کا قطبی مزدوج قطر کے متوازی ہوتا ہے۔

کیونکہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرنے والا قطر

لا ماَ ـ ما لاَ = ۰.

اور (لاَ، ماَ) کا قطبی

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} - 1 = 0.$$

ہے۔ یہ مساواتیں شرط م مَ = $-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ کو پورا کرتی ہیں کیونکہ

$$\text{م} = \frac{\text{مَ}}{\text{لَ}} \quad \text{اور} \quad \text{مَ} = -\frac{\text{ب}^2\,\text{لَ}}{\text{ا}^2\,\text{مَ}}$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ناقص کے ایک وتر کا وسطی نقطہ (لَ، مَ) ہے تو

یہ وتر، نقطہ (لَ، مَ) کے قطبی کے متوازی ہے۔

اس لیے اُس وتر کی مساوات جس کا نقطہ وسطی (لَ، مَ) ہے

$$(\text{لا}-\text{لَ})\frac{\text{لَ}}{\text{ا}^2} + (\text{ما}-\text{مَ})\frac{\text{مَ}}{\text{ب}^2} = ۰$$

ہے۔

مثال ۲۔ اگر ایک ناقص کے وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گذریں تو اِن کے نقاط وسطی دوسرے ناقص پر ہوں گے۔

وہ وتر جس کا نقطہ وسطی (لَ، مَ) ہے

$$(\text{لا}-\text{لَ})\frac{\text{لَ}}{\text{ا}^2} + (\text{ما}-\text{مَ})\frac{\text{مَ}}{\text{ب}^2} = ۰، \quad [\text{مثال (۱)}]$$

ہے۔ اگر یہ وتر نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرے تو

$$(\text{ھ}-\text{لَ})\frac{\text{لَ}}{\text{ا}^2} + (\text{ک}-\text{مَ})\frac{\text{مَ}}{\text{ب}^2} = ۰$$

اور اس طرح نقطہ (لَ، مَ)، ناقص

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ھ}\,\text{لا}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ک}\,\text{ما}}{\text{ب}^2} = ۰$$

ہے۔

مثال ۳۔ ناقص پر کے اُن دو نقطوں کو ملانے والا خط جنکے

خارج المرکز زاویوں کا فرق مستقل ہو دوسرے ناقص کو لف کرتا ہے۔

نقطوں $ط_۱$ اور $ط_۲$ کو ملانے والے خط کی مساوات جبکہ $ط_۱ - ط_۲ = ۲$ عہ حسب ذیل ہے

$$\frac{لا}{ا} جم \frac{۱}{۲} (ط_۱ + ط_۲) + \frac{ما}{ب} جب \frac{۱}{۲} (ط_۱ + ط_۲) = جم\, عہ$$

اِس خط کا لفاف، $(ط_۱ + ط_۲)$ کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = جم^۲ عہ، \quad [\text{مثال ۲ صفحہ} \quad]$$

ہے۔

مثال ۴ ۔ اگر ایک ناقص میں ایک مثلث بنایا جائے اور اس کے دو اضلاع معلومہ خطوطِ مستقیم کے متوازی ہوں تو تیسرے ضلع کا لفاف ایک دوسرا ناقص ہوگا۔

فرض کرو کہ ف، ق، س کے خارج المرکز زاویے $ط_۱$، $ط_۲$، $ط_۳$ ہیں۔ (۱۶۵)
تب اگر ف ق اور ف س، معلومہ خطوں کے متوازی ہوں تو

$ط_۱ + ط_۲ =$ مستقل $= ۲$ عہ، اور $ط_۱ + ط_۳ =$ مستقل $= ۲$ بہ

پس $\quad ط_۲ - ط_۳ = ۲\ (عہ - بہ)$

اس لیے، بموجب مثال ۲، ق س کا لفاف

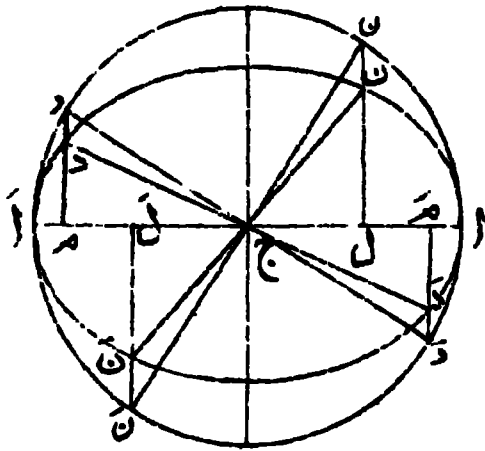
$$\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = جم^۲ (عہ - بہ)$$

ہے۔

۱۴۰ ۔ فرض کرو کہ مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سرے ن، د ہیں۔ فرض کرو کہ ن کے محدد لاَ، ماَ اور د کے محدد لاً، ماً ہیں۔ ج ن اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{م}{م'} = \frac{ل}{ل'} \quad \text{اور} \quad \frac{م}{م'} = \frac{ل}{ل'}$$

ہیں، اس لیے دفعہ ۱۲۸ (۵) کی رو سے $\frac{م م'}{ل ل'} = -\frac{ب^2}{ا^2}$

$$\therefore \quad \frac{ل ل'}{ا^2} + \frac{م م'}{ب^2} = ۰، \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اگر ن اور د کے خارج المرکز زاویے فہ، فہ' ہوں تو ل = ا جم فہ،
م = ب جب فہ، ل' = ا جم فہ'، م' = ب جب فہ' ۔ اِن قیمتوں کو (۱) میں
درج کرنے سے

$$\text{جم فہ جم فہ'} + \text{جب فہ جب فہ'} = ۰$$

یا
$$\text{فہ} \sim \text{فہ'} = \frac{\pi}{۲}$$

(۱۲۶) **پس ایک ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سِروں پر کے نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا فرق ایک قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔**

اگر ناقص کے قطروں ن ج ن' اور د ج د' کے جواب میں
امدادی دائرہ کے قطر ن ج ن'، د ج د' ہوں تو ن ج ن' اور د ج د'

باہم علی القوائم ہوں گے۔ اس لیے ن اور دَ کے محددوں کو فوراً ن یا نَ کے محددوں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

۱۳۱ — ثابت کرو کہ دو مزدوج نیم قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سرے ن، د ہیں۔
فرض کرو کہ ن کا خارج المرکز زاویہ فہ ہے تو د کا خارج المرکز زاویہ

فہ $\pm \frac{\pi}{2}$ ہوگا (دفعہ ۱۳۰)۔

ن کے محدد ا جم فہ، ب جب فہ اور د کے محدد ا جم (فہ $\pm \frac{\pi}{2}$)،
ب جب (فہ $\pm \frac{\pi}{2}$) ہوں گے۔

$$\therefore \quad \text{ج ن}^2 = \text{ا}^2 \text{ جم}^2 \text{ فہ} + \text{ب}^2 \text{ جب}^2 \text{ فہ}$$

$$\text{اور} \quad \text{ج د}^2 = \text{ا}^2 \text{ جم}^2 \left(\text{فہ} \pm \frac{\pi}{2}\right) + \text{ب}^2 \text{ جب}^2 \left(\text{فہ} \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \text{ج ن}^2 + \text{ج د}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$$

۱۳۲ — اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ایک ناقص کو مزدوج قطروں کے سروں پر مس کرے مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مزدوج قطر ن ج نَ، د ج دَ ہیں۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ناقص کو ن، نَ، د، دَ پر مس کرتا ہے ۴ ج ن × ج د جب ن ج د یا ۴ ج د × ج ف ہے جہاں ج ف، ج سے ن پر کے مماس پر عمود ہے۔

اب اگر ن کا خارج المرکز زاویہ فہ ہو تو د کا خارج المرکز زاویہ فہ $\pm \frac{\pi}{2}$ ہوگا۔

$\therefore$ ج دَ² = اُ² جم² (فہ ± $\frac{\pi}{2}$) + ب² جب² (فہ ± $\frac{\pi}{2}$)

یا ج دَ² = اُ² جب² فہ + ب² جم² فہ ، ...... (۱)

(۱۲۷) ن پر کے مماس کی مساوات (دفعہ ۱۲۳)

$\frac{لا}{ا}$ جم فہ + $\frac{ما}{ب}$ جب فہ = ۱

ہے - اِس لیے ج فا² = $\frac{۱}{\frac{جم^۲ فہ}{ا^۲} + \frac{جب^۲ فہ}{ب^۲}}$

یا ج فا² = $\frac{ا^۲ ب^۲}{ا^۲ جب^۲ فہ + ب^۲ جم^۲ فہ}$ ، .... (۲)

ہے -

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ متوازی الاضلاع کا رقبہ ۴ ا ب کے مساوی ہے -

۱۳۳ — اگر مزدوج نیم قطروں کے ایک زوج کے طول ر، رَ اور اِن کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو

ر رَ جب طہ = ا ب [دفعہ ۱۳۲]

اس لیے جب طہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ ر رَ بڑے سے بڑا ہو -
اب دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، اس لیے اِن کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ قطر ایک دوسرے کے مساوی ہوں -

پس دو مزدوج قطروں کا درمیانی حادہ زاویہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ مزدوج قطر باہم مساوی ہوں -

۱۳۴ — فرض کرو کہ دو مزدوج قطروں کے سِروں ن، د کے خارج المرکز زاویے فہ، فہ ± $\frac{\pi}{2}$ ہیں -

تب ج ن^2 = ا^2 جم^2 فہ + ب^2 جب^2 فہ

اور ج د^2 = ا^2 جب^2 فہ + ب^2 جم^2 فہ

∴ ج ن^2 − ج د^2 = (ا^2 − ب^2) جم^2 فہ

پس ج ن = ج د جبکہ فہ = ٹ/۴ یا ۳ٹ/۴

اس لیے مساوی مزدوج قطروں کی مساواتیں

(لا)/(ی) = ± (ا)/(ب)

ہیں ـ

(۱۶۸) پس ایک ناقص کے مساوی مزدوج قطر، اُس مستطیل کے وتروں پر منطبق ہوتے ہیں جو ناقص کے محوروں کے سروں پر کے مماسوں سے بنتا ہے ـ

۱۳۵ ـــ تعریف ـ وہ دو خطوطِ مستقیم جو ایک ناقص پر کے کسی نقطہ سے کسی قطر کے سروں تک کھینچے جائیں تکمیلی وتر کہلاتے ہیں ـ

فرض کرو کہ ناقص کے نقطہ ق کو قطر ن ج نَ کے سروں ن، نَ سے ملا کر تکملی وتر حاصل کئے گئے ہیں ـ فرض کرو کہ ق ن کا نقطہ وسطی ط ہے اور ق نَ کا طَ ـ تب ج طَ اور ج ط مزدوج ہیں کیونکہ ہر ایک، دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے، اور ج طَ اور ج ط علی الترتیب ق ن اور ق نَ کے متوازی ہیں ـ

پس ق ن اور ق نَ، مزدوج قطروں کے ایک زوج کے متوازی ہیں ـ

۱۳۶ ـــ ہم دائری نقطے ـ مساوات

$$\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - 1 + ل(لا^2 + ما^2 + 2گ\,لا + 2ف\,ما + ج) = ۰ \quad \ldots (1)$$

ایک ایسے منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ناقص

$$\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$$

اور دائرہ $لا^2 + ما^2 + 2گ\,لا + 2ف\,ما + ج = ۰$

کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

اب (۱) سے دو خطوطِ مستقیم تعبیر ہوں گے اگر اس کو تفصیلی طور پر مرتب کیا جائے اور دفعہ ۲۳ میں معلوم شرط پوری ہو۔ نیز جب (۱) سے دو خطوطِ مستقیم تعبیر ہوتے ہیں تو وہ خطوط

$$\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + ل(لا^2 + ما^2) = ۰$$

کے متوازی ہوں گے اور اس لیے وہ شکل $ما = \pm م\,لا$ کے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں گے۔

پس ایک ناقص اور کسی دائرہ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے

دو خطوطِ مستقیم محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۱۶۹) اب فرض کرو کہ ایک دائرہ ایک ناقص کو اُن نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ، جہ، ضہ ہیں۔ تب دو خطوط

$$\frac{لا}{و}\, جم\, \tfrac{1}{2}(عہ + بہ) + \frac{ما}{ب}\, جب\, \tfrac{1}{2}(عہ + بہ) = جم\, \tfrac{1}{2}(عہ - بہ)$$

اور $$\frac{لا}{و}\, جم\, \tfrac{1}{2}(جہ + ضہ) + \frac{ما}{ب}\, جب\, \tfrac{1}{2}(جہ + ضہ) = جم\, \tfrac{1}{2}(جہ - ضہ)$$

محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں گے اور اس لیے

مس ½ (عہ + بہ) = - مس ½ (جہ + ضہ)

∴ ½ (عہ + بہ) + ½ (جہ + ضہ) = ن π

یا عہ + بہ + جہ + ضہ = ۲ ن π ، .... (ا)

اب ایک ایسے نقطہ پر جہاں دائرہ

لا۲ - ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ناقص کو قطع کرتا ہے خارج المرکز زاویہ شرط

ا۲ جم۲ طہ + ب۲ جب۲ طہ + ۲ گ ا جم طہ + ۲ ف ب جب طہ + ج = ۰

کو پورا کرتا ہے - پس

{(ا۲ - ب۲) جم۲ طہ + ۲ گ ا جم طہ + ج + ب۲}۲ = ۴ ف۲ ب۲ جب۲ طہ

= ۴ ف۲ ب۲ - ۴ ف۲ ب۲ جم۲ طہ

اِس لیے جم عہ + جم بہ + جم جہ + جم ضہ = - ۴ گ ا / (ا۲ - ب۲)

اسی طرح جب عہ + جب بہ + جب جہ + جب ضہ = - ۴ ف ب / (ا۲ - ب۲)

لیکن چونکہ عہ + بہ + جہ + ضہ = ۲ ن π

اس لیے جم ضہ = جم (عہ + بہ + جہ) اور جب ضہ = - جب (عہ + بہ + جہ)

نیز دائرہ کا مرکز (- گ ، - ف) ہے -

اِس لیے اُس دائرہ کے مرکز کے محدد جو اُن نقطوں میں سے گذرتا ہے جن کے خارج المرکز زاویے عہ ، بہ ، جہ ہیں

لا = (ا۲ - ب۲) / (۴ ا) {Σ جم عہ + جم (عہ + بہ + جہ)}

اور ما = (ب۲ - ا۲) / (۴ ب) {Σ جب عہ - جب (عہ + بہ + جہ)} ، .... (ب)

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال۔ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ میں ایک متساوی الاضلاع مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ متساوی الاضلاع مثلث کے مرکز ہندسی کا طریق

$$\frac{لا^2 (ا^2 + ۳ ب^2)^2}{ا^2} + \frac{ما^2 (ب^2 + ۳ ا^2)^2}{ب^2} = (ا^2 - ب^2)^2 \text{ ہے}$$

اگر مثلث کے راس ع، ب، ج ہیں تو مرکز ہندسی

$$۳ لا = ا \,(جم ع + جم ب + جم ج)$$

اور $$۳ ما = ب \,(جب ع + جب ب + جب ج)$$

سے حاصل ہوگا۔

اب ایک متساوی الاضلاع مثلث میں مرکز ہندسی، حائط مرکز پر منطبق ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\frac{۴ ا}{ا^2 - ب^2} \left(۳ لا - \frac{لا}{ا}\right) = جم (ع + ب + ج)$$

اور $$\frac{۴ ب}{ب^2 - ا^2} \left(۳ ما - \frac{ما}{ب}\right) = - جب (ع + ب + ج)$$

مربع لو اور جمع کرو تو

$$\frac{(ا^2 + ۳ ب^2)^2 لا^2}{ا^2} + \frac{(ب^2 + ۳ ا^2)^2 ما^2}{ب^2} = (ا^2 - ب^2)^2$$

۱۳۷ — مزدوج قطروں کو محاور قرار دیکر ان کے حوالے سے ناقص کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ناقص کے محور اعظم اور محور اصغر کے حوالے سے اسکی مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے۔

چونکہ مبدا اپنی جگہ پر قائم ہے اس لیے لا، ما کی بجائے شکل ل لا + م ما، لَ لا + مَ ما کے جملوں کو درج کرنا ہوگا تاکہ استحالہ شدہ مساوات حاصل ہو [دفعہ ۱۵]۔
اس لیے ناقص کی مساوات شکل

$$ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} = ا' \ldots\ldots\ldots (۲)$$

کی ہوگی۔
بموجب فرض محور لا، محور ما کے متوازی تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔ اس لیے لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے (۲) سے محصلہ ما کی دو قیمتیں مساوی اور مختلف العلامت ہونی چاہئیں۔ پس ھ = ۰ اور اس لیے ناقص کی مساوات شکل

$$ا لا^{۲} + ب ما^{۲} = ا' \ldots\ldots\ldots (۳)$$

کی ہوگی۔
محوروں لا، ما پر مقطوعوں کے طول (اَ، بَ) معلوم کرنیکے لیے (۳) میں علی الترتیب ما = ۰ اور لا = ۰ رکھنا چاہیے چنانچہ

$$ا اَ^{۲} = ا = ب بَ^{۲}$$

(۱۷۱) پس مزدوج محوروں کے حوالے سے ایک ناقص کی مساوات

$$\frac{لا^{۲}}{اَ^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{بَ^{۲}} = ۱$$

ہے جہاں اَ، بَ، نیم قطروں کے طول ہیں۔

۱۴۸ — دفعہ سابق سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب ایک ناقص کی مساوات کو مزدوج قطروں کے کسی زوج کے حوالے سے معلوم کیا جاتا ہے تو اس کی شکل وہی ہوتی ہے جو محور اعظم اور محور اصغر کو محاور مان کر حاصل کی گئی تھی۔
یہ بھی مشاہدہ طلب ہے کہ دفعات ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۹ اور ۱۲۸ درست رہتے ہیں جبکہ محددوں کے محاور مزدوج قطروں کے کوئی زوج ہوں۔

۱۳۹ — وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک ناقص کے تین نقطوں پر کے عماد ایک نقطہ پر مل سکیں -

نقطوں عہ، بہ، جہ پر کے عماد (حسب دفعہ ۱۲۵)

الا جب عہ - ب ما جم عہ = (ا۲ - ب۲) جب عہ جم عہ، وغیرہ ہیں -

اس لیے وہ شرط کہ عہ، بہ، جہ پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں یہ ہے کہ

جب عہ	جم عہ	جب ۲ عہ	
جب بہ	جم بہ	جب ۲ بہ	= ۰
جب جہ	جم جہ	جب ۲ جہ	

یعنے جب ۲ عہ جب (بہ - جہ) + جب ۲ بہ جب (جہ - عہ)

+ جب ۲ جہ جب (عہ - بہ) = ۰، ... (۱)

اب جب (بہ + جہ) + جب (جہ + عہ) + جب (عہ + بہ)

اور جب (بہ - جہ) + جب (جہ - عہ) + جب (عہ - بہ)

کا حاصل ضرب

Σ جب (بہ + جہ) جب (بہ - جہ) + Σ {جب (جہ + عہ) جب (عہ - بہ)

+ جب (عہ + بہ) جب (جہ - عہ)}

ہے - لیکن ۲ Σ جب (بہ + جہ) جب (بہ - جہ)

= (جم ۲ جہ - جم ۲ بہ) + (جم ۲ عہ - جم ۲ جہ) + جم (۲ بہ - جم ۲ عہ) = ۰ (۱۴۲)

نیز Σ {جب (جہ + عہ) جب (عہ - بہ) + جب (عہ + بہ) جب (جہ - عہ)}

= ½ Σ {جم (بہ + جہ) - جم (۲ عہ + جہ - بہ) + جم (۲ عہ + بہ - جہ)

- جم (بہ + جہ) }

= Σ جب ۲ عہ جب (جہ - بہ)

اور Σ جب (بہ - جہ) = -۴ جب $\frac{بہ - جہ}{۲}$ جب $\frac{جہ - عہ}{۲}$ جب $\frac{عہ - بہ}{۲}$

اِس لیے (ا) کا دائیں جانبی رکن

۴ جب $\frac{\text{بہ} - \text{جہ}}{2}$ جب $\frac{\text{جہ} - \text{عہ}}{2}$ جب $\frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{2}$ × ≥ جب (بہ + جہ)[1]

ہے - اِس طرح مطلوبہ شرط حسب ذیل ہے:

جب (بہ + جہ) + جب (جہ + عہ) + جب (عہ + بہ) = ۰ ‘ ..... (ا)

اب اگر ہم فرض کریں کہ عہ اور بہ معلوم ہیں تو رشتہ (ا) سے جہ کی دو قیمتیں حاصل ہونگی - فرض کرو کہ یہ قیمتیں جہ اور ضہ ہیں - تب مساواتوں

جب (بہ + جہ) + جب (جہ + عہ) + جب (عہ + بہ) = ۰

اور جب (بہ + ضہ) + جب (ضہ + عہ) + جب (عہ + بہ) = ۰

سے ‘ عمل تفریق اور جب $\frac{1}{2}$ (جہ - ضہ) سے تقسیم کرنے کے بعد ‘ حاصل ہوتا ہے

جم $\frac{1}{2}$ (۲ بہ + جہ + ضہ) + جم $\frac{1}{2}$ (۲ عہ + جہ + ضہ) = ۰

اِس لیے

جم $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ + جہ + ضہ) = ۰

پس اگر عہ ‘ بہ ‘ جہ ‘ ضہ پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں تو

عہ + بہ + جہ + ضہ = (۲ ن + ۱) π ‘ .... (ب)

یہ ظاہر ہے کہ شرط (ب) ضروری ہے لیکن وہ کافی نہیں ہے کیونکہ اِس سے یہ لازم نہیں آتا کہ عہ ‘ بہ ‘ جہ ‘ ضہ پر کے عماد ہم نقطہ ہوں گے - [دیکھو دفعہ ۱۹۹]

مثال ۱ - ایک ناقص میں ایک مثلث بنایا گیا ہے - معلوم کرو کہ اِس کا رقبہ کب بڑے سے بڑا ہوگا -

---

[1] طریقۂ بالا پروفیسر اینگلن سے منسوب ہے -

فرض کرو کہ مثلث کے راسوں ف، ق، ر کے خارج المرکز زاویے
فہ، فہ، فہ ہیں ۔ فرض کرو کہ ان کے جواب میں امدادی دائرہ پر کے نقطے
ف، ق، ر ہیں ۔

(۱۴۳) مثلثوں ف ق ر، ف ق ر کے رقبے حسب ذیل ہیں :

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} ا\,جم\,فہ_1 & ب\,جب\,فہ_1 & 1 \\ ا\,جم\,فہ_2 & ب\,جب\,فہ_2 & 1 \\ ا\,جم\,فہ_3 & ب\,جب\,فہ_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} ا\,جم\,فہ_1 & ا\,جب\,فہ_1 & 1 \\ ا\,جم\,فہ_2 & ا\,جب\,فہ_2 & 1 \\ ا\,جم\,فہ_3 & ا\,جب\,فہ_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \triangle ف ق ر : \triangle ف ق ر = \frac{ب}{ا}$$

پس مثلثوں ف ق ر اور ف ق ر کے رقبوں میں مستقل نسبت $\frac{ب}{ا}$ ہے ۔
اس لیے ف ق ر بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ف ق ر بڑے سے بڑا ہو ۔
اب ف ق ر بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ وہ ایک متساوی الاضلاع مثلث
ہو اور ایسی صورت میں فہ₂ ـ فہ₁ = فہ₃ ـ فہ₂ = فہ₁ ـ فہ₃ = $\frac{2\pi}{3}$ ۔
پس جب ایک ناقص میں بنایا ہوا مثلث بڑے سے بڑا ہوتا ہے تو اسکے
راسوں کے خارج المرکز زاویے عہ، عہ + $\frac{2\pi}{3}$، عہ + $\frac{4\pi}{3}$ ہوتے ہیں ۔

مثال ۲ ۔ اگر ایک ناقص کے مزدوج قطروں کا کوئی زوج نقطہ ن پر کے مماس کو ت، تَ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ت ن × ن تَ = ج دَ² جہاں ج د، ج ن مزدوج قطر ہیں ۔

ج د، ج ن کو علی الترتیب محور ما اور محور لا قرار دو تو ناقص کی مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1 \text{ ہوگی ۔}$$

نقطہ ن (ا، ۰) پر کے مماس کی مساوات لا = ا ہوگی ۔
اگر مزدوج قطروں کے کسی زوج کی مساواتیں ما = م لا، ما = مَ لا ہوں تو

$$م م' = -\frac{ب^2}{ا^2}$$ [دفعہ ۱۲۸] ....(۱)

لیکن ن ت = م ا ، اور ن ت' = م' ا

∴ ن ت × ن ت' = م م' ا^۲ ، ....(۲)

∴ ت ن × ن ت' = ب^۲ ، (۱) سے

مثال ۳ ۔ ایک ناقص کے کسی دو قطروں کے سروں کو ملانے والا خط ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو مس کرے گا اگر قطر باہم علی القوائم ہوں ۔

فرض کرو کہ ج ف ، ج ق دو قطر ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں ۔
فرض کرو کہ خط ف ق کی مساوات لاجم عہ + ماجب عہ = ع ہے ۔
خطوط ج ف اور ج ق کی مساواتیں (دفعہ ۳۸)

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = \left(\frac{لاجم عہ + ماجب عہ}{ع}\right)^2 ، ....(۱)$$

ہونگی ۔

(۱۷۴) لیکن چونکہ خطوط ج ف اور ج ق باہم علی القوائم ہیں اس لیے (۱) میں لا^۲ اور ما^۲ کے سروں کا مجموعہ صفر ہے [دفعہ ۳۶] ۔

$$\therefore \frac{1}{ا^2} + \frac{1}{ب^2} = \frac{1}{ع^2}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز سے خط ف ق کا عمودی فاصلہ مستقل ہے ۔
اس لیے خط ف ق ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے ۔

مثال ۴ ۔ ایک ناقص کے عمادی وتروں کے قطبیوں کا طریق معلوم کرو ۔

کسی نقطہ طہ پر کے عماد کی مساوات

$$\frac{و\, لا}{جم\, طہ} - \frac{ب\, ما}{جب\, طہ} = و^{۲} - ب^{۲} \text{،} \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے۔ کسی نقطہ (لاَ، ماَ) کے قطبی کی مساوات

$$\frac{لا\, لاَ}{و^{۲}} + \frac{ما\, ماَ}{ب^{۲}} = ۱ \text{،} \quad \ldots\ldots (۲)$$

ہے۔ مساواتیں (۱) اور (۲) ایک ہی خط کو تعبیر کرینگی اگر

$$(و^{۲} - ب^{۲}) \frac{لاَ}{و^{۲}} = \frac{و}{جم\, طہ} \text{، اور } (و^{۲} - ب^{۲}) \frac{ماَ}{ب^{۲}} = -\frac{ب}{جب\, طہ}$$

یا

$$(و^{۲} - ب^{۲}) \, جم\, طہ = \frac{و^{۳}}{لاَ} \text{، اور } (و^{۲} - ب^{۲}) \, جب\, طہ = -\frac{ب^{۳}}{ماَ}$$

اس لیے اِن دو آخری مساواتوں کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$(و^{۲} - ب^{۲})^{۲} = \frac{و^{۶}}{لاَ^{۲}} + \frac{ب^{۶}}{ماَ^{۲}}$$

اور اس لیے طریق کی مساوات

$$لا^{۲} ما^{۲} (و^{۲} - ب^{۲})^{۲} = و^{۶} ما^{۲} + ب^{۶} لا^{۲}$$

ہے۔

مثال ۵۔ اگر ایک ناقص کے گرد ایک ذواربعۃ الاضلاع کھینچا جائے تو اس کے وتروں کے نقاط وسطی میں سے گذرنیوالا خط ناقص کے مرکز میں سے گذرے گا۔

فرض کرو کہ مماسوں کے چار نقاط تماس کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ، جہ، ضہ ہیں۔
نقطہ عہ، بہ پر کے مماسوں کی مساواتیں

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم عہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب عہ} = 1 \text{ ، اور } \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم بہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب بہ} = 1$$

ہیں ۔ یہ مماس نقطہ

$$\left(\text{ا}\,\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})} \text{ ، } \text{ب}\,\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}\right)$$

پر ملتے ہیں ۔ اسی طرح جہ اور ضہ پر کے مماس نقطہ

$$\left(\text{ا}\,\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}+\text{ضہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ})} \text{ ، } \text{ب}\,\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}+\text{ضہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ})}\right)$$

پر ملیں گے ۔

(۱۷۵) اس خط کے نقطہ وسطی کے محدد جو ان نقاط تقاطع کو ملاتا ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}}{2}\,\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ}) + \text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}+\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})} \text{ ، }$$

$$\text{ما} = \frac{\text{ب}}{2}\,\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ}) + \text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}+\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}$$

سے حاصل ہوتے ہیں ۔

اس لیے وہ خط جو اس نقطہ کو ناقص کے مرکز سے ملاتا ہے محور اعظم کے ساتھ ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا مماس

$$\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ}) + \text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}+\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ}) + \text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}+\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}$$

ہے اور یہ

$$\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\frac{\text{جب}(\text{س}-\text{عہ}) + \text{جب}(\text{س}-\text{بہ}) + \text{جب}(\text{س}-\text{جہ}) + \text{جب}(\text{س}-\text{ضہ})}{\text{جم}(\text{س}-\text{عہ}) + \text{جم}(\text{س}-\text{بہ}) + \text{جم}(\text{س}-\text{جہ}) + \text{جم}(\text{س}-\text{ضہ})}$$

کے مساوی ہے جہاں $2\,\text{س} = \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}$ ۔

اوپر کے نتیجہ کے تشاکل سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ وہ خط جو ناقص کے مرکز کو ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں میں سے ایک کے نقطہ وسطی سے ملاتا ہے دوسرے

دو وتروں کے نقاطِ وسطی میں سے بھی گذرتا ہے۔ اس سے نیوٹن کا یہ مسئلہ ثابت ہوتا ہے: **اگر ایک ناقص ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے ضلعوں کو مس کرے تو اس کا مرکز اس خط پر ہوتا ہے جو وتروں کے نقاطِ وسطی میں سے گذرتا ہے۔** [نیز دیکھو دفعات ۲۱۹ اور ۲۴۴]

مثال ۷۔ ف ق ر ایک مثلث ہے جو دائرہ لا^2 + ما^2 = ا^2 میں بنایا گیا ہے۔ اضلاع ف ق، ف ر علی الترتیب نقطوں (ب، ۰) اور (ج، ۰) میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق ر، مخروطی لا^2 + ما^2 (ا^2 − ب ج)^2 / {(ا^2 − ب^2) × (ا^2 − ج^2)} = ا^2 کو مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ف، ق، ر کے محدد علی الترتیب (ا جم ط$_1$، ا جب ط$_1$) وغیرہ ہیں۔

ف ق کی مساوات

لا جم $\frac{1}{2}$(ط$_1$ + ط$_2$) + ما جب $\frac{1}{2}$(ط$_1$ + ط$_2$) = ا جم $\frac{1}{2}$(ط$_1$ − ط$_2$)

ہے۔ مس $\frac{1}{2}$ ط$_1$ وغیرہ کی بجائے م$_1$ وغیرہ رکھنے سے

$$\frac{\text{ب}}{\text{ا}} = \frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ط}_1 - \text{ط}_2)}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2)} = \frac{1 + \text{م}_1\text{م}_2}{1 - \text{م}_1\text{م}_2}$$

اسی طرح

$$\frac{\text{ج}}{\text{ا}} = \frac{1 + \text{م}_1\text{م}_3}{1 - \text{م}_1\text{م}_3}$$

پس م$_1$م$_2$(ا + ب) + (ا − ب) = ۰ اور م$_1$م$_3$(ا + ج) + (ا − ج) = ۰

∴ $\frac{م_۲}{م_۳}$ = (ا + ج) (ا - ب) \ (ا - ج) (ا + ب) = لہ ... (۱)

اب ق ر کی مساوات

لاجم $\frac{۱}{۲}$ (طہ + طہ) + ماجب $\frac{۱}{۲}$ (طہ + طہ) = ا جم $\frac{۱}{۲}$ (طہ - طہ)

یعنے ا - لا + (ا + لا) م م - ما (م + م) = ۰

ہے۔ اسلیے (۱) سے (۱۷۶)

(ا - لا) لہ + (ا + لا) م^۲ - ما (لہ + ۱) م = ۰

جس کا لفاف، م کی مختلف قیمتوں کے لیے،

۴ لہ (ا + لہ) (ا - لا) = (لہ + ۱)^۲ ما^۲

ہے جہاں لہ = (ا + ج) (ا - ب) \ (ا - ج) (ا + ب)

چھٹے باب پر مثالیں

۱۔ اگر ایک ناقص (مرکز ج) کے نقطہ ن کے ماسکی فاصلے س ن، سَ ن ہوں اور ج د وہ نیم قطر ہو جو ج ن کا فرد وج ہے تو ثابت کرو کہ س ن × سَ ن = ج د^۲۔

۲۔ ایک ناقص کے نقطہ ن پر کا مماس، ا پر کے مماس سے جہاں ا محور ا ج اَ کا ایک سرا ہے نقطہ ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ما، اَ ن کے متوازی ہے جہاں ج ناقص کا مرکز ہے۔

۳۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو متقاطع خطوط مستقیم سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک ناقص ہے۔ نیز خروج المرکز کو خطوط کے درمیانی زاویے کی رقوم میں معلوم کرو۔

۴۔ ایک ناقص پر دو ثابت نقطے ف، ق ہیں اور اس پر ر کوئی اور نقطہ ہے۔ ف ر، ق ر کے نقاط وسطی ط، طَ ہیں اور ط گ، طَ گَ

علی الترتیب ف م، ق م پر عمود ہیں اور وہ محور سے گ، گَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ گ گَ مستقل ہے۔

۵ — ناقصوں کا ایک سلسلہ معلومہ ماسکہ اور متناظر مرتب کے ساتھ کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے محاور اصغر کے سروں کا طریق ایک مکافی ہے۔

۶ — ایک ناقص کا ایک دوہرا معین ن ل نَ لَ ہے اور ق ناقص کوئی نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ق ن، ق نَ محور اصغر سے علی الترتیب مہ، مَہ پر ملیں تو ج مہ × ج مَہ = ج ل^۲۔

۷ — ایک ناقص کے ماسکوں میں سے گذرتے ہوئے خطوط کھینچے گئے ہیں جو علی الترتیب، مزدوج قطروں کے ایک زوج پر عمود ہیں اور ق پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ہم مرکز ناقص ہے۔

۸ — ایک ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مساوی مزدوج قطروں کو ت، تَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلثوں ت ج ن اور تَ ج ن میں نسبت ج ت^۲ : ج تَ^۲ ہے۔

۹ — اگر ج ق، ن پر کے عماد کا مزدوج ہو تو ج ن، ق پر کے عماد کا مزدوج ہوگا۔ (۱۷۷)

۱۰ — اگر ایک ناقص کے مزدوج قطروں کے سرے ن، د ہوں اور ن نَ، د دَ وہ وتر ہوں جو ناقص کے ایک محور کے متوازی ہیں تو ثابت کرو کہ ن دَ، نَ د، مساوی مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

۱۱ — اگر مزدوج قطروں کے سرے ن، د ہوں اور ن پر کا مماس محور اعظم کو ت پر اور د پر کا مماس محور اصغر کو تَ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ت تَ، مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے۔

۱۲ — ایک ناقص کا کوئی وتر ق قَ ہے جو ایک مساوی مزدوج قطر کے متوازی ہے۔ ق، قَ پر کے مماس ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ دائرہ ق ت قَ، مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۱۳ — ثابت کرو کہ ایک ناقص میں کسی نقطہ پر کا عماد اُن عمودوں کا چوتھا

تناسبی ہے جو مرکز سے اور دو ماسکوں سے مماس پر کھینچے گئے ہوں۔

۱۴ ــــ ایک ناقص کے دو مزدوج قطر کھینچے گئے ہیں اور ان کے چار سروں کو ایک معلوم دائرہ کے کسی نقطہ سے ملایا گیا ہے۔ دائرہ کا مرکز ناقص کے مرکز پر ہے۔ ثابت کرو کہ ان چار خطوں کے طولوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

۱۵ ــــ ایک ناقص کا ایک دو ہرا معین ن ل نَ ہے، ناقص کا مرکز ج ہے اور ن پر کا عماد، ج نَ سے و پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک ناقص ہے۔

۱۶ ــــ اگر کسی نقطہ ن پر کا عماد محور اعظم کو گ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن کے مختلف محلوں کے لیے ن گ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک قطع ناقص ہے۔

۱۷ ــــ ایک ناقص کے راس ا، اَ ہیں اور اس پر کوئی نقطہ ن ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ن ل، ا ن پر عمود ہو اور ن م، اَ ن پر عمود ہو جہاں م اور ن، محور ا اَ پر ہیں تو م ن ناقص کے وتر خاص کے مساوی ہے۔

۱۸ ــــ ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو جس سے ایک ناقص کے دو مماس جو محور اعظم کے ساتھ زاویے $طہ_۱$، $طہ_۲$ بنائیں کھینچے جا سکیں اور (۱) مس $طہ_۱$ + مس $طہ_۲$ مستقل ہو، (۲) مم $طہ_۱$ + مم $طہ_۲$ مستقل ہو، یا (۳) مس $طہ_۱$ × مس $طہ_۲$ مستقل ہو۔

۱۹ ــــ ایک ناقص کے کسی دو قطروں کے دو سروں کو ملانیوالا خط اُس خط کے متوازی یا مزدوج ہوتا ہے جو ان کے مزدوج قطروں کے دو سروں کو ملاتا ہے۔

۲۰ ــــ اگر ایک ناقص کے مزدوج قطروں کے سرے ن اور د ہوں تو (۱۷۸) ثابت کرو کہ ن اور د پر کے مماس ناقص $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۲$ پر ملتے ہیں اور ن د کے نقطہ وسطی کا طریق $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = \frac{۱}{۲}$ ہے۔

۲۱ ــــ ایک خط کھینچا گیا ہے جو ایک ناقص کے محور اصغر کے متوازی ہے

اور ایک ماسکہ اور متناظر مرتب کے وسط میں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس ماسکہ میں سے گذرنے والے کسی وتر کے سروں سے، اس خط پر عمود کھینچے جائیں تو اِن عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہوگا۔

۲۲ — دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ ہیں۔ اگر ان کو ملانے والا وتر ایک ناقص کے محور اعظم کو مرکز سے فاصلہ ف پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ

مس $\frac{عہ}{۲}$ مس $\frac{بہ}{۲}$ = $\frac{ف - ا}{ف + ا}$ جہاں ۲ ا محور اعظم کا طول ہے۔

۲۳ — اگر ایک ناقص کے محور اعظم پر کے دو نقطوں میں سے کوئی دو وتر کھینچے جائیں جو مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں تو ثابت کرو کہ مس $\frac{عہ}{۲}$ مس $\frac{بہ}{۲}$ مس $\frac{جہ}{۲}$ مس $\frac{ضہ}{۲}$ = ۱

جہاں عہ، بہ، جہ، ضہ، وتروں کے سروں کے خارج المرکز زاویے ہیں۔

۲۴ — اگر ایک ناقص کے ماسکے س، ھ ہوں اور منحنی پر کوئی نقطہ ا لیا جائے اور وتر ا س ب، ب ھ ج، ج س د، د ھ ع، .... کھینچے جائیں اور ا، ب، ج، د، ... کے خارج المرکز زاویے طہ، طہ$_۱$، طہ$_۲$، .... ہوں تو ثابت کرو کہ مس $\frac{طہ}{۲}$ مس $\frac{طہ_۱}{۲}$ = مم $\frac{طہ_۱}{۲}$ مم $\frac{طہ_۲}{۲}$ = مس $\frac{طہ_۲}{۲}$ مس $\frac{طہ_۳}{۲}$ = ...

۲۵ — ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو اُن نقطوں پر کے مماسوں سے بنے جن کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ، جہ ہیں ا ب مس $\frac{۱}{۲}$ (بہ − جہ) × مس $\frac{۱}{۲}$ (جہ − عہ) مس $\frac{۱}{۲}$ (عہ − بہ) ہے۔

۲۶ — اُن نقطوں پر جن کے خارج المرکز زاویے فہ$_۱$، فہ$_۲$، فہ$_۳$ ہیں مماس کھینچے گئے ہیں اور ان مماسوں سے جو مثلث بنتا ہے اُس کا حائط دائرہ کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر

$$\frac{ف ق ر}{۳۲ ا ب} قط \frac{فہ_۱ - فہ_۲}{۲} قط \frac{فہ_۲ - فہ_۳}{۲} قط \frac{فہ_۳ - فہ_۱}{۲}$$

ہے جہاں ف، ق، ر، ناقص کے اُن قطروں کے طول ہیں جو مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہیں اور ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں۔

(۱۰۹) ۲۷ — ایک ناقص کے کسی نقطہ ن سے خطوطِ مستقیم کھینچے گئے ہیں جو ماسکوں س، ھ میں سے گذرتے ہیں اور متناظر مرتب کو ق، ر پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق ھ اور ر س کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔

۲۸ — اگر ایک ناقص (مرکز ج) اور اس کے امدادی دائرے پر ن، ن متناظر نقطے ہوں اور اگر ج ن کو خارج کیا جائے اور وہ امدادی دائرہ سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ق کے متناظر ناقص کے نقطہ ق پر کا مماس، ج ن پر عمود ہے اور وہ ج ن سے، ج ن کے مساوی طول قطع کرتا ہے۔

۲۹ — اگر ایک ناقص کے دو عمود دار مماسوں کے نقاطِ تماس ف، ق ہوں اور امدادی دائرہ پر متناظر نقطے ف، ق ہوں تو ثابت کرو کہ ج ف، ج ق، ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔

۳۰ — دو ہم مرکز دائروں کے مرکز ج سے دو نصف قطر ج ق، ج ق کھینچے گئے ہیں جو ایک ثابت خطِ مستقیم سے مساوی المیلان ہیں، پہلا نصف قطر بیرونی دائرہ کا ہے اور دوسرا اندرونی دائرہ کا۔ ثابت کرو کہ (۱) ق ق کے نقطہ وسطی ن کا طریق ایک ناقص ہے، (۲) ن ق اس ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد ہے، اور (۳) ق ق اُس قطر کے مساوی ہے جو ج ن کا مزدوج ہے۔

۳۱ — اگر ایک ناقص کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا فرق سہ ہو اور ان نقطوں پر کے مماس باہم علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ ا ب جب سہ = لہ مہ جہاں لہ، مہ وہ نیم قطر ہیں جو ان نقطوں پر کے مماسوں کے متوازی ہیں اور ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں۔

۳۲ — دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس سے دائروں کے مماس کھینچے جائیں تو ان کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

۳۳ — ثابت کرو کہ اگر دو مزدوج قطروں میں سے ہر ایک کے دو سروں سے

ناقص کے کسی مماس پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ اس عمود کے مربع کے مساوی ہوگا جو مرکز سے مماس پر کھینچا جائے۔

۳۴ — ایک ناقص (مرکز ج) کے کسی نقطہ ن کے عماد پر ایک نقطہ ق ایسا ہے کہ خطوط ج ن، ج ق، ناقص کے محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق، اُس قطر کے متناسب ہے جو ج ن کا مزدوج ہے۔

۳۵ — اگر ایک مخروطی کے مماسوں کا ایک زوج باہم علی القوائم ہو اور وتر تماس پر مرکز سے اور مماسوں کے نقطہ تقاطع سے عمود کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔ (۱۸۰)

۳۶ — ایک ناقص پر دو علی القوائم مماس کھینچے گئے ہیں۔ وتر تماس کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔

۳۷ — اگر ایک ناقص پر کوئی نقطہ ن ہو اور کوئی وتر ن ق، ن ج کے مزدوج قطر کو ر پر قطع کرے تو ن ق × ن ر، ن ق کے متوازی قطر کے مربع کا نصف ہوگا۔

۳۸ — ایک ناقص کے اُن تمام وتروں کے نقاط وسطی کا طریق معلوم کرو جو مستقل طول کے ہیں۔

۳۹ — اگر ایک ناقص میں بنائے ہوئے ذو اربعۃ الاضلاع کے تین ضلع علی الترتیب تین دیے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ چوتھا ضلع بھی ایک ثابت خط مستقیم کے متوازی ہوگا۔

۴۰ — اگر ایک کثیر الاضلاع کو ایک ناقص میں بنایا جائے اور اس کے تمام ضلع اِلّا ایک کے دیے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو اگر ضلعوں کی تعداد جفت ہے تو بقیہ ضلع ایک معلومہ خط مستقیم کے متوازی ہوگا لیکن اگر ضلعوں کی تعداد طاق ہے تو بقیہ ضلع ایک ناقص کو لمس کرے گا۔

۴۱ — اُس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ایک ناقص کے قطروں کے کسی زوج کے سروں پر کے مماسوں سے بنتا ہے اُس متوازی الاضلاع کے رقبہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے جو نقاط تماس کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔

۴۲ — اگر ایک ناقص کے کسی دو قطروں ج ن، ج ق کے سروں ن، ق پر دو مماس ن ن، ق ق کھینچے جائیں اور وہ ایک دوسرے کو ت پر اور مزدوج قطروں کو ن اور ق پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ مثلثوں ت ق ن، ت ن ق کے رقبے مساوی ہیں —

۴۳ — ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{یا^2}{ب^2} = ۱$ کے دو مماس و ن، و ق نقطہ و سے کھینچے گئے ہیں - ثابت کرو کہ مثلث ج ن ق کا رقبہ

$$= \frac{ا^2 ب^2 \sqrt{ب^2 ھ^2 + ا^2 ک^2 - ا^2 ب^2}}{ب^2 ھ^2 + ا^2 ک^2}$$

اور ذوار بعتہ الاضلاع و ن ج ق کا رقبہ

$$= (ب^2 ھ^2 + ا^2 ک^2 - ا^2 ب^2)^{\frac{1}{2}}$$

ہے جہاں ناقص کا مرکز ج ہے اور و کے محدد (ھ، ک) ہیں —

(۱۸۱) ۴۴ — ایک ناقص کے مماس ت ن، ت ق ہیں اور اس کا مرکز ج ہے، ثابت کرو کہ ذوار بعتہ الاضلاع ج ن ت ق کا رقبہ $= ا ب$ ٹس $\frac{1}{2}$(فہ - فہَ) جہاں ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں اور ن، ق کے خارج المرکز زاویے فہ، فہَ ہیں —

۴۵ — ایک ناقص کا ایک قطر ن ج نَ ہے اور امدادی دائرہ کا متناظر قطر ق ج قَ ہے - ثابت کرو کہ اُس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ن، نَ، ق، قَ پر کے مماسوں سے بنتا ہے $\frac{۸ ا^2 ب}{(ا - ب) جیب^2 فہ}$ ہے جہاں فہ، ن کا خارج المرکز زاویہ ہے —

۴۶ — ایک متوازی الاضلاع کو ایک دائرہ کے گرد کھینچا گیا ہے اور اسکے دو راس ثابت خطوط مستقیم پر ہیں جو ایک دوسرے کے متوازی اور مرکز سے مساوی

فاصلہ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ دو سرے دو راس ایک ناقص پر ہیں جس کا امدادی صغیر دائرہ متوازی الاضلاع کا مائط دائرہ ہے۔

۴۷ — ایک ناقص کے دو ثابت مزدوج قطروں کو دو خطوط مستقیم و ن و ق جو ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتے ہیں اور مزدوج قطروں کے کسی دوسرے زوج کے متوازی ہیں علی الترتیب نقطوں ن، ق پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۴۸ — اگر ایک ناقص کے مستوی میں و کوئی نقطہ ہو اور اس سے مساوی مزدوج قطروں پر عمود و م، و ل کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع م و ل ن کے وتر کی سمت و ن، و کے قطبی پر عمود ہوگی۔

۴۹ — ایک ناقص پر جس کا مرکز ج ہے تین نقطے ا، ن، ب لیے گئے ہیں۔ نقطہ ن میں سے دو خطوطِ مستقیم نقطوں ا اور ب پر کے مماسوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو ج ب اور ج ا سے علی الترتیب ق اور ر پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق ر، ن پر کے مماس کے متوازی ہے۔

۵۰ — ایک ناقص کے دو نقطوں پر کے عمادوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو جبکہ نقطے مزدوج قطروں کے سرے ہوں۔

۵۱ — ایک ناقص کے ایک وتر کے سروں پر جو مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ عماد ایک قطر پر متقاطع ہوتے ہیں جو دوسرے مساوی مزدوج قطر پر عمود ہے۔

۵۲ — اگر ایک ناقص کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر عماد کھینچے جائیں تو وہ خط جو ان کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے اور محورِ اعظم کے متوازی ہے وتر کی تنصیف کرے گا۔

۵۳ — اگر ایک ناقص (مرکز ج) کے کسی نقطہ ن پر کے عماد میں طول ن ق، اُس نیم قطر کے مساوی قطع کیا جائے جو ج ن کا مزدوج ہے تو ثابت کرو کہ ق، دو دائروں میں سے ایک یا دوسرے پر ہے۔ (۱۸۲)

۵۴ — نقطہ (لا، ما) سے ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے مماس کھینچے

گئے ہیں ۔ اگر ان مماسوں کا درمیانی زاویہ فہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 - \text{ا}^2 - \text{ب}^2)\ \text{مس فہ} = 2\sqrt{(\text{ب}^2\,\text{لاَ}^2 + \text{ا}^2\,\text{ماَ}^2 - \text{ا}^2\,\text{ب}^2)}\ ۔$$

۵۵ — ت ن، ت ق وہ مماس ہیں جو ایک بیرونی نقطہ (لاَ، ماَ) سے ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے کھینچے گئے ہیں۔ اگر ایک ماسکہ س ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{س ت}^2}{\text{س ن} \times \text{س ق}} = \frac{\text{لاَ}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ماَ}^2}{\text{ب}^2}$$

۵۶ — نقطہ ت سے ایک ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے دو مماس کھینچے گئے ہیں اور یہ مماس زاویہ فہ پر متقاطع ہوتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ $\text{س ت} \times \text{ہ ت جم فہ} = \text{ج ت}^2 - \text{ا}^2 - \text{ب}^2$ جہاں ج مرکز اور س، ہ ماسکے ہیں۔

۵۷ — اگر ایک ناقص کے مرکز ج سے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر عمود کھینچا جائے اور یہ عمود ماسکی فاصلہ س ن سے (ممدودہ بضرورت) ر پر ملے تو ر کا طریق ایک دائرہ ہوگا ۔

۵۸ — اگر دو ہم مرکز ناقص ایسے ہوں کہ ایک کے ماسکے دوسرے پر واقع ہوں اور اگر ان کے خروج المرکز ز، زَ ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے محاور

زاویہ $\text{جم}^{-1} \frac{\sqrt{\text{ز}^2 + \text{زَ}^2 - 1}}{\text{ز زَ}}$ پر مائل ہونگے ۔

۵۹ — ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو ناقص کے ایک قطر کے محاذی محور اعظم کے کسی ایک سرے پر بنتا ہے اُس زاویہ کا متمم ہوتا ہے جو مزدوج قطر کے محاذی محور اصغر کے سرے پر بنتا ہے۔

۶۰ — اگر ناقص کے مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سروں پر

محورِ اعظم کے محاذی زاویے طہ، طہَ ہیں تو ثابت کرو کہ مم² طہ + مم² طہَ مستقل ہے۔

۶۱ ــــ اگر ایک ناقص کے ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے محاذی مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سِروں پر زاویے ۲طہ، ۲طہَ ہیں تو ثابت کرو کہ سس² طہ + سس² طہَ مستقل ہے۔

۶۲ ــــ اگر لہ، لہَ وہ زاویے ہوں جو کسی دو مزدوج قطروں کے محاذی ناقص کے کسی ثابت نقطہ پر بنتے ہیں تو ثابت کرو کہ مم² لہ + مم² لہَ مستقل ہے۔ (۱۸۳)

۶۳ ــــ ثابت کرو کہ ناقص کے مزدوج قطروں کے زوج کسی خطِ مستقیم سے درپیچ میں منقطع ہوتے ہیں۔

۶۴ ــــ ایک دائرہ ناقص $\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کو ثابت نقطہ (عہ، بہ) پر اور ناقص کے ایک قطر کے سِروں پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ناقص ۲و² لا² + ۲ب² ما² = (و² − ب²) (عہ لا − بہ ما) ہے۔

۶۵ ــــ $\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے چار نقطوں پر کے عماد نقطہ (عہ، بہ) پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن چار نقطوں کا اوسط محل

$$\left\{ \frac{۱}{۲} و^2 عہ \backslash (و^2 - ب^2)،\ \frac{۱}{۲} ب^2 بہ \backslash (ب^2 - و^2) \right\}$$

ہے۔

۶۶ ــــ ایک ناقص پر چار ثابت نقطے ا، ب، ج، د ہیں اور اس پر ن کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ن سے اب اور ج د، ب ج اور د ا پر عمود کھینچے جائیں تو اب اور ج د پر کے عمودوں کا حاصل ضرب، ب ج اور د ا پر کے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے۔

۶۷ ــــ ایک ناقص کے دو عماد ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۶۸ ــــ ایک ناقص کے ایک ماسکی وتر کے ایک سرے پر مماس کھینچا گیا ہے

اور دوسرے سرے پر عماد کھینچا گیا ہے۔ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۶۹ — ایک ناقص کے محورِ اعظم کے متوازی دو خطوطِ مستقیم محورِ اعظم سے
فاصلہ $\frac{اب}{\sqrt{ا^2-ب^2}}$ پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوط کے درمیان کسی مماس کا
منقطعہ نقطہ تماس پر دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن کے محاذی مرکز پر مساوی
زاویے بنتے ہیں۔

۷۰ — ایک ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد ن گ ہے جہاں گ
محورِ اعظم میں ہے۔ ن گ کو باہر وار ق تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ن ق
= گ ن۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ناقص ہے جس کا خروج المرکز $\frac{ا^2-ب^2}{ا^2+ب^2}$ ہے۔
نیز ن اور ق پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

(۱۸۴) ۷۱ — ایک ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پر ن سے عمود کھینچا
گیا ہے جو محورِ اعظم کو گ پر قطع کرتا ہے۔ گ کو مرکز مان کر کوئی دائرہ کھینچا گیا ہے
جو ناقص کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن اُن دو متوازی خطوں سے
جو چار نقطوں میں سے گذرتے ہیں مساوی فاصلہ پر ہے۔

۷۲ — ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ناقص $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}=1$ کا وتر

$$\frac{لا}{ا}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(ط_1+ط_2)+\frac{ما}{ب}\,\text{جب}\,\frac{1}{2}(ط_1+ط_2)-\text{جم}\,\frac{1}{2}(ط_1-ط_2)=0$$

ہے ناقص کو دوسرے دو نقطوں پر قطع کرتا ہے جنکو ملانیوالا خط

$$\frac{لا}{ا}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(ط_1+ط_2)-\frac{ما}{ب}\,\text{جب}\,\frac{1}{2}(ط_1+ط_2)-\frac{ا^2+ب^2}{ا^2-ب^2}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(ط_1-ط_2)=0$$

ہے۔

۷۳ — ثابت کرو کہ مخروطیوں $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}=\frac{1}{ا+ب}$ اور $\frac{لا^2}{ا^2}-\frac{ما^2}{ب^2}=\frac{1}{ا-ب}$

میں سے کسی ایک کا مماس ناقص $\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - 1 = 0$ سے ایسے دو نقطوں پر ملیگا جن پر کے مماس مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں گے ۔

۷۴ — ایک متوازی الاضلاع کو ناقص

$$\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - 1 = 0$$

کے گرد کھینچا گیا ہے اور اس کے دو راس خطوط $لا^2 - ھ^2 = 0$ پر ہیں ۔ ثابت کرو کہ اس کے دوسرے دو راس مخروطی

$$\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2\left(1 - \frac{و^2}{ھ^2}\right)}{ب^2} - 1 = 0$$

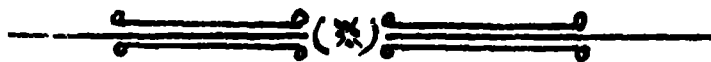
پر ہیں —

۷۵ — ایک مثلث کے ضلع دائرہ $لا^2 + ما^2 - و^2 = 0$ کو مس کرتے ہیں اور اس کے دو راس خطوط $ما^2 - ب^2 = 0$ پر ہیں ۔ ثابت کرو کہ تیسرے راس کا طریق

$$لا^2 + ما^2 - و^2 - \frac{4و^2ب^2لا^2}{(و^2 - ب^2)^2} = 0$$

ہے —

(١٨٥)

ساتواں باب

قطع زائد

تعریف ۔ قطع زائد ایک نقطہ کا طریق ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ (جس کو ماسکہ کہتے ہیں) سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط (جس کو مرتب کہتے ہیں) سے اُس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے جو اکائی سے بڑی ہوتی ہے۔

۱۴۰ ۔ زائد کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ س ماسکہ اور ے مر مرتب ہے۔

س ے کو مرتب پر عمود کھینچو۔

ے س کو ا پر اس طرح تقسیم کرو کہ س ا : ا ے = دی ہوئی نسبت = ز : ۱ تب ا منحنی پر کا ایک نقطہ ہے۔

نیز س ے ممدودہ میں ایک نقطہ اَ ہوگا ایسا کہ

س اَ : ے اَ = ز : ۱

فرض کرو کہ ا اَ کا نقطہ وسطی ج ہے اور ا اَ = ۲ ا، تب

س ا = ز × ا ے، اور س اَ = ز × ے اَ

∴ س ا + س اَ = ز (ا ے + ے اَ)

∴ ۲ س ج = ۲ ز × ا ج

∴ ج س = ا ز، .... (۱)

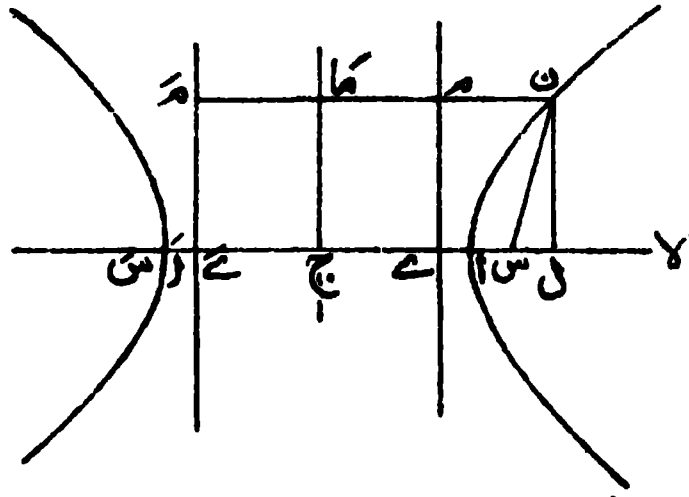
نیز س اَ ۔ س ا = ز (ے اَ ۔ ا ے)

یا ا اَ = ز (ا اَ ۔ ۲ ا ے)

∴ ا ج = ز × ے ج

یا ج ے = ا/ز، .... (۲)

(۱۸۶) اب فرض کرو کہ ج مبداء ہے، ج ا محور لا اور اس کے عمود وار خط محور ما ہے۔

فرض کرو کہ منحنی کا کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدد (لا، ما) ہیں۔

تب شکل میں

س ن^۲ = ز^۲ ن م^۲

∴ س ل^۲ + ل ن^۲ = ز^۲ ے ل^۲

اب س ل = ج ل ۔ ج س = لا ۔ ا ز

اور ے ل = ج ل ۔ ج ے = لا ۔ ا/ز

∴ (لا − ا ز)² + ما² = ز² (لا − ا/ز)²

یا ما² + لا² (۱ − ز²) = ا² (۱ − ز²)

یا لا²/ا² + ما²/(ا² (۱ − ز²)) = ۱ .... (۳)

چونکہ ز اکائی سے بڑا ہے اس لیے ا² (۱ − ز²) منفی ہے۔ اگر ہم ا² (۱ − ز²) کی بجائے − ب² رکھیں تو مساوات شکل

لا²/ا² − ما²/ب² = ۱ .... (۴)

اختیار کرتی ہے۔

(۱۸۷) وتر خاص وہ وتر ہے جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہوتا ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے ہمیں مساوات (۴) میں لا = ا ز رکھنا چاہیئے چنانچہ

ما² = ب² (ز² − ۱) = ب⁴/ا² کیونکہ ب² = ا² (ز² − ۱)

پس نیم وتر خاص کا طول ب²/ا ہے۔

۱۸۸ — مساوات (۴) (دفعہ ۱۸۶) میں لا²، ا² سے کم نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو ما² منفی ہوگا۔ اِس لیے منحنی کا کوئی حصہ لا = − ا اور لا = ا کے درمیان واقع نہیں ہے۔

اگر لا > ا تو ما² مثبت ہوگا اور ما کی کسی مخصوص قیمت کیلئے لا کی دو مساوی مگر مختلف العلامت قیمتیں ہونگی۔ اس لیے محور ما منحنی کو دو متشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر محور لا پر نقطے س′، ے′ ایسے لیے جائیں کہ ج س′ = س ج اور ج ے′ = ے ج تو نقطہ س′ بھی منحنی کا ماسکہ ہوگا اور وہ خط جو ے′ میں سے

گذرتے ہوئے ج ے پر عمود ہو متناظر مرتب ہوگا۔
اگر منحنی پر کوئی نقطہ (لاَ، ماَ) ہو تو یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (-لاَ، -ماَ) بھی منحنی پر ہوگا۔ لیکن نقطے (لاَ، ماَ) اور (-لاَ، -ماَ) ایک ایسے خط پر ہیں جو مبدا، میں سے گذرتا ہے اور نیز یہ نقطے مبدا سے مساوی فاصلوں پر ہیں۔ اس لیے مبدا، ہر اُس وتر کی تنصیف کرتا ہے جو اس میں گذرتا ہے اور اس لیے اس کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں۔
مساوات (۴) (دفعہ ۱۴۰) سے ظاہر ہے کہ اگر لاَ > اَ تو ماَ مثبت ہوگا اور جیسے لاَ بڑھیگا ماَ بھی بڑھیگا اور لا اور ما کے اس اضافہ کی کوئی حد نہیں ہے۔ پس منحنی کچھ ایسا ہے جو دفعہ ۱۴۰ کے نقشہ میں دکھایا گیا ہے اور وہ دو لا متناہی شاخوں پر مشتمل ہوتا ہے۔
اا َ کو زائد کا قاطع محور کہتے ہیں۔ وہ خط جو ج میں سے گذرتے ہوئے اا َ پر عمود ہے منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا، لیکن اگر اِس خط پر ب، بَ ایسے نقطے ہوں کہ ب ج = ج بَ = ب تو خط ب بَ کو مزدوج محور کہتے ہیں۔ (۱۸۸)

۱۴۲ — زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلے معلوم کرنا۔
دفعہ ۱۴۰ کی شکل میں چونکہ س ن = ز × ن م اس لیے

$$\text{س ن} = \text{ز} \cdot \text{ے ل} = \text{ز} (\text{ج ل} - \text{ج ے}) = \text{ز} \left(\text{لا} - \frac{\text{ا}}{\text{ز}}\right) = \text{ز لا} - \text{ا}$$

$$\text{نیز سَ ن} = \text{ز} \times \text{مَ ن} = \text{ز} (\text{ج ل} + \text{ےَ ج}) = \text{ز} \left(\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{ز}}\right) = \text{ز لا} + \text{ا}$$

$$\text{سَ ن} - \text{س ن} = ۲\,\text{ا}$$

۱۴۳ — زائد کی قطبی مساوات مرکز کو قطب قرار دیکر اس طرح معلوم

کی جاسکتی ہے کہ لا کی بجائے ر جم طہ اور ما کی بجائے ر جب طہ درج کیا جائے۔ چنانچہ $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ میں اندراج کرنے سے

$$\frac{ر^2 \text{ جم}^2 \text{ طہ}}{ا^2} - \frac{ر^2 \text{ جب}^2 \text{ طہ}}{ب^2} = 1$$

یا $\frac{1}{ر^2} = \frac{\text{جم}^2 \text{ طہ}}{ا^2} - \frac{\text{جب}^2 \text{ طہ}}{ب^2}$، .... (۱)

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو شکل

$\frac{1}{ر^2} = \frac{1}{ا^2} - \left(\frac{1}{ا^2} + \frac{1}{ب^2}\right) \text{جب}^2 \text{ طہ}$، ..... (۲)

میں لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ طہ صفر ہو تو $\frac{1}{ر^2}$ بڑے سے بڑا ہوتا ہے یعنی ر کم سے کم جیسے جیسے طہ بڑھتا ہے $\frac{1}{ر^2}$ گھٹتا ہے اور صفر ہوتا ہے جبکہ جب^2 طہ $= \frac{ب^2}{ا^2 + ب^2}$، اس لیے طہ کی اس قیمت کے لیے ر لامتناہی ہے۔ اگر جب^2 طہ $> \frac{ب^2}{ا^2+ب^2}$ تو $\frac{1}{ر^2}$ منفی ہوگا اور اس لیے وہ سمتی نیم قطر جو محور کے ساتھ جب$^{-1} \frac{ب}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$ سے بڑا زاویہ بناتا ہے منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا۔

(۱۸۹) **۱۴۴** — پچھلے باب کے بہت سے نتیجے زائد کے لیے بھی درست ہیں اور جو ثبوت وہاں دئے گئے ہیں ان میں صرف ب^2 کی علامت کو بدلنے کی ضرورت ہے۔ اس لیے ہم صرف ان نتیجوں کو بیان کریں گے۔

فرض کرو کہ زائد کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$$

ہے۔

(۱) خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 - \text{ب}^2}$ ، م کی تمام قیمتوں کے لیے مماس ہے [دفعہ ۱۱۴]

(۲) (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1$$ ہے [دفعہ ۱۱۵]

(۳) (لاَ، ماَ) کے قطبی کی مساوات

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1$$ ہے [دفعہ ۱۱۹]

(۴) (لاَ، ماَ) پر کے عماد کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{-\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^2}}$$ ہے [دفعہ ۱۱۷]

(۵) خط $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} - \text{ن} = 0$ منحنی کو مس کرے گا اگر $\text{ا}^2\text{ل}^2 - \text{ب}^2\text{م}^2 = \text{ن}^2$ [دفعہ ۱۱۶]

(۶) خط لا جم عہ + ما جب عہ = ع منحنی کو مس کرے گا اگر $\text{ع}^2 = \text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ} - \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}$ [دفعہ ۱۱۶]

(۷) زائد کے مرتب دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$ ہے [دفعہ ۱۲۱]
مرتب دائرہ صریحاً خیالی ہوگا جبکہ ا < ب اور ایک نقطہ میں تحویل ہوگا جبکہ ا = ب

(۸) وہ ہندسی مسائل جو دفعہ ۱۲۶ میں ثابت کئے گئے ہیں زائد کیلئے بھی درست ہیں۔

(۹) زائد کے ان تمام وتروں کے نقاط وسطی کا طریق جو ما = م لا کے متوازی ہوں خطِ مستقیم ما = مَ لا ہے جہاں م مَ = $\frac{ب^۲}{ا^۲}$ [دفعہ ۱۲۸]

(۱۹۰) **۱۴۵** — خطوط ما = م لا، ما = مَ لا مزدوج ہیں اگر

$$م\,مَ = \frac{ب^۲}{ا^۲}$$

یہ دو قطر منحنی سے ان نقطوں پر ملتے ہیں جن کے فصلے مساواتوں

$$لا^۲\left(\frac{۱}{ا^۲} - \frac{م^۲}{ب^۲}\right) = ۱، \quad \text{اور} \quad لا^۲\left(\frac{۱}{ا^۲} - \frac{مَ^۲}{ب^۲}\right) = ۱$$

سے حاصل ہوتے ہیں

پہلی مساوات سے لا کی حقیقی قیمتیں ملیں گی اگر م > $\frac{ب}{ا}$

دوسری مساوات سے حقیقی قیمتیں ملیں گی اگر مَ > $\frac{ب}{ا}$ لیکن چونکہ م مَ = $\frac{ب^۲}{ا^۲}$ اس لیے م اور مَ دونوں $\frac{ب}{ا}$ سے کم نہیں ہو سکتے اور نہ دونوں $\frac{ب}{ا}$ سے بڑے ہو سکتے ہیں۔

اس لیے زائد کے دو مزدوج قطروں میں سے ایک اس سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے اور دوسرا اس سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔

یہ دو مزدوج قطر منطبق ہونگے اگر م = ± $\frac{ب}{ا}$

۱۴۶ — فرض کرو کہ مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سرے ن، د ہیں۔ فرض کرو کہ ن کے محدد لا، ما اور د کے محدد لاً، ماً ہیں۔ دفعہ ۱۴۵ کی رُو سے اگر ان میں سے ایک نقطہ حقیقی ہے تو دوسرا خیالی ہوگا۔

ج ن اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{م}{مَ} = \frac{لا}{لاَ} \quad \text{اور} \quad \frac{م}{مً} = \frac{لا}{لاً}$$

ہیں - پس دفعہ ۱۴۴ (۹) سے

$$\frac{لاَ\, لاً}{و^2} - \frac{مَ\, مً}{ب^2} = ۰ \quad .... (۱)$$

اس لیے

$$\frac{لاَ^2\, لاً^2}{و^4} = \frac{مَ^2\, مً^2}{ب^4}$$

(۱۹۱)

لیکن (لاً، مً) اور (لاَ، مَ) دونوں منحنی پر ہیں اس لیے

$$\frac{مَ^2}{ب^2}\left(1 - \frac{لاً^2}{و^2}\right) = \left(\frac{مً^2}{ب^2} + [illegible]\right)$$

$$\frac{لاَ^2}{و^2} = -\frac{مً^2}{ب^2} \quad \therefore \quad لاً = \pm \frac{و}{ب}\, مَ \sqrt{-1}, \quad .... (۲)$$

$$\therefore \quad مً = \pm \frac{ب}{و}\, لاَ \sqrt{-1}, \quad .... (۳)$$

(۲) اور (۳) سے

$$ج ن^2 + ج د^2 = لاَ^2 + مَ^2 - \frac{و^2}{ب^2}\, مَ^2 - \frac{ب^2}{و^2}\, لاَ^2$$

$$= و^2\left(\frac{لاَ^2}{و^2} - \frac{مَ^2}{ب^2}\right) - ب^2\left(\frac{لاَ^2}{و^2} - \frac{مَ^2}{ب^2}\right)$$

$$= و^2 - ب^2$$

اس لیے دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل
ہوتا ہے جیسا کہ ناقص کی صورت میں بھی تھا۔

۱۴۷ - **تعریف** - متقارب وہ خطِ مستقیم ہے جو منحنی سے

لاتناہی پر کے دو نقطوں پر ملتا ہے لیکن یہ خط پورا کا پورا لاتناہی پر نہیں ہوتا

زائد کے متقارب معلوم کرنا

اُن نقطوں کے فصلے معلوم کرنے کے لیے جہاں خط مستقیم ما = م لا + ج منحنی کو قطع کرتا ہے مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{(م لا + ج)^2}{ب^2} = 1$$

یا $لا^2 \left(\frac{1}{ا^2} - \frac{م^2}{ب^2}\right) - \frac{2 م ج}{ب^2} لا - \frac{ج^2}{ب^2} - 1 = 0$، ...(1)

حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات کی دونوں اصلیں لامتناہی ہونگی اگر $لا^2$ اور لا دونوں کے سر صفر ہوں یعنے

اگر $\frac{1}{ا^2} - \frac{م^2}{ب^2} = 0$ اور م ج $= 0$

(۱۹۲) پس ج $= 0$ اور م $= \pm \frac{ب}{ا}$ حاصل ہونا چاہئیے

اس لیے زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = 1$

کے دو حقیقی متقارب ہیں جن کی مساواتیں ما $= \pm \frac{ب}{ا}$ لا ہیں، یا ایک مساوات میں انھیں بیان کیا جائے تو

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = 0، \quad \ldots\ldots (2)$$

ب، بَ میں سے قاطع محور کے متوازی اور ا، اَ میں سے مزدوج محور کے متوازی خطوط کھینچو، تب (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ متقارب اُس مستطیل کے وتر ہیں جو اس طرح بنتا ہے۔

ناقص کے کوئی حقیقی نقطے لاتناہی پر نہیں ہوتے اور اس لیے اس کے متقارب خیالی ہوتے ہیں۔

دفعہ ۱۴۵ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہر متقارب منطبق مزدوج قطروں کے ایک زوج پر واقع ہوتا ہے۔

۱۴۸ — کوئی خطِ مستقیم جو ایک متقارب کے متوازی ہو منحنی سے لاتناہی پر کے ایک نقطہ پر ملیگا۔

کیونکہ مساوات (۱) (دفعہ ۱۴۶) کی ایک اصل لامتناہی ہو گی اگر لا² کا سر صفر ہو۔ یہ صورت اسوقت ہو گی جبکہ م = ± ب/ا ۔ اس لئے خط ما = ± ب/ا لا + ج منحنی سے لاتناہی پر کے ایک نقطہ پر ملیگا خواہ ج کی قیمت کچھ ہی ہو۔

۱۴۹ — اُس زائد کی مساوات جس کا قاطع محور ب بَ اور مزدوج محور ۲ اَ ہو

$$-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = \text{۱} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

ہے۔ یہ زائد اور ابتدائی زائد جس کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = \text{۱} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

ہے ایک دوسرے کے مزدوج کہلاتے ہیں۔

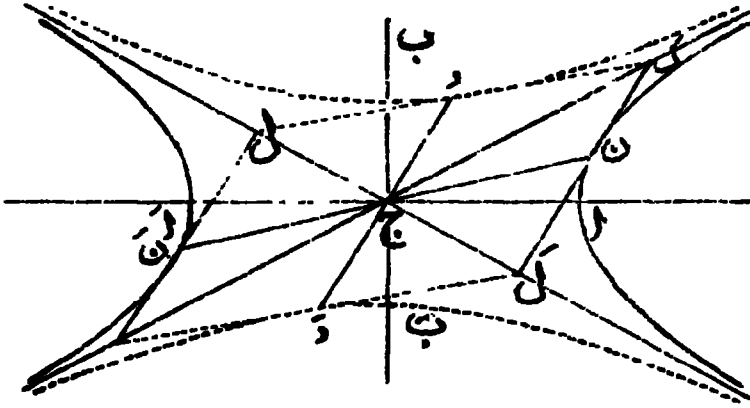
(۱۹۳) ہم مزدوج زائدوں کے ایک زوج کے چند خواص ذیل میں درج کرتے ہیں:—

(۱) ان دو زائدوں کے متقارب ایک ہی ہوتے ہیں۔

(۲) اگر دو قطر ایک زائد کے لحاظ سے مزدوج ہوں تو دوسرے کے لحاظ سے بھی مزدوج ہوں گے۔

(۳) زائدوں (۲) اور (۱) کی مساواتیں [دفعہ ۱۴۴] اشکال

$$\frac{۱}{ر^۲} = \frac{جم^۲ ط}{ا^۲} - \frac{جب^۲ ط}{ب^۲}$$

$$-\frac{۱}{ر^۲} = \frac{جم^۲ ط}{ا^۲} - \frac{جب^۲ ط}{ب^۲}$$

میں بھی لکھی جا سکتی ہیں ۔ یہ ظاہر ہے کہ ط کی کسی قیمت کے لیے $ر^۲$ ایک منحنی کے لیے مثبت اور دوسرے کے لیے منفی ہے۔

پس ہر قطر ایک منحنی سے حقیقی نقطوں پر اور دوسرے منحنی سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے ۔ اِس کے علاوہ اِن دو منحنیوں کے نیم قطروں کے طول، ط کی تمام قیمتوں کے لیے، رشتہ $ر_۱ = - ر_۲$ سے مربوط ہوتے ہیں۔

(۴) اگر دو مزدوج قطر منحنیوں (۲) اور (۱) کو علی الترتیب ن اور د پر قطع کریں تو

$$ج ن^۲ - ج د^۲ = ا^۲ - ب^۲$$

فرض کرو کہ ن کے محدد $لا'$، $ما'$ اور د کے محدد $لا''$، $ما''$ ہیں۔

تب ج ن اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{\text{لا}}{\text{لاً}} - \frac{\text{ما}}{\text{ماً}} = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}}{\text{لاَ}} - \frac{\text{ما}}{\text{ماَ}} = ۰$$

ہیں۔ مزدوج قطروں کی شرط $\text{م مَ} = \frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲}$ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لاَ لاً}}{\text{ا}^۲} - \frac{\text{ماَ ماً}}{\text{ب}^۲} = ۰ \text{ ،} \quad \ldots\ldots (۳)$$

یا

$$\frac{\text{لاَ}^۲\,\text{لاً}^۲}{\text{ا}^۴} = \frac{\text{ماَ}^۲\,\text{ماً}^۲}{\text{ب}^۴}$$

اورچونکہ (لاَ ، ماَ) منحنی (۲) پر اور (لاً ، ماً) منحنی (۱) پر ہے اسلیے

$$\frac{\text{لاَ}^۲}{\text{ا}^۲}\left(۱ - \frac{\text{ماً}^۲}{\text{ب}^۲}\right) = \frac{\text{ماَ}^۲}{\text{ب}^۲}\left(۱ - \frac{\text{لاً}^۲}{\text{ا}^۲}\right)$$

یا

$$\frac{\text{لاً}^۲}{\text{ا}^۲} = \frac{\text{ماً}^۲}{\text{ب}^۲}$$

ش $$\frac{\text{ماً}}{\text{ب}} = \pm \frac{\text{لاً}}{\text{ا}} \text{ ،} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اور اس لیے (۳) سے $$\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}} = \pm \frac{\text{ماَ}}{\text{ب}} \text{ ،} \quad \ldots\ldots (۵)$$

پس $$\text{ج نَ}^۲ - \text{ج دَ}^۲ = \text{لاَ}^۲ + \text{ماَ}^۲ - \text{لاً}^۲ - \text{ماً}^۲$$

$$= \text{لاَ}^۲ + \text{ماَ}^۲ - \frac{\text{ا}^۲}{\text{ب}^۲}\text{ماَ}^۲ - \frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲}\text{لاَ}^۲$$

$$= (\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲)\left(\frac{\text{لاَ}^۲}{\text{ا}^۲} - \frac{\text{ماَ}^۲}{\text{ب}^۲}\right)$$

∴ $ج ن'^2 - ج د'^2 = ا^2 - ب^2$ [1]

(۵) وہ متوازی الاضلاع جو ن، نَ، د، دَ پر کے مماسوں سے بنتا ہے مستقل رقبہ کا ہوتا ہے۔

یہ متوازی الاضلاع ۴ ج ن × ج د × جب ن ج د کے مساوی یا ۴ ج د × ج ف کے مساوی ہے جہاں ج ف وہ عمود ہے جو ج سے ن پر کے مماس پر کھینچا گیا ہے۔

اب ن پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{لا لاَ}{ا^2} - \frac{ما ماَ}{ب^2} = ۱$$

ہے۔ اسلئے

$$ج ف^2 = \frac{۱}{\frac{لاَ^2}{ا^4} + \frac{ماَ^2}{ب^4}}$$

$$\text{اور}\quad ج د^2 = \frac{ا^2}{ب^2} ماَ^2 + \frac{ب^2}{ا^2} لاَ^2 = ا^2 ب^2 \left(\frac{لاَ^2}{ا^4} + \frac{ماَ^2}{ب^4}\right) \qquad (۱۹۴)$$

اس لیے $ج د × ج ف = ا ب$

(۶) متقارب، ن د اور ن دَ کی تنصیف کرتے ہیں۔

اگر ن د کے وسطی نقطہ کے محدد لا، ما ہوں تو

$$۲ لا = لاَ + لاً \quad \text{اور} \quad ۲ ما = ماَ + ماً$$

$$\therefore \frac{لا}{ما} = \frac{لاَ + لاً}{ماَ + ماً} = \frac{لاَ \pm \frac{ا}{ب} ماَ}{ماَ \pm \frac{ب}{ا} لاَ} = \pm \frac{ا}{ب}$$

---

[1] ج ن اور ج د کو مزدوج نیم قطر نہیں سمجھنا چاہئے کیونکہ نقطے ن اور د ایک ہی زائد پر نہیں ہیں۔ خط د ج دَ ابتدائی زائد کو دو خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے اور اگر یہ نقطے دٰ، دٙ ہوں تو (۳) سے $ج دٰ^2 = - ج د^2$

اس لیے ن د اور ن دَ کے نقاط وسطی حسب ذیل خطوں میں سے ایک یا دوسرے پر ہیں:

$$\frac{لا}{ل} = \pm \frac{1}{ب}$$

نیز چونکہ ج ن ک د ایک متوازی الاضلاع ہے اس لیے ج ک، ن دیا ن دَ کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے دو متقاربوں میں سے ایک ہے، اس لیے د، دَ پر کے مماس، د اور دَ پر کے مماس سے متقاربوں پر ملتے ہیں

(۷) زائد ول (۲) اور (۱) کے لحاظ سے (لاَ، مَ) کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{لالاَ}{ل^2} - \frac{مامَ}{ب^2} = 1 \quad اور \quad -\frac{لالاَ}{ل^2} + \frac{مامَ}{ب^2} = 1$$

ہیں۔ اس لیے ان منحنیوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی ایک دوسرے کے متوازی اور مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

اگر (۲) پر کوئی نقطہ (لاَ، مَ) ہو تو (۱) کے لحاظ سے اس نقطہ کا قطبی

$$-\frac{لالاَ}{ل^2} + \frac{مامَ}{ب^2} = 1 \quad یا \quad \frac{لا(-لاَ)}{ل^2} - \frac{ما(-مَ)}{ب^2} = 1$$

ہے۔ لیکن یہ آخری مساوات نقطہ (−لاَ، −مَ) پر (۲) کے مماس کی مساوات ہے اور یہ نقطہ ن میں سے گذرنیوالے قطر کا دوسرا سرا ہے۔

پس اگر ایک زائد کے کسی نقطہ سے مزدوج زائد کے دو مماس ن ق، ن قَ کھینچے جائیں تو خط ق قَ ابتدائی زائد کو ن میں سے گذرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر مس کرے گا۔

۱۵۰ — مزدوج قطروں کے کسی زوج کو محاور قرار دیکر زائد کی

مساوات معلوم کرنا۔

زائد کے قاطع محور اور مزدوج محور کے حوالے سے زائد کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$$

ہے۔ چونکہ استحالہ میں مبداء کا مقام تبدیل نہیں ہوتا اس لیے استحالہ شدہ مساوات کو حاصل کرنے کے لیے مساوات بالا میں لا، ما کی بجائے شکل ل لا + م ما، لَ لا + مَ ما کے جملے درج کرنا ہونگے [دفعہ ۱۵]۔

پس زائد کی مساوات شکل

$$\text{ا لا}^2 + \text{ب ما}^2 + ۲\ \text{ھ لا ما} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

کی ہوگی۔

بموجب فرض محور لا اُن وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو محور ما کے متوازی ہیں۔ اس لیے لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے (۱) سے معلوم کردہ ما کی دو قیمتیں مساوی اور مختلف العلامت ہونی چاہئیں۔ اس لئے ھ = ۰۔ اور اس لیے مساوات کی شکل

$$\text{ا لا}^2 + \text{ب ما}^2 = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہوگی۔

دو نیم مزدوج قطروں میں سے ایک حقیقی ہے اور دوسرا خیالی۔ اگر ان کے طول اَ اور $\sqrt{-۱}$ بَ ہوں تو چونکہ یہ طول محاور لا اور ما پر متقطعے ہیں اس لیے (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا اَ}^2 = ۱ = -\text{ب بَ}^2$$

اس لیے مطلوبہ مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{اَ}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{بَ}^2} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

ہے۔

۱۵۱ — چونکہ منحنی کی مساوات کی شکل وہی رہتی ہے جو پہلے تھی اس لیے

وہ تمام تحقیقاتیں جن میں یہ فرض نہیں کیا گیا تھا کہ محاور ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اب بھی درست رہتی ہیں۔ مثلاً دفعہ ۱۴۴ کی مساواتیں (۱)، (۲)، (۳)، (۵) اور (۹) میں کسی تبدیلی کی ضرورت نہیں۔ دفعہ ۱۴۷ میں بھی کوئی تبدیلی نہیں کرنی پڑے گی چنانچہ زائد کے متقاربوں کی مساوات $\frac{لا^2}{و^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۰$ حاصل ہوگی جبکہ زائد کی مساوات $\frac{لا^2}{و^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ ہو۔

مثال ۱ — $\frac{لا^2}{و^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے لحاظ سے $\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ پر کے (۱۹۷)

کسی نقطہ کا قطبی، $\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کو مس کریگا۔

مثال ۲ — اگر $\frac{لا^2}{و^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے لحاظ سے نقطوں (لا₁، ما₁) اور (لا₂، ما₂)

کے قطبی ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو $\frac{لا_1 لا_2}{ما_1 ما_2} + \frac{و^4}{ب^4} = ۰$۔

مثال ۳ — اگر $ما^2 - ۴و لا = ۰$ کے لحاظ سے نقطہ (ع، ب) کا قطبی، $لا^2 + ما^2 - ۴و^2 = ۰$ کو مس کرے تو نقطہ (ع، ب) قائم زائد $لا^2 - ما^2 - ۴و^2 = ۰$ پر ہوگا۔

مثال ۴ — ایک دائرہ دو ثابت عمود دار خطوں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ ہر ایک مقطوعہ معلومہ طول کا ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

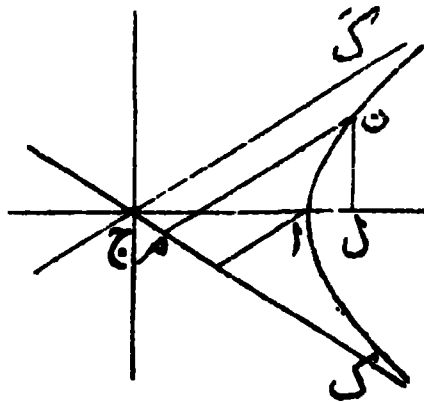
مثال ۵ — $ما^2 - ۴و لا = ۰$ کے لحاظ سے $لا^2 + ما^2 - و^2 = ۰$ کے مماسوں کے قطب زائد $۴لا^2 - ما^2 = ۴و^2$ پر واقع ہوں گے۔

نیز $ما^2 - ۴و لا = ۰$ کے لحاظ سے $۴لا^2 - ما^2 = ۴و^2$ کے مماسوں کے قطب دائرہ $لا^2 + ما^2 = و^2$ پر واقع ہونگے۔

۱۵۲ — زائد کے متقاربوں کو محدودوں کے محور قرار دیکر

حوالے سے زائد کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ شکل میں متقارب ج ک، ج کَ ہیں اور فرض کرو کہ زاویہ ا ج کَ = ع اس لیے مس ع = $\frac{ب}{ا}$ ۔

فرض کرو کہ منحنی کا کوئی نقطہ (لاَ، ماَ) ن ہے اور فرض کرو کہ ن کے محدد ج کَ اور ج کَ کے حوالے سے لاَ، ماَ ہیں۔ ن م کو ج کَ کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ج ک سے م پر ملتا ہے۔ ن ل کو قاطع محور پر عمود کھینچو۔

(۱۹۸) تب ج م = لاَ، م ن = ماَ، ج ل = لا، ل ن = ما

اب ج ل = ج م جم ع + م ن جم ع

یا لا = (لاَ + ماَ) جم ع، . . . . (۱)

نیز ل ن = م ن جب ع - ج م جب ع

یا ما = (ماَ - لاَ) جب ع، . . . . (۲)

پس مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = 1$$

میں ابدال کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{جم^2 ع (لاَ + ماَ)^2}{ا^2} - \frac{جب^2 ع (ماَ - لاَ)^2}{ب^2} = ۱ ، \ldots\ldots (۳)$$

لیکن مس ع = $\frac{ب}{ا}$ ، اسلیے $\frac{جب^2 ع}{ب^2} = \frac{جم^2 ع}{ا^2} = \frac{۱}{ا^2 + ب^2}$ ، اس لیے

زبروں کو اُڑا دینے سے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$۴ \, لا \, ما = ا^2 + ب^2$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

متقاربوں کے حوالے سے مزدوج زائد کی مساوات

$$۴ \, لا \, ما = -(ا^2 + ب^2)$$

ہوگی۔

۱۵۳ — زائد، متقارب، اور مزدوج زائد کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ ، \quad \frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۰ ، \quad اور \quad \frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = -۱$$

ہیں۔

اگر محددوں کے محوروں کو کسی طریقہ پر تبدیل کیا جائے تو نئی مساواتیں حاصل کرنے کے لیے ہمیں تینوں صورتوں میں وہی اندراجات عمل میں لانے چاہئیں۔

پس محددوں کے محوروں کے تمام محلوں کے لیے زائد کی مساوات اور مزدوج زائد کی مساوات میں جو دو مستقلات شامل ہوتے ہیں وہ مساوی اور مختلف العلامت ہوتے ہیں اور ان مساواتوں اور متقاربوں کی مساوات میں جو فرق ہے وہ صرف مستقلوں کا ہے۔

۱۵۴ — جب ایک زائد کے متقاربوں کے درمیان قائمہ زاویہ (۱۹۹) ہوتا ہے تو زائد کو **قائم زائد** کہتے ہیں۔

زائد کے متقاربوں کے درمیان زاویہ $2 \,\text{مس}^{-1} \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کے مساوی ہوتا ہے اور اس لیے جب یہ زاویہ قائمہ ہو تو ب = ا۔ اسی سبب کی بنا پر بعض اوقات اس منحنی کو مساوی الیا ور زائد کہتے ہیں۔

۱۵۵ — زائد لا ما = ج^2 کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

نقطہ $\left(\text{ج ع}، \frac{\text{ج}}{\text{ع}}\right)$ صریحاً لا ما − ج^2 = ۰ پر ہے خواہ ع کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اِس نقطہ کو ع سے موسوم کرو۔
تب دو نقطوں ع$_1$، ع$_2$ کو ملانے والا خط

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & 1 \\ \text{ج ع}_1 & \frac{\text{ج}}{\text{ع}_1} & 1 \\ \text{ج ع}_2 & \frac{\text{ج}}{\text{ع}_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی

$$\text{لا}\left(\frac{1}{\text{ع}_1} - \frac{1}{\text{ع}_2}\right) + \text{ما}(\text{ع}_2 - \text{ع}_1) + \text{ج}\left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} - \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1}\right) = 0$$

ہے۔ اس لیے ع$_1$ − ع$_2$ سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} + \text{ما ع}_1\text{ع}_2 - \text{ج}(\text{ع}_1 + \text{ع}_2) = 0، \quad \ldots\ldots (1)$$

اب رکھو ع$_2$ = ع$_1$ تو ع$_1$ پر کے مماس کی مساوات

$$\text{لا} + \text{ما ع}_1^2 - 2\,\text{ج ع}_1 = 0، \quad \ldots\ldots (2)$$

حاصل ہوگی۔

(۲) سے

$$\frac{لا ج}{ع_1} + ما ج ع_1 = ۲ ج^۲$$

یا　$لا ما_1 + ما لا_1 = ۲ ج^۲$ ، . . . . . (۳)

مساوات (۳) کو استعمال کرنے دفعہ ۱۱۹ کی طرح ہم معلوم کرتے ہیں کہ لا ما - ج۲ = ۰ کے لحاظ سے نقطہ (لا۱، ما۱) کے قطبی کی مساوات

$$لا ما_1 + ما لا_1 = ۲ ج^۲$$

ہے ۔

مساوات (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مخروطی قائم زائد ہے تو ع۱ پر کے عماد کی مساوات

$$(لا - ج ع_1) ع_1^۲ - (ما - \frac{ج}{ع_1}) = ۰$$

یا　$لا ع_1^۳ - ع_1 ما - ج ع_1^۴ + ج = ۰$ ، . . . . . (۴)

ہے ۔

مثال ۱ - لا ما = ج۲ میں ایک مثلث بنایا گیا ہے (۲۰۰) جس کے دو ضلع علی الترتیب $ما + م_1 لا = ۰$ اور $ما + م_2 لا = ۰$ کے متوازی ہیں - ثابت کرو کہ تیسرا ضلع زائد $م_1 م_2 لا ما = ج^۲ (م_1 + م_2)^۲$ کو لف کرتا ہے ۔

ع۱، ع۲ کو ملانے والا خط

$$لا + ما ع_1 ع_2 - ج (ع_1 + ع_2) = ۰$$

ہے۔ یہ خط، $ما + م_۱ لا = ۰$ کے متوازی ہوگا اگر $م_۱ ع_۱ ع_۲ = ۱$ ہے۔
اسی طرح $ع_۱$، $ع_۲$ کو ملانیوالا خط، $ما + م_۲ لا = ۰$ کے متوازی ہے
اگر $م_۲ ع_۱ ع_۲ = ۱$

پس $م_۱ ع_۱ = م_۲ ع_۲$، .... (۱)

اب $ع_۱$، $ع_۲$ کو ملانے والا خط

$$لا + ما ع_۱ ع_۲ - ج (ع_۱ + ع_۲) = ۰$$

ہے، یا (۱) سے $م_۱ لا + ما م_۲ ع_۲^۲ - ج (م_۲ + م_۱) ع_۲ = ۰$

اس کا لفاف، $ع_۲$ کی مختلف قیمتوں کے لیے،

$$۴ م_۱ م_۲ لا ما = ج^۲ (م_۱ + م_۲)^۲$$

ہے۔

مثال ۲ — کوئی خط مستقیم ایک زائد کو نقطوں ق اور ق، پر اور اس کے متقاربوں کو نقطوں ر اور ر، پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق ق، اور ر ر، کے وسطی نقطے ایک ہی ہیں۔

مثال ۳ — ایک زائد کے کسی مماس کا وہ حصہ جو متقاربوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے نقطہ تماس پر تنصیف ہوتا ہے۔

مثال ۴ — ایک زائد کا کوئی مماس متقاربوں سے ایک ایسا مثلث قطع کرتا ہے جس کا رقبہ مستقل ہوتا ہے۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ خطوط $ما - م لا = ۰$ اور $ما + م لا = ۰$، م کی تمام قیمتوں کے لیے زائد $لا ما = ج^۲$ کے مزدوج قطر ہیں۔

مثال ۶ — ثابت کرو کہ خط $لا = ۰$، زائد $۲ لا ما + ۳ لا^۲ + ۴ لا = ۹$ کا ایک متقارب ہے۔

دوسرے متقارب کی مساوات کیا ہے؟

مثال ۷ — $لا ما - ۳ لا - ۲ ما = ۰$ کے متقارب معلوم کرو۔

مزدوج زائد کی مساوات کیا ہے؟

مثال ۸ — اس مثلث کے حائط دائرہ کے مرکز کا طریق جو ایک دئے ہوئے زائد کے کسی مماس اور متقاربوں سے بنتا ہے دوسرا زائد ہوتا ہے جس کے متقارب دئے ہوئے زائد کے متقاربوں پر عمود ہوتے ہیں۔

مثال ۹ — اگر $ما^2 - ۴ ز لا = ۰$ کے لحاظ سے (ع، ہ) کا قطبی $لا^2 - ۴ ب ما = ۰$ کو مس کرے تو (ع، ہ) قائم زائد $لا ما + ۲ ا ب = ۰$ پر ہونا چاہیئے۔

مثال ۱۰ — اگر ایک دئے ہوئے خط کے متوازی ہم محور دائروں کے ایک نظام کے مماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاط تماس ایک قائم زائد پر ہونگے۔

مثال ۱۱ — ثابت کرو کہ ہم محور دائروں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک معلوم خط کے قطبیوں کا طریق ایک زائد ہے جس کا ایک متقارب دائروں کے مرکزوں کے خط پر عمود ہے اور دوسرا متقارب دئے ہوئے خط پر عمود ہے۔ (۲۰۱)

۱۵۶ — زائد کے متقارب اور مزدوج قطروں کا کوئی زوج موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

متقارب $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۰$

اور مزدوج قطر کا کوئی زوج $ب^2 لا^2 + ۲ ک لا ما + ا^2 ما^2 = ۰$ ہیں۔ دفعہ ۵۸ کی شرط صریحاً پوری ہوتی ہے۔

۱۵۷ — ہم زائد کے کسی نقطہ کے محددوں کو ایک واحد مبدل کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں جیسا کہ ناقص کی صورت میں کیا گیا تھا۔ چنانچہ ہم رکھ سکتے ہیں $لا = ا$ قط ط اور $ما = ب$ مس ط کیونکہ ط کی تمام قیمتوں کے لیے قط^2 ط − مس^2 ط $= ۱$

اگر منحنی کے کسی نقطہ ن کا معین ن ل ہو اور ل سے

امدادی دائرہ کا مماس ل ق ہو تو ج ل = ا قطا ا ج ق۔ اسلئے ا ج ق زاویہ ط ہے۔

نقطوں ط۱، ط۲ میں سے گزرنے والے وتر کی مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & ۱ \\ \text{ا قط ط}_۱ & \text{ب مس ط}_۱ & ۱ \\ \text{ا قط ط}_۲ & \text{ب مس ط}_۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad \text{ہے اسلیے} \quad \begin{vmatrix} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} & \frac{\text{ما}}{\text{ب}} & ۱ \\ ۱ & \text{جب ط}_۱ & \text{جم ط}_۱ \\ ۱ & \text{جب ط}_۲ & \text{جم ط}_۲ \end{vmatrix} = ۰$$

اس لیے حسب دفعہ ۱۲۴

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \text{جم} \tfrac{۱}{۲}(\text{ط}_۱ - \text{ط}_۲) = \frac{\text{ما}}{\text{ب}} \text{جب} \tfrac{۱}{۲}(\text{ط}_۱ + \text{ط}_۲) + \text{جم} \tfrac{۱}{۲}(\text{ط}_۱ + \text{ط}_۲) \quad \ldots (۱)$$

∴ ط۱ پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{جم ط}_۱ + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} \text{جب ط}_۱ \quad \ldots\ldots (۲)$$

ہے۔ نیز ط۱ پر کا عماد

$$\text{ا}\left(\text{لا} - \frac{\text{ا}}{\text{جم ط}_۱}\right) + \text{ب}\left(\text{ما} - \text{ب مس ط}_۱\right) \Big/ \text{جب ط}_۱ = ۰$$

یا

$$\text{ا لا} + \frac{\text{ب ما}}{\text{جب ط}_۱} = \frac{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}{\text{جم ط}_۱} \quad \ldots\ldots (۳)$$

ہے۔

مثال۔ اگر چار نقطوں (ا قط ط۱، ب مس ط۱) وغیرہ پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ط}_۱ + \text{ط}_۲ + \text{ط}_۳ + \text{ط}_۴ = (۲\text{ن} + ۱)\pi$$

اور جب (طہ۱ + طہ۲) + جب (طہ۲ + طہ۳) + جب (طہ۳ + طہ۱) = ۰ (حسب دفعہ ۱۳۹)

۱۵۸ ۔ ایک ناقص یا زائد کی مساوات کو جبکہ راس کو مبداء قرار دیا جائے (۲۰۲)
اس مساوات میں لا کی بجائے لا - و لکھ کر معلوم کیا جا سکتا ہے جو مرکز کو مبداء لینے سے معلوم کیا جا چکی ہے ۔ چنانچہ یہ مساوات ہو گی

$$\frac{(لا - و)^{2}}{و^{2}} \pm \frac{ما^{2}}{ب^{2}} = ۱$$

یا

$$\frac{لا^{2}}{و^{2}} \pm \frac{ما^{2}}{ب^{2}} - \frac{۲ لا}{و} = ۰ \quad \ldots (۱)$$

اب اگر راس سے قریبی ماسکہ کا فاصلہ ثابت رہے (فرض کرو ف) اور خروج المرکز اکائی ہو جائے تو منحنی ایک مکافی ہو جائے گا جس کا وتر خاص ۴ ف ہو گا ۔

مکافی کی مساوات کو (۱) سے معلوم کیا جا سکتا ہے ۔ چونکہ و(۱ - ز) = ف، اس لیے و لامتناہی ہونا چاہئے جبکہ ز = ۱ - نیز و (۱ - ز^{2}) = ف (۱ + ز) = ۲ ف اس لیے $\frac{ب^{2}}{و}$ = ۲ ف ۔ پس (۱) سے

$$\frac{لا^{2}}{و} \pm \frac{ما^{2}}{۲ ف} - ۲ لا = ۰$$

یا چونکہ و لامتناہی ہے

$$ما^{2} = \pm ۴ ف لا$$

اس لیے مکافی ایک ناقص یا زائد کی انتہائی شکل ہے جس کا وتر خاص محدود ہے لیکن محور اعظم اور محور اصغر لامتناہی ہیں اور مرکز اور دوسرا ماسکہ لامتناہی پر ہیں ۔

مکافی کے خواص کو ناقص یا زائد کے خواص سے اخذ کرنا طالب علم کے لیے بہت مفید ہو گا ۔

۱۵۹ ــــ فرض کرو کہ ایک مخروطی کا ماسکہ مرتب پر ہے۔ ماسکہ کو مبدا قرار دو اور فرض کرو کہ مرتب محور ما ہے، تب مخروطی کی مساوات ہوگی

$$لا^2 + ما^2 = ز^2 لا^2$$

یا $$لا^2 (۱ - ز^2) + ما^2 = ۰$$

یہ مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو حقیقی ہونگے اگر ز اکائی سے بڑا ہو، منطبق ہونگے اگر ز اکائی کے مساوی ہو، اور خیالی ہونگے اگر ز اکائی سے کم ہو۔ (۲۰۲)

پس ہمیں نہ صرف ناقص، مکافی اور زائد کو ہی مخروطیاں سمجھنا چاہیئے بلکہ دو حقیقی یا خیالی خطوطِ مستقیم کو بھی۔

یہ ذہن نشین رہے کہ ایک دائرہ کا مرتب لامتناہی فاصلہ پر ہوتا ہے، نیز دو متوازی خطوطِ مستقیم کے ماسکے اور مرتب سب کے سب لامتناہی پر ہوتے ہیں۔

ساتویں باب پر مثالیں

۱ ــــ ا ب، ج د دو خطوطِ مستقیم ہیں جو ایک دوسرے کو علی القوائم تنصیف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ ن کا طریق جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ا × ن ب = ن ج × ن د، ایک قائم قطع زائد ہے۔

۲ ــــ ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا گیا ہے جو ثابت خطوطِ مستقیم و لا، و ما کو علی الترتیب ر، رَ پر قطع کرتا ہے۔ خط ر ن رَ پر ایک نقطہ نَ لیا گیا ہے ایسا کہ ر ن = نَ رَ۔ ثابت کرو کہ نَ کا طریق ایک زائد ہے جس کے متقارب و لا، و ما ہیں۔

۳ ــــ ایک خطِ مستقیم کے سرے دو ثابت خطوطِ مستقیم پر ہیں اور وہ

ایک ثابت نقطہ میں سے بھی گذرتا ہے۔ خط کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔

۴ — ایک خطِ مستقیم کے سرے دو ثابت خطوطِ مستقیم پر ہیں اور وہ اِن سے مستقل رقبہ کا ایک مثلث قطع کرتا ہے۔ خط کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔

۵ — و ا اور و ب دو ثابت خطوطِ مستقیم ہیں اور ن کوئی نقطہ ہے۔ ن سے و ا اور و ب پر عمود ن م اور ن ل ہیں۔ ن کا طریق معلوم کرو اگر ذوار بعتہ الاضلاع و م ن ل مستقل رقبہ کا ہو۔

۶ — ایک قائم قطع زائد کے مرکز سے کسی نقطہ کا فاصلہ اُس عمودی فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے جو نقطہ کے قطبی کا زائد کے مرکز سے ہے۔

۷ — ایک زائد کے نقطہ ن کا معین ن ل ہے اور ن گ عماد ہے جو محور سے گ پر ملتا ہے۔ اگر ل ن کو خارج کیا جائے اور وہ متقارب سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ق گ متقارب کے علی القوائم ہے۔

۸ — اگر ایک زائد اور اس کے مزدوج زائد کے خروج المرکز ز، ز' ہوں تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{ز^2} + \frac{1}{ز'^2} = 1$ (۲۰۴)

۹ — وہ دو خطوطِ مستقیم جو اُن نقطوں کو ملاتے ہیں جن پر ایک زائد کے کوئی دو مماس متقاربوں سے ملتے ہیں مماسوں کے وترِ تماس کے متوازی اور اس سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

۱۰ — ثابت کرو کہ ایک زائد کے کسی نقطہ پر کے مماس کا وہ حصہ جو نقطہ تماس اور قاطع محور کے درمیان منقطع ہوتا ہے اُن عمودوں کے طولوں کے درمیان موسیقی اوسط ہے جو ماسکوں سے اُس نقطہ پر کے عماد پر کھینچے گئے ہوں۔

۱۱ — اگر کسی نقطہ و میں سے خط و ن ق کو ایک زائد کے ایک متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہو اور یہ خط زائد کو ن پر اور و کے قطبی کو ق پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن، و ق کا نقطہ وسطی ہے۔

۱۲ — ایک متوازی الاضلاع کو اِس طرح بنایا گیا ہے کہ اس کے اضلاع

ایک زائد کے متقاربوں کے متوازی ہیں اور اس کا ایک وتر زائد کا ایک وتر ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے وتر کی سمت مرکز میں سے گزرے گی۔

۱۳ — ایک قائم زائد کے راس ا، اَ ہیں اور اس پر کوئی نقطہ ن ہے۔ ثابت کرو کہ زاویہ ا ن اَ کے داخلی اور خارجی ناصف متقاربوں کے متوازی ہیں۔

۱۴ — ایک دائرہ کے ایک ثابت قطر کے سرے ا، اَ ہیں اور اس قطر کے عمود وار کسی وتر کے سرے ن، نَ ہیں۔ ثابت کرو کہ ا ن اور اَ نَ کے نقطۂ تقاطع کا طریق قائم قطع زائد ہے۔

۱۵ — ایک زائد کے متقاربوں کو حوالے کے محاور قرار دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ زائد کے دو مماسوں کے نقطہ تقاطع کے محدد نقاط تماس کے محددوں کے درمیان موسیقی اوسط ہیں۔

۱۶ — ایک زائد کے کسی نقطہ سے دوسرے زائد کے مماس کھینچے گئے ہیں جس کے متقارب وہی ہیں۔ ثابت کرو کہ وتر تماس متقاربوں سے ایک مستقل رقبہ قطع کرتا ہے۔

۱۷ — وہ خطوطِ مستقیم جو ایک مساوی الجانب زائد کے کسی نقطہ سے کسی قطر کے سروں تک کھینچے گئے ہوں متقاربوں کے ساتھ مساوی المیلان ہوتے ہیں۔

۱۸ — قائم زائد $لا^2 - ما^2 = ل^2$ کے عمادی وتروں کے نقاط وسطی کا طریق $(ما^2 - لا^2)^3 = 4 ل^2 لا^2 ما^2$ ہے۔ (۲۰۵)

۱۹ — مخروطیوں کے ایک نظام کے صدر محاور دو دئے ہوئے خطوطِ مستقیم پر ہیں اور یہ تمام مخروطی ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط کے قطب ایک قائم زائد پر واقع ہوتے ہیں۔

۲۰ — مخروطیوں کے ایک نظام کے صدر محاور دو دئے ہوئے خطوطِ مستقیم پر ہیں اور یہ سب مخروطی ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کو مس کرتے

ہیں ۔ ثابت کرو کہ اِن مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا لفاف ایک مکافی ہے ۔

۲۱ — دو خطوط لا ـ عہ = ۰، ما ـ بہ = ۰ زائد لا ما = ج۲ کے لحاظ سے مزدوج ہیں (یعنے ہر خط دوسرے کے قطب میں سے گذرتا ہے) ۔ ثابت کرو کہ (عہ، بہ) زائد لا ما ـ ۲ ج۲ = ۰ پر ہے ۔

۲۲ — ایک دائرہ ایک زائد کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ایک متقارب سے اِن چار نقاط تقاطع کے فاصلوں کا حاصل ضرب، دوسرے متقارب سے اِن کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے ۔

۲۳ — ثابت کرو کہ اگر ایک قائم قطع زائد ایک دائرہ کو چار نقطوں پر قطع کرے تو اِن چار نقطوں کے اوسط محل کا مرکز منحنیوں کے مرکزوں کے درمیان وسط میں ہے ۔

۲۴ — اگر ایک قائم زائد پر چار نقطے لئے جائیں ایسے کہ کسی دو کو ملانے والا وتر دوسرے دو کو ملانے والے وتر پر عمود ہو اور اگر عہ، بہ، جہ، ضہ، کسی ایک متقارب کے ساتھ اُن خطوطِ مستقیم کے میلان ہوں جو اِن نقطوں کو مرکز سے علی الترتیب ملانے سے حاصل ہوتے ہیں تو ثابت کرو کہ مس عہ مس بہ مس جہ مس ضہ = ۱

۲۵ — زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے وتروں کا ایک سلسلہ اُس دائرہ کے مماس ہیں جو زائد کے راسوں کو ملانے والے خط کو قطر مان کر کھینچا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ زائد کے لحاظ سے اِن وتروں کے قطبوں کا طریق $\frac{لا^2}{ا^4} + \frac{ما^2}{ب^4} = \frac{۱}{ا^2 + ب^2}$ ہے

۲۶ — اگر دو خطوطِ مستقیم ثابت نقطوں میں سے گذریں اور اِن کے درمیانی زاویہ کا ناصف ہمیشہ ایک ثابت خط کے متوازی رہے تو ثابت کرو کہ خطوط کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک قائم زائد ہے ۔

۲۷ — ثابت کرو کہ ایک زائد کے مزدوج قطروں کے زوج کسی خطِ مستقیم

(۲۰۶)

سمت دیے میں منقطع ہوتے ہیں۔

۲۸ — ایک مثلث کے دو اضلاع اب، اج کو وتر مان کر ان پر دو مساوی دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن دائروں کے تقاطع کا طریق ایک قائم زائد ہے جس کا مرکز ب ج کا نقطہ وسطی ہے اور جو ا، ب، ج میں سے گذرتا ہے۔

۲۹ — نصف قطر ر کا ایک دائرہ ایک قائم زائد کو جس کا مرکز ج ہے چار نقطوں ف، ق، ر، س پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ف^2 + ج ق^2 + ج ر^2 + ج س^2 = ۴ ر^2

۳۰ — اگر قائم زائد لا ما = ج^2 کے نقطوں (لا$_1$، ما$_1$)، (لا$_2$، ما$_2$)، (لا$_3$، ما$_3$)، (لا$_4$، ما$_4$) پر کے عماد نقطہ (صہ، بہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ

صہ = لا$_1$ + لا$_2$ + لا$_3$ + لا$_4$ اور بہ = ما$_1$ + ما$_2$ + ما$_3$ + ما$_4$

نیز لا$_1$ لا$_2$ لا$_3$ لا$_4$ = ما$_1$ ما$_2$ ما$_3$ ما$_4$ = − ج^4

۳۱ — ایک قائم زائد کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد زائد کے ایک نقطہ س پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ زائد کا مرکز مثلث ف ق ر کا مرکز ہندسی ہے۔

۳۲ — اگر ایک قائم زائد کے نقطوں ف، ق، ر، س پر کے عماد ایک نقطہ پر متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ ف ق ر اُس قطر کے دوسرے سرے میں سے گذرے گا جو س میں سے گذرتا ہے۔

۳۳ — قائم قطعات زائد کے ایک سلسلہ کو جن کے متقارب لا ما = ۰ ہیں خط ما = ک نقطوں ف$_1$، ق$_1$، ف$_2$، ق$_2$ وغیرہ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف$_1$، ق$_1$ وغیرہ پر کے عماد مکافی لا^2 − ۴ ک (ما − ک) = ۰ کو مس کرتے ہیں۔

۳۴ — قائم زائد لا ما = ج^2 میں لاانتہا مثلث بنائے جاسکتے ہیں

جن کے سب اضلاع مکافی $ما^2 = ۴ الا$ کو مس کرتے ہوں۔
نیز مکافی میں لاانتہا مثلث بنائے جا سکتے ہیں جن کے اضلاع قائم زائد کو مس کرتے ہوں۔

۳۵ — ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر اس سے ایک دائرہ کا مماس کھینچا جائے تو اس مماس کا طول ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو ن سے دائرہ کے ایک ثابت مماس پر کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک مخروطی ہے جس کا وتر خاص دائرہ کے قطر کے مساوی ہے۔

۳۶ — ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز ایک قائم زائد کے کسی نقطہ ن پر ہے اور جس کا نصف قطر ن میں سے گذرنیوالے زائد کے قطر کے مساوی ہے زائد کو تین دیگر نقطوں پر قطع کرتا ہے جو ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔ (۲۰۷)

۳۷ — ایک زائد پر چار نقطے ا، ب، ج، ن ہیں اور ن میں سے دو خطوط متقاربوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو مثلث ا ب ج کے اضلاع سے علی الترتیب ل، م، ق اور لَ، مَ، قَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ل م : م ق = لَ مَ : مَ قَ۔

۳۸ — ثابت کرو کہ کوئی خط مستقیم جو $ما^2 - ۴ الا = ۰$ اور $لا^2 - ۴ ب ما = ۰$ کو ایسے نقطوں پر قطع کرے جو موسیقی مزدوج ہوں زائد $لا ما + ۲ ا ب = ۰$ کو مس کرے گا۔

۳۹ — ثابت کرو کہ دائرہ $لا^2 + ما^2 - ۲ ا^2 = ۰$ کا کوئی مماس دو زائدوں $لا (لا + ما) - ۲ ا^2 = ۰$ اور $ما (ما - لا) - ۲ ا^2 = ۰$ سے موسیقی طور پر تقسیم ہوتا ہے۔

۴۰ — ہم مرکز مخروطیوں کے ایک نظام کے مرتب دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک مکافی ہے اور (۲) مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبی کا لفاف ایک مکافی ہے۔

متفرق امثلہ (۲)

(۲۰۸)

۱ — خطوں

$$\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}}{\text{اب}}\,\text{لا ما} + \text{ما}^{۲} - \text{اب} + (\text{ا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{ما}) = ۰$$

کے درمیانی زاویوں کے ناصف معلوم کرو۔

جواب: $(\text{لا}+\text{ما})\{(\text{ا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{ما}) - ۲\,\text{اب}\} = ۰$

۲ — اُن دائروں کا مشترک وتر معلوم کرو جن کی مساواتیں

$$\text{ر} = ۲\,\text{ا جب ط} \quad \text{اور} \quad \text{ر}^{۲} - ۲\,\text{ج ر جم ط} - \text{ب}^{۲} = ۰$$

ہیں۔

جواب: $۲\,\text{ر}(\text{ا جب ط} - \text{ج جم ط}) - \text{ب}^{۲} = ۰$

۳ — ثابت کرو کہ اگر ایک دائرہ ایک دئے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرے اور نیز ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کو مس کرے تو دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکافی ہے۔

۴ — ایک ثابت نقطہ (ف، گ) میں سے ایک خطِ مستقیم کو $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ کے کسی قطر کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ خطِ مستقیم مزدوج قطر سے ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق قائم زائد

$$(\text{ا}^{۲} - \text{ب}^{۲})\,\text{لا ما} - \text{ا}^{۲}\,\text{ف ما} + \text{ب}^{۲}\,\text{گ لا} = ۰$$

ہے۔

۵ — اُس مخروطی کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرو جس کا خروج المرکز $\sqrt{۲}$، ماسکہ (۰، ۰)، اور مرتب $\text{لا} + \text{ما} + ۱ = ۰$ ہے۔

جواب: $(\text{لا} + ۱)(\text{ما} + ۱) = ۰$

۶ — اگر اُن عمودوں کے پائین ل، م ہوں جو ثابت نقطہ (ج، ۰) سے خطوط ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰ پر کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ ل م کی مساوات (ا - ب) لا + ۲ ھ ما + ب ج = ۰ ہے - اس سے اخذ کرو کہ اگر خطوط کو مبدا ء کے گرد اس طرح گھمایا جائے کہ اِن کے درمیان زاویہ مستقل رہے تو نقطہ ($\frac{۱}{۲}$ ج، ۰) سے ل م کا فاصلہ مستقل رہے گا۔

۷ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا قطر دائروں

لا^۲ + ما^۲ - ۴ = ۰ اور لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا + ۴ ما - ۶ = ۰

کا مشترک وتر ہے۔

جواب: ۵ لا^۲ + ۵ ما^۲ - ۲ لا - ۴ ما - ۱۸ = ۰

۸ — اگر مکافی ما^۲ - ۴ ا لا = ۰ کے وتر ف ق کے محاذی مکافی (۲۰۹) کے راس پر قائمہ زاویہ بنے تو ف، ق پر کے عماد مکافی

ما^۲ - ۱۶ ا (لا - ۶ ا) = ۰

پر ملیں گے۔

۹ — ثابت کرو کہ ایک ناقص اور اُس دائرہ کے مشترک مماس جو ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کے سِروں میں سے گذرتا ہے ایک مربع بناتے ہیں۔

۱۰ — مخروطی (ل^۲ - م^۲) لا^۲ - ۴ ل م لا ما - (ل^۲ - م^۲) ما^۲ - ۱ = ۰ کی مساوات اس کے متقاربوں کو حوالے کے محاور قرار دیکر معلوم کرو۔

جواب: لا ما = $\frac{۱}{۲ ل^۲ + ۲ م^۲}$

۱۱ — ثابت کرو کہ اُن عمودوں کے پائین جو مبداء سے خطوطِ مستقیم لا + ما - ۴ = ۰، لا + ۵ ما - ۲۶ = ۰ اور ۱۵ لا - ۲۷ ما - ۴۲۴ = ۰

پر کھینچے جائیں سب کے سب خط مستقیم ۳ لا + ما - ۸ = ۰ پر واقع ہوتے ہیں

۱۲ — ثابت کرو کہ اگر دائروں س۱ = ۰، س۲ = ۰ (دونوں میں لا۲ اور ما۲ کے سر اکائی ہیں) کے نصف قطر ر۱ اور ر۲ ہوں تو وہ نقطے جن پر دائروں کے محاذی مساوی زاویے بنتے ہیں دائرہ $\frac{س_1}{ر_1^2} = \frac{س_2}{ر_2^2}$ پر ہیں

اگر اس دائرہ کو جس کا قطر دیے ہوئے دائروں کے مشابہت کے مرکزوں کو ملانے والا خط ہو ان کے "مشابہت کا دائرہ" کہا جائے تو ثابت کرو کہ کسی تین دائروں کے مشابہت کے تین دائرے جبکہ انہیں دو دو کو لیا گیا ہو ہم محور ہوتے ہیں۔

۱۳ — ما۲ - ۴ الا = ۰ کے دو نقطوں پر جن کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ ۲ ج ہے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ مماس ہکافی ما۲ = ۱۲ (لا + ج - ا) پر متقاطع ہوں گے ۔

۱۴ — ثابت کرو کہ اگر $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے نقطوں (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) اور (لا۴، ما۴) پر کے عاد ایک نقطہ پر ملیں تو Σ لا۱ × $\Sigma \frac{۱}{لا_1}$ = Σ ما۱ × $\Sigma \frac{۱}{ما_1}$ = ۴ —

۱۵ — وہ دائرے جن کے قطر ایک قائم زائد کے متوازی وتروں کا ایک سلسلہ ہوں زائد کے دو ثابت نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں —

---

۱۶ — ثابت کرو کہ خطوط

لا۲ - ۲ لا ما قم ۲ عہ + ما۲ = ۰

کے درمیانی زاویوں کے ناصف لا۲ - ما۲ = ۰ ہیں خواہ محوروں کے درمیان زاویہ کچھ ہی ہو —

۱۷ — ہم محور دائروں کا ایک نظام ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم سے نقطوں $ف_1$، $ق_1$، $ف_2$، $ق_2$، وغیرہ پر قطع ہوتا ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ دائرے جن کے قطر $ف_1 ق_1$، $ف_2 ق_2$، وغیرہ ہیں ہم محور ہیں کیونکہ مشترک بنیادی محور دئے ہوئے خطِ مستقیم پر عمود ہے ۔

۱۸ — اگر ایک دائرہ جس کا مرکز (ع، یہ) ہے $م^2 - 4 ا لا = 0$ کو چار نقطوں پر قطع کرے جن میں سے تین ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں تو ثابت کرو کہ (۱) چوتھے نقطہ کے محدد (ع − ۸ ا، − ۳ یہ) ہیں اور (۲) دائرہ کا مرکز مکافی $9 م^2 = 4 ا لا - 32 ا^2$ پر ہے ۔

۱۹ — ت سے ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{م^2}{ب^2} = 1$ کا مماس کھینچا گیا ہے جو (ا، ۰) پر کے مماس سے محور اصغر کے مساوی طول قطع کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ت مکافی $\frac{م^2}{ب^2} = \frac{2 لا}{ا} + 2$ پر ہے ۔

---

۲۰ — ایک دائرہ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{م^2}{ب^2} - 1 = 0$ کے ایک قطر کے سروں میں سے گذرتا ہے اور نیز ناقص کو مس کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا مرکز ناقص

$$4 ا^2 لا^2 + 4 ب^2 م^2 = (ا^2 - ب^2)^2$$

پر ہے ۔

۲۱ — ایک مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر عمود کے پائین نقاط (۲۰، ۲۵)، (۸، ۱۶) اور (۸، ۹) ہیں ۔ مثلث کے راسوں کے محدد معلوم کرو ۔

جواب : چار نقطوں (۱۰، ۱۵)، (۵، ۱۰)، (۵۰، −۵) اور (۱۵، ۳۰) میں سے کوئی تین ۔

۲۲ — دائروں کے ہم محور نظام $لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا - ج^۲ = ۰$ میں سے دو دو دائرے لیے گئے ہیں جو ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ اگر دائروں کے کسی ایسے زوج کے مشترک مماس پر نقطوں (۰، ج) اور (۰، −ج) سے عمود $ع_۱$، $ع_۲$ ہوں تو $ع_۱ ع_۲ = ج^۲$ —

۲۳ — مکافی $ما^۲ - ۴ ا لا = ۰$ پر کوئی نقطہ ن ہے اور محور پر نقطہ ق ایسا ہے کہ ن ق = ن ا جہاں ا مکافی کا راس ہے — ثابت کرو کہ ن ق، مکافی $ما^۲ + ۳۲ ا لا = ۰$ کو لمس کرتا ہے —

۲۴ — $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے نقطہ (لاَ، ماَ) پر کا مماس دائرہ $لا^۲ + ما^۲ - ا^۲ = ۰$ سے نقطوں ق اور قَ پر ملتا ہے — ثابت کرو کہ مرکز اور ق، قَ میں سے گذرنے والے خطوط لا ماَ = ما(لاَ ± ا ز) ہیں —

۲۵ — ایک خطِ مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُس منقطوع کے محاذی جو اس پر خطوط لا = ± ا منقطع کرتے ہیں نقطہ (ج، ۰) پر ایک قائمہ زاویہ بنتا ہے — ثابت کرو کہ خطِ مستقیم مخروطی $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ا^۲ - ج^۲} = ۱$

کو مس کرتا ہے —

---

۲۶ — ثابت کرو کہ اُس مثلث کا نو نقطی دائرہ جو خطوط ۳لا + ۴ما − ۱۲ = ۰، ۳لا − ۴ما − ۳۶ = ۰ اور لا = ۰ سے بنتا ہے

$$۴لا^۲ + ۴ما^۲ - ۲۵لا + ۲۴ما + ۳۶ = ۰$$

ہے — نیز ثابت کرو کہ (۱) مثلث کا اندرونی دائرہ

$$لا^۲ + ما^۲ - ۶لا + ۶ما + ۹ = ۰$$

ہے اور (۲) وہ دائرہ جو پہلے ضلع کو اور دوسرے دو ممدودہ ضلعوں کو مس کرتا ہے

$$لا^۲ + ما^۲ - ۱۶لا - ۱۴ما + ۴۹ = ۰$$

ہے —

ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ دوسرے دو دائروں کو مس کرتا ہے۔

۲۷ — اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو دائروں $لا^2 + ما^2 - ۴ = ۰$، $لا^2 + ما^2 - ۶ لا - ۸ ما + ۱۰ = ۰$ اور $لا^2 + ما^2 + ۲ لا - ۴ ما - ۲ = ۰$ میں سے ہر ایک کو ایک قطر کے سروں پر مس کرتا ہے۔

جواب: $لا^2 + ما^2 - ۴ لا - ۶ ما - ۴ = ۰$

۲۸ — ثابت نقطہ (ھ، ک) سے مکافی $ما^2 = ۴ ل (لا + ل)$ کے مماس ت ف، ت ق کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف اور ق پر کے عماد، ل کی تمام قیمتوں کے لیے، خط $ھ لا + ک ما + ھ^2 + ک^2 = ۰$ پر ملتے ہیں۔

۲۹ — مکافی $ما^2 - ۴ ل لا = ۰$ کے گرد متساوی الاضلاع مثلث کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مثلثوں کے راس مخروطی

$$(۳ لا + ل)(۳ ل + لا) = ما^2$$

پر ہیں۔

۳۰ — اگر $\frac{لا^2}{ل^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ پر دو نقطے ف، ق ہوں جن کے خارج المرکز زاویے طہ اور فہ رشتہ قط طہ + قط فہ = ۲ کو پورا کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ ف ق ناقص

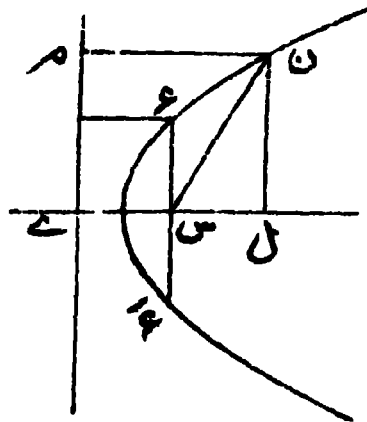
$$\frac{۴ لا^2}{ل^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - \frac{۴ لا}{ل} = ۰$$

کو لف کرتا ہے۔

آٹھواں باب

مخروطی کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو

۱۶۰ — ایک مخروطی کی قطبی مساوات معلوم کرنا جبکہ ماسکہ قطب ہو

فرض کرو کہ ماسکہ س اور ے م مرتب ہے۔ فرض کرو کہ خروج المرکز ز ہے۔

س سے کو مرتب پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ س ے ابتدائی خط ہے۔

فرض کرو کہ وتر خاص ع س ع' ہے تو ز × س ے
= س ع = ل (فرض کرو)

(۲۱۳) فرض کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ ن کے محدد ر، طہ ہیں۔ فرض کرو کہ
ن م، ن ل علی الترتیب مرتب پر اور س ے پر عمود ہیں۔ تب
س ن = ز × ن م = ز × ل ے = ز × ل س + ز × س ے
یا   ر = - ز ر جم طہ + ل

∴   ل/ر = ۱ + ز جم طہ

اگر مخروطی کا محور ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ عہ بناکے تو منحنی کی
مساوات

ل/ر = ۱ + ز جم (طہ - عہ)

ہو گی۔ کیونکہ اس صورت میں س ن، س ے کے ساتھ زاویہ
طہ - عہ بناتا ہے۔

۱۶۱ — اگر مرتب پر کے کسی نقطہ کے محدد ر، طہ ہوں تو

ر جم طہ = س ے = ل/ز

اس لئے مرتب کی مساوات

ل/ر = ز جم طہ

ہے۔ اسی طرح ل/ر = ۱ + ز جم (طہ - عہ) کے مرتب کی مساوات

ل/ر = ز جم (طہ - عہ)

ہے۔

اگر ماسکی وتر ن س نَ ہو اور ن کا سمتی زاویہ طہ تو نَ کا سمتی زاویہ طہ + π ہوگا۔ پس اگر س ن = ر، س نَ = رَ تو

$$\frac{ل}{ر} = ١ + ز جم طہ، \text{ اور } \frac{ل}{رَ} = ١ + ز جم (طہ + \pi)$$

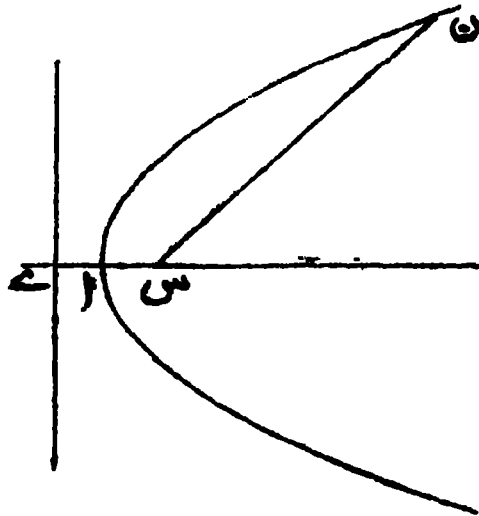
$$\therefore \frac{ل}{ر} + \frac{ل}{رَ} = ٢$$

پس $$\frac{١}{ر} + \frac{١}{رَ} = \frac{٢}{ل}$$

اِس لئے کسی مخروطی میں نیم وتر خاص کسی ماسکی وتر کے مقطوعوں کے درمیان موسیقی اوسط ہوتا ہے۔

(٢١٤) **۲۶۲** — مخروطی $\frac{ل}{ر} = ١ + ز جم طہ$ کو اس کی مساوات سے مرتسم کرنا۔

(١) فرض کرو ز = ١ تو منحنی مکافی ہے اور مساوات ہو جاتی ہے

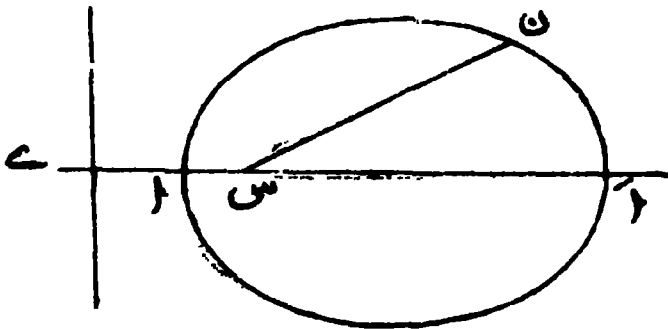
$$\frac{ل}{ر} = ١ + جم طہ$$

نقطہ ا پر جہاں منحنی محور کو قطع کرتا ہے

$$ط = ۰ \quad اور \quad ر = \frac{۱}{۲} ل$$

جیسے زاویہ ط بڑھتا ہے (۱ + جم ط) گھٹتا ہے یعنے $\frac{ل}{ر}$ گھٹتا ہے اور اس لیے ر بڑھتا ہے، اور ر بغیر کسی حد کے بڑھتا ہے یہانتک کہ ط = π تو ر لا انتہا ہی ہو جاتا ہے۔ جیسے ط، π کے آگے بڑھتا ہے (۱ + جم ط) مسلسل بڑھتا ہے اور اس لیے ر مسلسل گھٹتا ہے یہاں تک کہ ط = ۲π تو وہ پھر $\frac{۱}{۲}$ ل کے مساوی ہو جاتا ہے۔ پس منحنی کی شکل وہ ہے جو نقشہ میں دکھائی گئی ہے اور وہ سمت ا س میں لا انتہا فاصلہ تک جاتی ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ز اکائی سے کم ہے تو منحنی ایک ناقص ہے۔

$$نقطہ ا پر ط = ۰ \quad اور \quad ر = \frac{ل}{۱ + ز}$$

جیسے ط بڑھتا ہے جم ط گھٹتا ہے اور اس لیے $\frac{ل}{ر}$ گھٹتا ہے یعنی ر بڑھتا ہے یہانتک کہ ط = π تو ر = $\frac{ل}{۱ - ز}$ [چونکہ ز < ۱، ر کی یہ قیمت مثبت ہے]۔

اس لیے منحنی محور کو مکرر ایک ایسے نقطہ اَ پر قطع کرتا ہے کہ س اَ = ل/(۱ - ز) -
جیسے طہ، π سے ۲ π تک بڑھتا ہے جم طہ مسلسل - ۱ سے ۱ تک بڑھتا ہے، اسلئے ل/ر مسلسل بڑھتا ہے اور ر مسلسل ل/(۱ - ز) سے ل/(۱ + ز) تک گھٹتا ہے -

چونکہ طہ کی کسی قیمت کے لیے جم طہ = جم (۲ π - طہ) اِس لیے منحنی محور کے گرد متشاکل ہے -

اس لیے جب، ز اکائی سے چھوٹا ہوتا ہے تو مساوات ایک بند منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ابتدائی خط کے گرد متشاکل ہوتی ہے -

(۳) فرض کرو کہ ز اکائی سے بڑا ہے تو منحنی ایک زائد ہے -

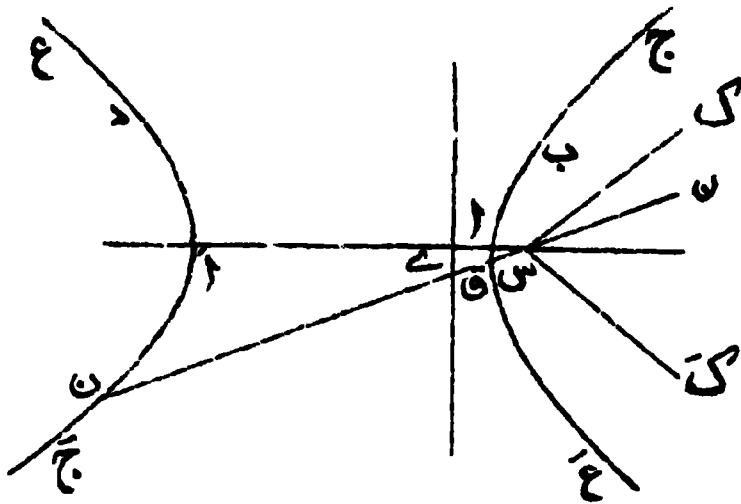
نقطہ ا پر طہ = ۰، اور ر = ل/(۱ + ز)

جیسے طہ بڑھتا ہے جم طہ گھٹتا ہے اور اس لیے ر بڑھتا ہے یہاں تک کہ ۱ + ز جم طہ = ۰ - طہ کی اِس قیمت کے لیے جس کو ہم عہ کہینگے (زاویہ ا س ک شکل میں) ر کی قیمت لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے -

جیسے طہ، عہ کے آگے بڑھتا ہے (۱ + ز جم طہ) منفی ہو جاتا ہے

اور جب، طہ = π تو ر = - ل/(ز - ۱) = س اَ (شکل میں) اور (۱ + ز جم طہ) منفی رہے گا یہاں تک کہ طہ، (۲ π - عہ) کے مساوی ہو یعنی زاویہ ا س ک (شکل میں) ـــــ کے مساوی ہو - جب، طہ = ۲ π - عہ تو ر پھر لا انتہا ہی ہو جاتا ہے - اگر طہ اس سے قدرے کم ہو تو ر بہت بڑا اور منفی ہوگا اور اگر طہ قدرے بڑا ہو تو ر بہت بڑا اور مثبت ہوگا - ر کی قیمتیں مثبت رہیں گی جبکہ طہ، ۲ π - عہ سے ۲ π تک بدلے -

پس منحنی حسب ذیل ترتیب میں مرتسم ہوتا ہے :-

اول حصہ ا ب ج پھر جَ ن اَ اور اَ د ع اور آخر میں ع ق ا۔

منحنی دو جداگانہ شاخوں پر مشتمل ہے اور پوری شاخ جَ ن اَ د ع کے لیے سمتی نیم قطر منفی ہے۔

اگر ایک خط س ق ن (حسب شکل) کھینچا جائے جو منحنی کو دو نقطوں ن اور ق پر جو مختلف شاخوں پر ہوں قطع کرے تو اِن دو نقطوں ق اور ن کے متعلق یہ نہیں سمجھنا چاہیئے کہ اُن کا سمتی زاویہ ایک ہی ہے۔ سمتی نیم قطر س ن منفی ہے یعنی س ن کو اُس سمت میں کھینچا گیا ہے جو اُس سمت کے مخالف ہے جو اس کے سمتی زاویہ کی تحدید کرتی ہے، اس لیے سمتی زاویہ ا س ن ہونا چاہیئے جہاں ن، ن س ممدودہ پر ہے۔ پس اگر ق کا سمتی زاویہ ط ہے تو ن کا ط – π ہوگا۔

١٦٣ — ایک مخروطی پر کے دو دیے ہوئے نقطوں میں سے (٢١٧)

گذرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا اور کسی نقطہ پر
کے مماس کی مساوات معلوم کرنا ۔

فرض کرو کہ دو نقطوں ن اور ق کے سمتی زاویے علی الترتیب
(عہ ۔ بہ) اور (عہ + بہ) ہیں ۔
فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + ز جم ط \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے ۔ وہ خطِ مستقیم جس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ا جم ط + ب جم (ط - عہ) \quad \ldots (۲)$$

ہے کسی دو نقطوں میں سے گذرے گا کیونکہ اس کی مساوات میں دو غیر تابع مستقلات ا اور ب شامل ہیں ۔ چنانچہ وہ دو نقطوں ن اور ق میں سے گذرے گا اگر (۲) میں ر کی وہی قیمتیں ہوں جو اسکی (۱) میں ہیں جبکہ ط = عہ ۔ بہ اور جبکہ ط = عہ + بہ ۔ یہ صورت اس وقت ہو گی جبکہ

$$۱ + ز جم (عہ - بہ) = ا جم (عہ - بہ) + ب جم بہ$$

$$\text{اور} \quad ۱ + ز جم (عہ + بہ) = ا جم (عہ + بہ) + ب جم بہ$$

$$\therefore \quad ا = ز \quad \text{اور} \quad ب جم بہ = ۱$$

ا اور ب کی اِن قیمتوں کو (۲) میں درج کرنے سے ہمیں وتر کی مطلوبہ مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ز جم ط + قط بہ جم (ط - عہ) \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

حاصل ہوتی ہے ۔
اس نقطہ پر جس کا سمتی زاویہ عہ ہے مماس کی مساوات معلوم

کرنے کے لیے (۳) میں ب = ۰ رکھنا چاہیئے چنانچہ اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{ل}{ر} = ز جم ط + جم (ط - عہ)، \qquad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

نتیجہ صریح ۔ اگر مخروطی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + ز جم (ط - جہ)$$

ہو تو اُس وتر کی مساوات جو نقطوں (عہ - بہ) اور (عہ + بہ) کو ملاتا ہے (۲۱۸)

$$\frac{ل}{ر} = ز جم (ط - جہ) + قط بہ . جم (ط - عہ)$$

ہے اور عہ پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ز جم (ط - جہ) + جم (ط - عہ)$$

ہے ۔

۱۶۴ ۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی کی مساوات معلوم کرنا ۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + ز جم ط، \qquad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے اور فرض کرو کہ نقطہ کے محدد $ر_۱$، $ط_۱$ ہیں ۔
فرض کرو کہ اُن نقطوں کے سمتی زاویے عہ ± بہ ہیں جن پر کے مماس نقطہ ($ر_۱$، $ط_۱$) میں سے گذرتے ہیں ۔
اُس خط کی مساوات جو اِن نقطوں میں سے گذرتا ہے

$$\frac{ل}{ر} = ز جم ط + قط بہ جم (ط - عہ)، \qquad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہے ۔ اِن نقطوں پر کے مماسوں کی مساواتیں

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{زجم طہ} + \text{جم} (\text{طہ} - \text{عہ} + \text{بہ})$$

اور

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{زجم طہ} + \text{جم} (\text{طہ} - \text{عہ} - \text{بہ})$$

ہیں ۔ چونکہ یہ مماس $(\text{ر}_1 ، \text{طہ}_1)$ میں سے گذرتے ہیں اِس لیے

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}_1} = \text{زجم طہ}_1 + \text{جم} (\text{طہ}_1 - \text{عہ} + \text{بہ})$$

اور

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}_1} = \text{زجم طہ}_1 + \text{جم} (\text{طہ}_1 - \text{عہ} - \text{بہ})$$

پس $\text{طہ}_1 = \text{عہ}$ اور $\text{جم بہ} = \frac{\text{ل}}{\text{ر}_1} - \text{زجم طہ}_1$

مساوات (۲) میں عہ اور بہ کی بجائے اندراج کرو تو

$$\left(\frac{\text{ل}}{\text{ر}} - \text{زجم طہ}\right)\left(\frac{\text{ل}}{\text{ر}_1} - \text{زجم طہ}_1\right) = \text{جم}(\text{طہ} - \text{طہ}_1) \quad \ldots\ldots (۳)$$

جو مطلوبہ مساوات ہے ۔

۱۶۵ ۔ ایک مخروطی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی قطبی مساوات معلوم کرنا جبکہ ماسکہ قطب ہو ۔

(۲۱۹) فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = ۱ + \text{زجم طہ}$ ہے تو کسی نقطہ عہ پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{زجم طہ} + \text{جم} (\text{طہ} - \text{عہ})$$

ہے ۔

اِس مماس پر کسی عمودی خط کی مساوات

$$\frac{\text{ج}}{\text{ر}} = \text{زجم}\left(\text{طہ} + \frac{\pi}{۲}\right) + \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{\pi}{۲} - \text{عہ}\right)$$

یا

$$\frac{\text{ج}}{\text{ر}} = - \text{زجب طہ} - \text{جب} (\text{طہ} - \text{عہ})$$

ہے ۔

یہ عماد کی مطلوبہ مساوات ہوگی اگر ج کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ نقطہ $\left(\frac{\text{ل}}{1+\text{ز جم عہ}}\text{، عہ}\right)$ خط پر ہو۔ اس لیے حاصل ہونا چاہئے

$$\text{ج}\ \frac{1+\text{ز جم عہ}}{\text{ل}} = -\text{ز جب عہ}$$

یا

$$\text{ج} = \frac{-\text{ل ز جب عہ}}{1+\text{ز جم عہ}}$$

پس عماد کی مساوات

$$\frac{\text{ل ز جب عہ}}{1+\text{ز جم عہ}} \times \frac{1}{\text{ر}} = \text{ز جب طہ} + \text{جب (طہ} - \text{عہ)}$$

ہے۔

مثال ۱ ۔ دو نقطوں پر جن کے سمتی زاویے علی الترتیب عہ اور بہ ہیں مماسوں کی مساواتیں

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم طہ} + \text{جم (طہ} - \text{عہ)}$$

اور

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم طہ} + \text{جم (طہ} - \text{بہ)}$$

ہیں۔ یہ مماس جہاں ملتے ہیں وہاں

$$\text{جم (طہ} - \text{عہ)} = \text{جم (طہ} - \text{بہ)}$$

$$\therefore\ \text{طہ} = \frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{2}$$

پس اگر ایک مخروطی کے نقطوں ن، ق پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ت ہو تو س ت زاویہ ن س ق کی تنصیف کرے گا۔ لیکن اگر مخروطی قطع زائد ہو اور نقطے مختلف شاخوں پر ہوں تو

س ت، خارجی زاویہ ن س ق کی تنصیف کرے گا کیونکہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ن کا سمتی زاویہ (اگر ن بعید تر شاخ پر ہو) وہ زاویہ نہیں ہے جو س ن، س سے کے ساتھ بناتا ہے بلکہ وہ زاویہ ہے جو ن س ممدودہ س سے کے ساتھ بناتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر ایک مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مرتب سے ک پر ملے تو زاویہ ک س ن قائمہ ہوگا۔

اگر ن کا سمتی زاویہ عہ ہو تو ن پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ز\,جم\,ط + جم\,(ط - عہ)$$

ہے۔ یہ مماس مرتب سے جس کی مساوات ل = ز ر جم ط ہے وہاں ملیگا جہاں جم (ط − عہ) = ۰

پس نقطہ ک پر $ط - عہ = \pm \frac{\pi}{2}$

اس لیے زاویہ ک س ن قائمہ ہے

مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی کے وتروں کے محاذی ایک ماسکہ پر ایک مستقل زاویہ بنے تو وتر کے سروں پر کے مماس ایک ثابت مخروطی پر ملیں گے اور وتر ایک دوسرے ثابت مخروطی کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ ۲ ب وہ زاویہ ہے جو وتر کے محاذی ماسکہ پر بنتا ہے۔

فرض کرو کہ وتر کے سروں کے سمتی زاویے عہ − ب اور عہ + ب ہیں۔

تو ان کی مساوات ہوگی

[illegible] جم ب [illegible] = جم (ط − عہ)

یا $\frac{ل جم ب}{ر}$ = ز جم ب جم ط + جم (ط - عہ) . . . . (۱)

لیکن (۱) مخروطی

$\frac{ل جم ب}{ر}$ = ۱ + ز جم ب جم ط ، . . . . . . (۲)

کے اس نقطہ پر کے مماس کی مساوات ہے جس کا سمتی زاویہ عہ ہے ۔
پس وتر ہمیشہ ایک ثابت مخروطی کو مس کرتا ہے جس کا خروج المرکز
ز جم ب ہے اور وتر خاص ۲ ل جم ب ہے ۔
وتر کے سروں پر کے مماسوں کی مساواتیں

$\frac{ل}{ر}$ = ز جم ط + جم (ط - عہ + ب) ،

اور $\frac{ل}{ر}$ = ز جم ط + جم (ط - عہ - ب)

ہیں ۔ یہ دونوں خط مخروطی

$\frac{ل}{ر}$ = ز جم ط + جم ب

سے ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں یعنے وہاں جہاں ط = عہ اور $\frac{ل}{ر}$ = ز جم عہ + جم ب ۔

پس وتر کے سروں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق مخروطی

(۲۲۱) $\frac{ل قط ب}{ر}$ = ۱ + ز قط ب جم ط ، . . . . (۳)

مخروطی (۲) اور (۳) دونوں کا ماسکہ اور مرتب وہی ہیں جو دئے ہوئے مخروطی کے ہیں ۔

مثال ۴ ۔ اس مثلث کے حائط دائرہ کی مساوات معلوم

کرو جو ایک مکافی کے تین مماسوں سے بنتا ہے۔

فرض کرو کہ تین نقطوں ا، ب، ج کے سمتی زاویے علی الترتیب
عہ، بہ، جہ ہیں۔

فرض کرو کہ مکافی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ١ + جم\ طہ$$

ہے۔ تب ا، ب، ج پر کے مماسوں کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ر} = جم\ طہ + جم\ (طہ - عہ)،$$

$$\frac{ل}{ر} = جم\ طہ + جم\ (طہ - بہ)،$$

$$\frac{ل}{ر} = جم\ طہ + جم\ (طہ - جہ)،$$

ہیں۔ ب اور ج پر کے مماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$طہ = \frac{١}{٢}(بہ + جہ) \text{ اور } \therefore \frac{ل}{ر} = ٢\ جم\ \frac{بہ}{٢}\ جم\ \frac{جہ}{٢}$$

ج اور ا پر کے مماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$طہ = \frac{١}{٢}(جہ + عہ)، \text{ اور } \therefore \frac{ل}{ر} = ٢\ جم\ \frac{جہ}{٢}\ جم\ \frac{عہ}{٢}$$

اور ا اور ب پر کے مماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$طہ = \frac{١}{٢}(عہ + بہ)، \text{ اور } \therefore \frac{ل}{ر} = ٢\ جم\ \frac{عہ}{٢}\ جم\ \frac{بہ}{٢}$$

اندراج سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تین نقاطِ تقاطع اُس دائرہ پر ہیں جس کی مساوات

ر = $\frac{ل}{۲ جم \frac{ع}{۲} جم \frac{ب}{۲} جم \frac{ج}{۲}}$ جم (طہ - $\frac{ع}{۲}$ - $\frac{ب}{۲}$ - $\frac{ج}{۲}$)

ہے۔

یہ دائرہ ہمیشہ مکافی کے ماسکہ میں سے گذرتا ہے۔

مثال ۵۔ مخروطی $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + ز جم طہ کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرنا۔

عہ پر کے مماس کی مساوات

$\frac{ل}{ر}$ = ز جم طہ + جم (طہ - عہ) ...... (۱)

ہے۔ نقطہ عہ، مخروطی پر لا متناہی پر کا نقطہ ہوگا اگر

۰ = ۱ + ز جم عہ ...... (۲)

مطلوبہ مساوات (۱) اور (۲) سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی چنانچہ وہ

$\left\{\frac{ز ل}{ر} + (۱ - ز^۲) جم طہ\right\}^۲$ = ز^۲ جب^۲ طہ جب^۲ عہ = (ز^۲ - ۱) جب^۲ طہ

ہے۔

(۲۲۲)

آٹھویں باب پر مثالیں

۱۔ ایک مکافی کے کسی دو مماسوں کے درمیان خارجی زاویہ ان کے نقاطِ تماس کے سمتی زاویوں کے فرق کا نصف ہوتا ہے۔

۲۔ ایک مکافی کے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق جبکہ مماس ایک دوسرے کو ایک مستقل زاویہ پر قطع کریں ایک قطع زائد ہے جس کا ماسکہ اور مرتب وہی ہیں جو ابتدائی مکافی کے ہیں۔

۳ — اگر ایک مخروطی کے کوئی دو ماسکی وتر ن س نَ اور ق س قَ ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ن س \times س نَ} + \frac{1}{ق س \times س قَ}$$ مستقل ہے۔

۴ — اگر ایک مکافی پر ا، ب، ج کوئی تین نقطے ہوں اور ان نقطوں پر کے مماسوں سے مثلث اَ بَ جَ بنے تو ثابت کرو کہ س ا × س ب × س ج = س اَ × س بَ × س جَ جہاں س مکافی کا ماسکہ ہے۔

۵ — اگر ایک ناقص کا ایک ماسکی وتر محور کے ساتھ زاویہ عہ بنائے تو ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو اس کے سروں پر کے مماسوں کے درمیان بنتا ہے

$$مس^{-1} \frac{۲ ز جب عہ}{۱ - ز^۲}$$

ہے۔

۶ — مساوات $\frac{ل}{ر} = ۱ + ز جم طہ$ کے ذریعہ ثابت کرو کہ ناقص کی تکوین ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے ہو سکتی ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

۷ — ایک وتر کے محاذی مخروطی کے ماسکہ پر مستقل زاویہ (۲ عہ) بنتا ہے، وتر کے قطب کا طریق معلوم کرو، ان صورتوں میں تمیز کرو جن کے لیے جم عہ > = < ز۔

۸ — ایک مخروطی کا ایک وتر ن ق ہے جو ایک ماسکہ پر قائمہ زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق کے قطب کا طریق اور وہ طریق جس کو ن ق لف کرتا ہے مخروطیاں ہیں جن کے وتر خاص اور ابتدائی مخروطی کے وتر خاص میں نسبتیں علی الترتیب $\sqrt{۲} : ۱$ اور $۱ : \sqrt{۲}$ ہیں۔

(۲۲۳) ۹ ۔ ایک مخروطی کا ماسکہ اور مرتب دیے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ
ں کے لحاظ سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا قطبی ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۰ ۔ اگر دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان کے مشترک
ِتروں میں سے دو وتر ان کے مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گذرینگے ۔

۱۱ ۔ دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہے اور اس ماسکہ میں سے
ئی وتر کھینچا گیا ہے جو مخروطیوں سے علی الترتیب ن 'نَ اور ق 'قَ پر
تا ہے ۔ ثابت کرو کہ ن ' نَ پر کے مماس ' ق اور قَ پر کے مماسوں
ے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گذرنیوالے
و خطوط مستقیم پر واقع ہیں ' یہ خطوط علی القوائم ہوں گے اگر مخروطیوں کا
روج المرکز ایک ہی ہو ۔

۱۲ ۔ ایک مکافی کے ماسکہ میں سے کوئی دو وتر ل س لَ ' م
ں مَ کھینچے گئے ہیں ۔ ل پر کا مماس نقطوں م ' مَ پر کے مماسوں سے
نقطوں ک ' کَ پر ملتا ہے اور لَ پر کا مماس اُن سے گ ' گَ پر ملتا ہے۔
بت کرو کہ خطوط گ ک ' گَ کَ علی القوائم ہیں ۔

۱۳ ۔ دو مخروطی ایک مشترک ماسکہ رکھتے ہیں جس کے گرد ایک کو
ُمایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ اِن کے مشترک وتروں میں سے دو ' ایسے مخروطیوں کو
س کرینگے جن کا ماسکہ ثابت ماسکہ ہے ۔

۱۴ ۔ ثابت کرو کہ $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + ز جم طہ کے دو مماسوں کے (جو باہم
لی القوائم ہیں) نقطۂ تقاطع کے طریق کی مساوات

ر۲ (ز۲ ۔ ۱) ۔ ۲ ل ز ر جم طہ + ۲ ل۲ = ۰

ہے ۔

۱۵ ۔ اگر ایک ناقص کے ماسکوں س ' ھ میں سے گذرنیوالے
ِ و تر ن س ق ' ن ھ ر ہوں تو $\frac{ن س}{س ق}$ + $\frac{ن ھ}{ھ ر}$ ' ن کے محل پر

منحصر نہیں ہوگا ۔

۱۶ ــــ دو مخروطی ایک ہی ماسکہ کے ساتھ بنائے گئے ہیں اور راس ماسکہ کا فاصلہ ہر ایک کے متناظر مرتب سے وہی ہے ۔ اگر یہ مخروطی ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو کہ قاطع محوروں کے درمیانی زاویہ کے نصف کی جیب کا دگنا، خروج المرکزوں کے متکافیوں کے فرق کے مساوی ہے ۔

۱۷ ــــ دئے ہوئے نصف قطر کا ایک دائرہ جو ایک دئے ہوئے مخروطی کے ماسکہ میں سے گذرتا ہے مخروطی کو نقطوں ا، ب، ج، د پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ (۲۲)

$$\text{س ا} \times \text{س ب} \times \text{س ج} \times \text{س د}$$

مستقل ہے ۔

۱۸ ــــ ایک دائرہ ایک مخروطی کے ماسکہ میں سے جس کا وتر خاص ۲ ل ہے گذرتا ہے اور مخروطی سے چار نقطوں پر ملتا ہے جن کے فاصلے ماسکہ سے ر، ر۲، ر۳، ر۴ ہیں ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ر_1} + \frac{1}{ر_2} + \frac{1}{ر_3} + \frac{1}{ر_4} = \frac{2}{ل}$$

۱۹ ــــ ایک دیا ہوا دائرہ جس کا مرکز ایک مکافی کے محور پر ہے ماسکہ س میں سے گذرتا ہے اور کسی مخروطی سے جس کا وتر خاص دیا گیا ہے اور ماسکہ س ہے اور مکافی کا ایک مماس اس کا مرتب ہے چار نقطوں ا، ب، ج، د پر منقطع ہوتا ہے ۔ ثابت کرو کہ فاصلوں س ا، س ب، س ج، س د کا مجموعہ مستقل ہے ۔

۲۰ ــــ دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ س مشترک ہے اور ان کے محاور ایک ہی سمت میں ہیں ۔ ان مخروطیوں میں سے ایک پر نقطہ ن اور دوسرے پر نقطہ ق لیے گئے ہیں ایسے کہ ن س اور ق س علی القوائم ہیں ۔ ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے مماس ایک مخروطی پر ملتے ہیں جسکے خروج المرکز کا مربع ابتدائی مخروطیوں کے خروج المرکزوں کے مربعوں کے

مجموعہ کے مساوی ہے۔

۲۱ ـــ ایک مشترک وتر خاص کے ساتھ مخروطیوں کا ایک سلسلہ مرتسم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان کے ان نقطوں کا طریق جن پر ماسکہ سے مماس عمود نیم وتر خاص کے مساوی ہے مساوات ل = - ز جم ۲ طہ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۲ ـــ اگر ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرنیوالا وتر ن و نَ ہو تو $\frac{۱}{۲}$ نَ س و س $\frac{۱}{۲}$ ن س و مستقل ہوگا جہاں س مخروطی کا ایک ماسکہ ہے۔

۲۳ ـــ مخروطی مرتسم کئے گئے ہیں جن کے وتر خاص مساوی ہیں اور ایک ماسکہ مشترک ہے۔ نیز متناظر مرتب ایک ثابت ہم ماسکی مخروطی کو لف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ مخروطی سب کے سب دو ثابت مخروطیوں کو مس کرتے ہیں جن کے وتر خاص کے متکافی علی الترتیب متغیر مخروطی اور اس کے ہم ماسکہ ثابت مخروطی کے وتر خاص کا مجموعہ اور فرق ہیں اور جن کا مرتب وہی ہے جو ثابت ہم ماسکی مخروطی کا ہے۔

۲۴ ـــ ایک مخروطی کو مرتسم کیا گیا ہے جس کا ماسکہ اور خروج المرکز وہی ہیں جو مخروطی $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + ز جم طہ کے ہیں اور یہ دو مخروطی نقطہ طہ = عہ پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے وتر خاص کا طول $\frac{۲ ل (۱ - ز^{۲})}{ز^{۲} + ۲ ز جم عہ + ۱}$ ہوگا۔

(۲۲۵) ۲۵ ـــ نقطہ (رَ، طَہ) سے مخروطی $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + ز جم طہ کے مماسوں کا زوج کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان مماسوں کے زوج کی مساوات

$$\left\{\left(\frac{ل}{ر} - ز جم طہ\right)^{۲} - ۱\right\}\left\{\left(\frac{ل}{رَ} - ز جم طَہ\right)^{۲} - ۱\right\}$$

$$= \left[\left(\frac{ل}{ر} - ز جم طہ \right) \left(\frac{ل}{ر} - ز جم \bar{طہ} \right) - جم (طہ - \bar{طہ}) \right]^{۲}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔
نیز ثابت کرو کہ متقارب

$$\frac{زل}{ر} = (ز^{۲} - ۱) جم طہ \pm جب طہ \sqrt{ز^{۲} - ۱}$$

ہیں۔

۲۶ ۔ اگر $\frac{ل}{ر} = ۱ + جم طہ$ کے نقطوں عہ، بہ، جہ پہ کے عماد نقطہ (غہ، فہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ ۲ فہ = عہ + بہ + جہ ۔

۲۷ ۔ اگر $\frac{ل}{ر} = ۱ + ز جم طہ$ کے اُن نقطوں پہ کے عماد جن کے سمتی زاوئے $طہ_۱$، $طہ_۲$، $طہ_۳$ ہیں نقطہ (غہ، فہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ $طہ_۱ + طہ_۲ + طہ_۳ - ۲ فہ = (۲ ن + ۱) \pi$ ۔

۲۸ ۔ اگر $\frac{ل}{ر} = ۱ + جم طہ$ کے اُن نقطوں ن، ق، ر پہ کے عماد جن کے سمتی زاوئے $طہ_۱$، $طہ_۲$، $طہ_۳$ ہیں نقطہ و (غہ، عہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ اُس مثلث کے حائط دائرہ کا قطر جو ن، ق، ر پہ کے مماسوں سے بنتا ہے س و کے مساوی ہوگا جہاں س مکافی کا ماسکہ ہے۔

نواں باب

درجۂ دوم کی عام مساوات

۱۶۶ ـــ ہم ابواب ماسبق میں دیکھ چکے ہیں کہ کسی مخروطی کی مساوات ہمیشہ درجہ دوم کی ہوتی ہے، اب ہم ثابت کریں گے کہ درجہ دوم کی ہر مساوات ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے اور نیز معلوم کریں گے کہ کسی ایسی مساوات سے اس مخروطی کی نوعیت اور محل کس طرح متعین کئے جا سکتے ہیں جس کو وہ تعبیر کرتی ہے۔

۱۶۷ ـــ ثابت کرو کہ ہر منحنی جس کی مساوات دوسرے درجہ کی ہے ایک مخروطی ہے۔

ہم محددوں کے محوروں کو قائم فرض کر سکتے ہیں کیونکہ اگر مساوات مائل محوروں کے حوالے سے دی گئی ہو اور اگر ہم قائم محوروں میں تبدیل کریں تو مساوات کا درجہ نہیں بدلتا [دفعہ ۵۳]۔

پس فرض کرو کہ منحنی کی مساوات

ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ......(۱)

ہے۔

چونکہ درجہ دوم کی مساوات کی یہ عام سے عام شکل ہے اس لئے اس میں تمام ممکنہ صورتیں شامل ہیں۔

ہم رقم لا ما کو اس طرح خارج کر سکتے ہیں کہ محوروں کو ایک خاص زاویہ میں سے گھمایا جائے کیونکہ محوروں کو ایک زاویہ ط میں سے گھمانے کے لیے ہمیں لا اور ما کی بجائے علی الترتیب

لا جم طہ ـ ما جب طہ اور لا جب طہ + ما جم طہ

درج کرنا ہوگا۔

(۲۲۰) چنانچہ مساوات (۱) ہو جائے گی

ا (لا جم طہ ـ ما جب طہ)^2 + ۲ ھ (لا جم طہ ـ ما جب طہ)
(لا جب طہ + ما جم طہ)
+ ب (لا جب طہ + ما جم طہ)^2 + ۲ گ (لا جم طہ ـ ما جب طہ)
+ ۲ ف (لا جب طہ + ما جم طہ) + ج = ۰ ۔ ۔ ۔ ۔ (۲)

(۲) میں لا ما کا سر

۲ (ب ـ ا) جب طہ جم طہ + ۲ ھ (جم^2 طہ ـ جب^2 طہ)

ہے اور یہ صفر ہوگا اگر

مس ۲ ط = $\frac{۲ ھ}{ا - ب}$ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۳)

چونکہ کسی ایسے زاویہ کو معلوم کیا جا سکتا ہے جس کا مماس کسی حقیقی مقدار کے مساوی ہے اس لیے زاویہ طہ = $\frac{۱}{۲}$ مس$^{-۱}$ $\frac{۲ ھ}{ا - ب}$ تمام صورتوں میں حقیقی ہے۔

اب مساوات (۲) کو لکھا جا سکتا ہے

ا لا^2 + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۴)

اگر ا اور ب میں سے کوئی بھی صفر نہیں ہے تو ہم مساوات (۴) کو شکل

ا (لا + $\frac{گ}{ا}$)^2 + ب (ما + $\frac{ف}{ب}$)^2 = $\frac{گ^2}{ا}$ + $\frac{ف^2}{ب}$ ـ ج = ک

میں لکھ سکتے ہیں، یا مبدا کو نقطہ $\left(-\frac{گ}{ا}، -\frac{ف}{ب}\right)$ پر لینے سے

$$ا\, لا^2 + ب\, ما^2 = ک، \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

اگر مساوات (۵) کا بائیں جانبی رکن صفر ہو تو مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی [دفعہ ۳۵]۔

لیکن اگر مساوات (۵) کا بائیں جانبی رکن صفر نہ ہو تو ہمیں مساوات

$$\frac{لا^2}{\frac{ک}{ا}} + \frac{ما^2}{\frac{ک}{ب}} = ۱$$

حاصل ہوتی ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ مساوات ایک ناقص کو تعبیر کرے گی اگر دونوں نسب نما مثبت ہوں اور ایک زائد کو تعبیر کرے گی اگر ایک نسب نما منفی اور دوسرا مثبت ہو۔

اگر دونوں نسب نما منفی ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں مساوات کو پورا نہیں کرینگی۔ اِس صورت میں منحنی ایک خیالی ناقص ہوتا ہے۔

(۲۲۸) پھر فرض کرو کہ ا یا ب صفر ہے، مثلاً فرض کرو ا صفر ہے۔ [ا اور ب دونوں بموجب دفعہ ۵۳ صفر نہیں ہو سکتے] تب مساوات (۴) لکھی جا سکتی ہے

$$ب\left(ما + \frac{ف}{ب}\right)^2 = -۲گ\, لا - ج + \frac{ف^2}{ب}، \quad \ldots\ldots (۶)$$

اگر گ = ۰ تو یہ مساوات متوازی خطوط کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے جو منطبق ہونگے اگر گ = ۰ اور نیز ف^۲ - ب ج = ۰۔

اگر گ صفر نہیں ہے تو ہم مساوات کو لکھ سکتے ہیں

$$\left(ما + \frac{ف}{ب}\right)^2 = -\frac{۲گ}{ب}\left(لا - \frac{ف^2}{۲ب گ} + \frac{ج}{۲گ}\right)$$

جو ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور محور لا کے متوازی ہے۔

پس تمام صورتوں میں وہ منحنی جو درجۂ دوم کی عام مساوات سے تعبیر ہوتا ہے مخروطی ہے۔

۱۶۸ ۔ ایک مخروطی کے مرکز کے محدد معلوم کرنا ۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب محددوں کا مبدا، کسی مخروطی کا مرکز ہوتا ہے تو مخروطی کی مساوات میں وہ رقمیں شامل نہیں ہوتیں جن میں متغیروں کا درجہ پہلا ہوتا ہے پس مخروطی کا مرکز معلوم کرنے کے لیے مبدا، کو کسی نقطہ (لاَ، ماَ) پر تبدیل کرنا چاہئے اور لاَ، ماَ کا ایسا انتخاب کرنا چاہیئے کہ استحالہ شدہ مساوات میں لا اور ما کے سر صفر ہو جائیں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 + ۲\,\text{گ}\,\text{لا} + ۲\,\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$$

ہے۔

(لاَ، ماَ) میں سے گذرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات اس طرح حاصل کیجاسکتی ہے کہ لا کی بجائے لا + لاَ اور ما کی بجائے ما + ماَ درج کیا جائے چنانچہ استحالہ شدہ مساوات ہوگی

$$\text{ا}(\text{لا}+\text{لاَ})^2 + ۲\,\text{ھ}(\text{لا}+\text{لاَ})(\text{ما}+\text{ماَ}) + \text{ب}(\text{ما}+\text{ماَ})^2 + ۲\,\text{گ}\,(\text{لا}+\text{لاَ})$$
$$+ ۲\,\text{ف}(\text{ما}+\text{ماَ}) + \text{ج} = ۰$$

یا

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 + ۲\,\text{لا}(\text{ا}\,\text{لاَ} + \text{ھ}\,\text{ماَ} + \text{گ}) + ۲\,\text{ما}(\text{ھ}\,\text{لاَ} + \text{ب}\,\text{ماَ} + \text{ف})$$
$$+ \text{ا}\,\text{لاَ}^2 + ۲\,\text{ھ}\,\text{لاَ}\,\text{ماَ} + \text{ب}\,\text{ماَ}^2 + ۲\,\text{گ}\,\text{لاَ} + ۲\,\text{ف}\,\text{ماَ} + \text{ج} = ۰،$$

اس مساوات میں لا اور ما دونوں کے سر صفر ہونگے اگر لاَ اور ماَ کو اسطرح

منتخب کیا جائے کہ

ا لاَ + ھ ماَ + گ = ۰ ، .... (۱)

اور ھ لاَ + ب ماَ + ف = ۰ ، .... (۲)

تب (لاَ ، ماَ) کو مبدا مانکر اس کے حوالے سے استحالہ شدہ مساوات (۲۲۹)

ا لا^2 + ب ما^2 + ۲ ھ لا ما + جَ = ۰ ، ..... (۳)

ہوگی جہاں

جَ = ا لاَ^{2} + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^{2} + ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج ، ... (۴)

پس مخروطی کے مرکز کے محدد لاَ اور ماَ کی وہ قیمتیں ہیں جو مساواتوں (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتی ہیں۔

اس لیے مرکز نقطہ

$$\left(\frac{\text{ھ ف} - \text{ب گ}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^2} \text{ ، } \frac{\text{گ ھ} - \text{ا ف}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^2} \right)$$

ہے۔

اگر ا ب - ھ^2 = ۰. تو مرکز کے محدد لامتناہی ہوتے ہیں اور اسلیے منحنی ایک مکافی ہوتا ہے [دفعہ ۱۵۸]

لیکن اگر ھ ف - ب گ = ۰. اور ا ب - ھ^2 = ۰. یعنے اگر

$$\frac{\text{ا}}{\text{ھ}} = \frac{\text{ھ}}{\text{ب}} = \frac{\text{گ}}{\text{ف}}$$

تو مساواتوں (۱) اور (۲) سے ایک ہی خطِ مستقیم تعبیر ہوتا ہے اور اس خط کا کوئی نقطہ مرکز ہے۔ اِس صورت میں طریق متوازی خطوں کا ایک زوج ہے۔

اوپر کی تحقیق میں محاور قائم یا مائل ہو سکتے ہیں۔

آئندہ وہ نتائج جو مائل محوروں کے لیے درست رہتے ہیں علامت (سہ) کے ذریعہ دکھائے جائیں گے۔

۱۶۹ — دفعہ ماسبق کی مساواتوں (۱) اور (۲) کو علی الترتیب لاَ اور ماَ

سے ضرب دو اور مجموعہ کو (۴) کے بائیں جانبی رکن سے تفریق کرو تو

جَ = گ لاَ + ف ماَ + ج ، . . . . (۵)

= گ (ھ ف - ب گ)/(اب - ھ^2) + ف (گ ھ - ا ف)/(اب - ھ^2) + ج

= (اب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^2 - ب گ^2 - ج ھ^2)/(اب - ھ^2) ، . . (۶)

یا مساواتوں (۱)، (۲) اور (۵) سے لاَ، ماَ کو ساقط کرنے پر فوراً حاصل ہوتا ہے

| ا ھ گ |
| ھ ب ف |
| گ ف ج - جَ | = ۰ یعنی | ا ھ گ / ھ ب ف / گ ف ج | - جَ (اب - ھ^2) = ۰

(۲۳۰) ۱۷۰ - جملہ اب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^2 - ب گ^2 - ج ھ^2 کو بالعموم علامت ∆ سے تعبیر کیا جاتا ہے اور اس کو

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج

کا ممیز کہتے ہیں -

∆ = ۰ سے وہ شرط حاصل ہوتی ہے کہ مخروطی دو خطوطِ مستقیم ہو سکے - کیونکہ اگر ∆ صفر ہے تو جَ صفر ہے اور اس صورت میں دفعہ ۱۶۸ کی مساوات (۳) دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی -

یہ وہ شرط ہے جو ہم نے دفعہ ۳۷ میں معلوم کی تھی -

۱۷۱ - اُس مخروطی کے محوروں کا محل اور مقدار معلوم کرنا جسکی مساوات ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱ ہے -

اگر ایک مخروطی کسی ہم مرکز دائرہ سے منقطع ہو تو نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے قطر مخروطی کے محوروں کے ساتھ مساوی المیلان ہوں گے اور وہ منطبق ہونگے اگر دائرہ کا نصف قطر مخروطی کے کسی ایک نیم محور کے مساوی ہو -

وہ خطوط جو مبدا میں سے اور مخروطی اور دائرہ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتے ہیں مساوات

(ا − ۱/ر²) لا² + ۲ ھ لا ما + (ب − ۱/ر²) ما² = ۰ ......(۱)

سے حاصل ہوتے ہیں اگر دائرہ کی مساوات لا² + ما² = ر² ہو۔
یہ خطوط منطبق ہونگے اگر

(ا − ۱/ر²)(ب − ۱/ر²) − ھ² = ۰ ..... (۲)

اور اس صورت میں وہ مخروطی کے محوروں میں سے ایک یا دوسرے پر منطبق ہونگے۔
پس مخروطی کے نیم محوروں کے طول مساوات (۲) کی اصلیں ہیں یعنے مساوات

۱/ر⁴ − (ا + ب) ۱/ر² + اب − ھ² = ۰ ..... (۳)

کی اصلیں ہیں۔

اب (۱) کو (ا − ۱/ر²) سے ضرب دو، تب اگر ۱/ر² مساوات (۲) کی اصلوں میں سے کوئی ایک ہو تو

(ا − ۱/ر²)² لا² + ۲ ھ (ا − ۱/ر²) لا ما + ھ² ما² = ۰

اِس لیے (ا − ۱/ر²) لا + ھ ما = ۰ ...... (۴) (۲۲۱)

پس اگر ہم (۴) میں مساوات (۳) کی کوئی ایک اصل درج کریں تو متناظر محور کی مساوات حاصل ہوگی۔
اوپر کی تحقیق میں ہم نے محوروں کو قائم فرض کیا ہے۔ لیکن اگر محور زاویہ سہ پر مائل ہوں تو اِسمیں قدرے ترمیم کرنی ہوگی کیونکہ نصف قطر ر کے دائرہ کی

مساوات لا^2 + ۲ لا ما جم سہ + ما^2 = ر^2 ہوگی ۔

۱۷۲ ـ ایک مکافی کا محور اور وترِ خاص معلوم کرنا۔

اگر مساوات

ولا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ایک مکافی کو تعبیر کرے تو دوسرے درجہ کی ارقام کامل مربع ہونگی [دفعہ ۱۰۴]۔
اس لیے مساوات

(عہ لا + بہ ما)^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ...... (۱)

کے مماثل ہے جہاں عہ^2 = ا اور بہ^2 = ب ۔

(۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خط عہ لا + بہ ما = ۰ پر عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے خط ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ پر کا عمود ۔ ان خطوط کا علی القوائم ہونا ضروری نہیں ہے لیکن ہم مساوات (۱) کو شکل

(عہ لا + بہ ما + لہ)^2 = ۲ لا (لہ عہ - گ) + ۲ ما (لہ ب - ف) + لہ^2 - ج

میں لکھ سکتے ہیں اور وہ دو خطوطِ مستقیم جن کی مساواتیں

عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ اور ۲ لا (لہ عہ - گ) + ۲ ما (لہ ب - ف) + لہ^2 - ج = ۰

ہیں علی القوائم ہونگے اگر

عہ (لہ عہ - گ) + بہ (لہ بہ - ف) = ۰

یا اگر لہ = (عہ گ + بہ ف) \ (عہ^2 + بہ^2)

اب

عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ اور ۲ (عہ لہ - گ) لا + ۲ (بہ لہ - ف) ما + لہ^2 - ج = ۰

کو علی الترتیب لا اور ما کے نئے محور قرار دو تو حاصل ہوگا

ما^2 = ۴ ع لا

اور ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک مکافی کی مساوات ہے جو اس کے محور اور راس پر کے مماس کے حوالے سے حاصل ہوتی ہے ۔

وترِ خاص معلوم کرنیکے لیے ہم مساوات کو شکل

(۲۳۲)

((عہ لا + بہ ما + لہ) / √(عہ^۲ + بہ^۲))^۲ ÷ ۴ع { (۲(عہ لہ − گ) لا + ۲(بہ لہ − ف) ما + لہ^۲ − ج) / √(۴(عہ لہ − گ)^۲ + ۴(بہ لہ − ف)^۲) }

میں لکھتے ہیں، پس ۴ع = √(۴(عہ لہ − گ)^۲ + ۴(بہ لہ − ف)^۲) / (عہ^۲ + بہ^۲)

اس لیے (۱) مکافی ہے جس کا محور

عہ لا + بہ ما + لہ = ۰

ہے اور جس کا وتر خاص

۲ √((عہ لہ − گ)^۲ + (بہ لہ − ف)^۲) / (عہ^۲ + بہ^۲) = ۲(عہ ف − بہ گ) / (عہ^۲ + بہ^۲)^(۳/۲)

ہے کیونکہ لہ = (عہ گ + بہ ف) / (عہ^۲ + بہ^۲)

۱۷۴ — اب ہم اُن مخروطیوں کا محل اور انکی نوعیت معلوم کریں گے

جن کی مساواتیں حسب ذیل ہیں:

(۱) ۷ لا^۲ − ۱۷ لا ما + ۶ ما^۲ + ۲۳ لا − ۲ ما − ۲۰ = ۰،

(۲) لا^۲ − ۵ لا ما + ما^۲ + ۸ لا − ۲۰ ما + ۱۵ = ۰،

(۳) ۳۶ لا^۲ + ۲۴ لا ما + ۲۹ ما^۲ − ۷۲ لا + ۱۲۶ ما + ۸۱ = ۰،

(۴) (۵ لا − ۱۲ ما)^۲ − ۲ لا − ۲۹ ما − ۱ = ۰

(۱) مرکزوں کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں [دفعہ ۱۶۸ (۱)، (۲)]

۱۴ لاَ − ۱۷ ماَ + ۲۳ = ۰،

− ۱۷ لاَ + ۱۲ ماَ − ۲ = ۰

ہیں۔ ان سے لاَ = ۲ اور ماَ = ۳ - اسلئے مرکز نقطہ (۲، ۳) ہے۔

مرکز میں سے گذرنیوالے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات [دفعہ ۱۶۹]

۷ لا^۲ − ۱۷ لا ما + ۶ ما^۲ + (۲۳/۲) × ۲ − ۱ × ۳ − ۲۰ = ۰

ہے، یا

$$7\,\text{لا}^2 - 81\,\text{لا ما} + 6\,\text{ما}^2 = 0$$

پس مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ (۲، ۳) پر متقاطع ہوتے ہیں ۔ وہ محور لا کو وہاں قطع کرتے ہیں جہاں $7\,\text{لا}^2 + 23\,\text{لا} - 20 = 0$ ۔ یعنے جہاں $\text{لا} = -4$ اور جہاں $\text{لا} = \frac{5}{7}$ ۔

(۲) $$\text{لا}^2 - 5\,\text{لا ما} + \text{ما}^2 + 8\,\text{لا} - 20\,\text{ما} + 15 = 0$$

مرکز معلوم کرنیکے لیے مساواتیں

$$2\,\text{لاَ} - 5\,\text{ماَ} + 8 = 0 \text{ اور } -5\,\text{لاَ} + 2\,\text{ماَ} - 20 = 0$$

ہیں چنانچہ $\text{لاَ} = -4$ اور $\text{ماَ} = 0$ ۔

مرکز میں سے گذرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات

$$\text{لا}^2 - 5\,\text{لا ما} + \text{ما}^2 + 4(-4) + 15 = 0$$

یا

$$\text{لا}^2 - 5\,\text{لا ما} + \text{ما}^2 = 1$$

ہوگی ۔

(۳) اس مخروطی کے نیم محور مساوات

$$\frac{1}{\text{ر}^4} - (\text{ل} + \text{ب})\frac{1}{\text{ر}^2} + \text{ل ب} - \text{ھ}^2 = 0 \text{، } \quad [\text{دفعہ ۱۷۱، (۳)}]$$

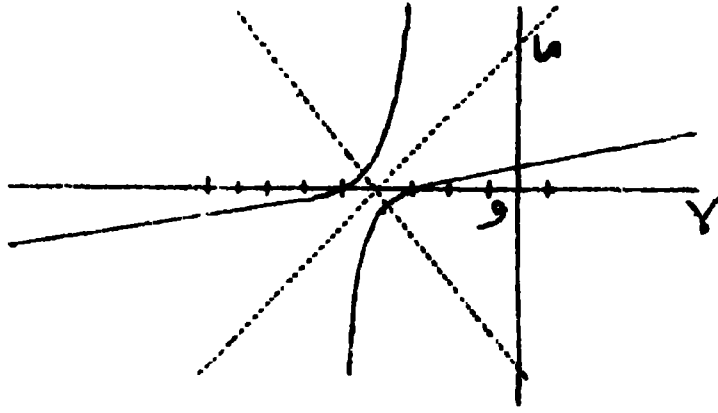
کی اصلیں ہیں ۔

$$\therefore \quad \frac{1}{\text{ر}^4} - \frac{2}{\text{ر}^2} + 1 - \frac{25}{4} = 0$$

یا

$$21\,\text{ر}^4 + 8\,\text{ر}^2 - 4 = 0$$

$$\therefore \quad \text{ر}^2 = \frac{2}{7} \text{ یا } -\frac{2}{3}$$

اس لیے منحنی ایک زائد ہے جس کا حقیقی نیم محور $\frac{1}{7}\sqrt{14}$ ہے اور خیالی نیم محور $\frac{1}{3}\sqrt{-6}$ ہے ۔

حقیقی محور کی سمت [دفعہ ۱۷۱ (۴)] مساوات

(۱ − ۷/۲) لا − ۵/۲ ما = ۰

یا

لا + ما = ۰

سے حاصل ہوگی۔

(۳) ۳۶ لا² + ۲۴ لا ما + ۲۹ ما² − ۷۲ لا + ۱۲۶ ما + ۸۱ = ۰

مرکز معلوم کرنے کے لیے مساواتیں ہیں

۳۶ لاَ + ۱۲ ماَ − ۳۶ = ۰، اور ۱۲ لاَ + ۲۹ ماَ + ۶۳ = ۰

∴ لاَ = ۲، ماَ = −۳

مرکز میں سے گذرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات ہوگی

۳۶ لا² + ۲۴ لا ما + ۲۹ ما² − ۲ × ۲ + ۶۳ (−۳) + ۸۱ = ۰

یا

لا²/۵ + ۲/۱۵ لا ما + ۲۹/۱۸۰ ما² = ۱

اِس مخروطی کے نیم محور مساوات

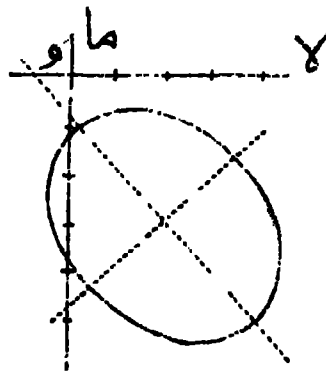
۱/ر⁴ − (ا + ب) ۱/ر² + اب − ھ² = ۰ (۲۳۴)

کی اصلیں ہیں اور

$$ا + ب = \frac{۶۵}{۱۸۰} = \frac{۱۳}{۳۶}،$$

$$اب - ط^۲ = \frac{۲۹}{۹۰۰} - \frac{۱}{۲۲۵} = \frac{۱}{۳۶}$$

$$\therefore \quad ۳۶ - ۱۳ ر^۲ + ر^۴ = ۰$$

اس لیے نیم محوروں کے مربع ۹ اور ۴ ہیں ۔

محور اعظم کی مساوات [دفعہ ۱۷۱ (۲)]

$$\left(\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۹}\right) لا + \frac{۱}{۱۵} ما = ۰$$

یا

$$۴ لا + ۳ ما = ۰$$

ہے ۔

(۴)

$$(۵ لا - ۱۲ ما)^۲ - ۲ لا - ۲۹ ما - ۱ = ۰$$

اس مساوات کو شکل

$$(۵ لا - ۱۲ ما + ل)^۲ = ۲ لا (۱ + ۵ ل) + ما (۲۹ - ۲۴ ل) + ل^۲ + ۱$$

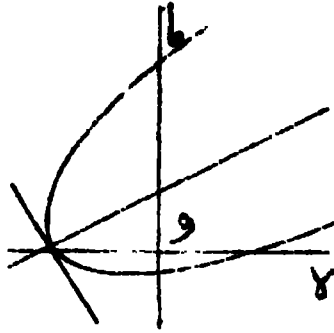
میں لکھا جا سکتا ہے ۔

خطوط ۵ لا − ۱۲ ما + لہ = ۰ (۲۳۵)

اور ۲ (۱ + ۵ لہ) لا + (۲۹ − ۲۴ لہ) ما + لہ² + ۱ = ۰

علی القوائم ہیں اگر

۱۰ + ۵۰ لہ − ۳۴۸ + ۲۸۸ لہ = ۰

یعنے اگر لہ = ۱ ۔

اِس لیے دی ہوئی مساوات

$$\left(\frac{۵\ لا - ۱۲\ ما + ۱}{۱۳}\right)^{۲} = \frac{۱}{۱۳}\ \frac{۱۲\ لا + ۵\ ما + ۲}{۱۳} \quad ...... (۱)$$

کے مماثل ہے۔ اِس لیے مکافی کے محور کی مساوات ۵ لا − ۱۲ ما + ۱ = ۰ ہے اور راس پر کے مماس کی مساوات ۱۲ لا + ۵ ما + ۲ = ۰ ہے۔

منحنی کا ہر نقطہ صریحاً خط ۱۲ لا + ۵ ما + ۲ = ۰ کی مثبت جانب ہونا چاہیے کیونکہ مساوات (۱) کی دائیں جانب ہمیشہ مثبت ہے۔

۱۷۴ — مخروطی کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرنا۔

ہم (دفعہ ۱۴۷ میں) دیکھ چکے ہیں کہ مخروطی کی مساوات اور متقاربوں کی مساوات میں صرف ایک مستقل مقدار کا فرق ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ،..... (۱)

ہے۔ تب متقاربوں کی مساوات ہوگی

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج + لہ = ۰ ،... (۲)

بشرطیکہ ہم لہ کو ایسی قیمت دیں کہ وہ (۲) کو خطوطِ مستقیم کا ایک زوج بنادے۔

وہ شرط کہ (۲) خطوطِ مستقیم کے زوج کو تعبیر کرے یہ ہے کہ [دفعہ ۱۷۱]

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج + لہ

= ۰

∴ لہ (اب − ھ²) + Δ = ۰

اِس لیے (۱) کے متقاربوں کی مساوات

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج − Δ / (اب − ھ²) = ۰

ہے۔

دو مزدوج قطعات زائد کی مساواتوں اور اِن کے متقاربوں کی مساوات میں صرف مستقلات کا فرق ہوگا جو ایک دوسرے کے مساوی مگر علامت میں مختلف ہوں گے [دفعہ ۱۵۳]، اِس لیے (۱) کے مزدوج زائد کی مساوات

(۲۳۶)

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج − ۲Δ / (اب − ھ²) = ۰

ہے۔

نتیجہ صریح۔ وہ خطوط جو مساوات

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰

سے تعبیر ہوتے ہیں مخروطی کے متقاربوں کے متوازی ہوتے ہیں۔ ۱

مثال ۱۔ مخروطی لا² − لا ما − ۲ ما² + ۳ ما − ۱ = ۰

کے متقارب معلوم کرو۔

متقارب لا² - لا ما - ۲ ما² + ۳ ما - ۲ + ل = ۰ ہونگے اگر یہ مساوات خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے۔ اِس کو لا میں دو درجی سمجھ کر حل کرنے سے

لا = ما/۲ ± √(۹/۴ ما² - ۳ ما + ۲ - ل)

اِس لیے خطوطِ مستقیم کے لیے (دفعہ ۳۷) ۹ = ۹(۲ - ل) یا ل = ۱ ہے۔ اِس لیے مطلوبہ متقارب

لا² - لا ما - ۲ ما² + ۳ ما - ۱ = ۰

ہیں۔

۱۷۵ — وہ شرط معلوم کرنا کہ درجۂ دوم کی عام مساوات سے تعبیر شدہ مخروطی قائم زائد ہو۔

اگر مخروطی کی مساوات

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہو تو مساوات ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰، ......(۱)

دو ایسے خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو متقاربوں کے متوازی ہیں۔

اِس لیے اگر عام مساوات سے تعبیر شدہ مخروطی قائم زائد ہے تو خطوط (۱) کو باہم علی القوائم ہونا چاہیئے۔ اِس لیے مطلوبہ شرط [دفعہ ۴۴]

ا + ب - ۲ ھ جم سہ = ۰، ......(۲)

ہے۔

اگر محدودوں کے محاور باہم علی القوائم ہوں تو شرط

ا + ب = ۰، ......(۳)

ہوگی۔

(۲۳۷) **۱۷۶ —** کسی مرکز دار مخروطی کے محوروں کے طول جو درجۂ دوم کی عام مساوات سے حاصل ہوتے ہیں دفعات ۱۶۹ اور ۱۷۱ کے نتیجوں سے

معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

مبداء کو مخروطی کے مرکز پر تبدیل کرنے سے مساوات

$$ا\,لا^2 + 2\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^2 + 2\,گ\,لا + 2\,ف\,ما + ج = 0$$

ہو جاتی ہے $ا\,لا^2 + 2\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^2 + ج' = 0$، .... (۱)

جہاں $ج' = \frac{\Delta}{اب - ھ^2}$، .... (۲)

اب دفعہ ۱۷۱ کی رو سے مخروطی (۱) کے نیم محوروں کے مربع مساوات

$$ر^4(اب - ھ^2) + (ا + ب)\,ج'\,ر^2 + ج'^2 = 0$$

کی اصلیں ہیں، یا (۲) سے

$$ر^4(اب - ھ^2) + \Delta(ا + ب)(اب - ھ^2)\,ر^2 + \Delta^2 = 0$$

کی اصلیں ہیں۔

مثال ۱۔ مخروطی $5\,لا^2 + 6\,لا\,ما + 5\,ما^2 + 12\,لا + 4\,ما - 4 = 0$ کے محوروں کے طول معلوم کرو۔

یہاں $اب - ھ^2 = 16$ اور $\Delta = -192$

اس لیے نیم محوروں کے مربعوں کے لیے مساوات

$$16^2 \times ر^4 - 192 \times 10 \times 16\,ر^2 + 192^2 = 0$$

ہے۔ اس لیے

$$2\,ر^4 - 15\,ر^2 + 18 = 0$$

∴ نیم محوروں کے طول $\sqrt{6}$ اور $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ ہیں۔

مثال ۲۔ مخروطی $لا^2 - 3\,لا\,ما + ما^2 + 10\,لا - 10\,ما + 50 = 0$ کے محوروں کے طول معلوم کرو۔

یہاں $اب - ھ^2 = -\frac{5}{4}$ اور $\Delta = -\frac{75}{2}$

اس لیے نیم محوروں کے مربعوں کے لیے مساوات

ر^{4} − ۸۴ ر^{2} − ۷۲۰ = ۰

ہے اور اس لیے ر^{2} = ۶۰ یا ر^{2} = − ۱۲

اس لیے مخروطی کی مساوات سادہ ترین شکل میں

$$\frac{\text{لا}^{2}}{60} - \frac{\text{ما}^{2}}{12} = 1$$

ہے۔

(۲۴۸)

نویں باب پر مثالیں

۱ — حسب ذیل منحنیوں کے مراکز معلوم کرو:

(۱) ۳ لا^{2} − ۵ لا ما + ۶ ما^{2} + ۱۱ لا − ۱۷ ما + ۱۳ = ۰

(۲) لا ما + ۳ ا لا − ۳ ا ما = ۰

(۳) ۳ لا^{2} − ۷ لا ما − ۶ ما^{2} + ۳ لا − ۹ ما + ۵ = ۰

نیز مرکزوں میں سے گذرنے والے محوروں کے حوالے سے ان منحنیوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۲ — حسب ذیل مساواتوں سے کون سے منحنی تعبیر ہوتے ہیں؟

(۱) لا ما − ۲ لا + ما − ۲ = ۰، (۲) ما^{2} − ۲ ا ما + ۴ ا لا = ۰

(۳) ما^{2} + ا لا + ا ما + ا^{2} = ۰، (۴) (لا + ما)^{2} = ا (لا − ما)

(۵) ۴ (لا + ۲ ما)^{2} + (ما − ۲ لا)^{2} = ۵ ا^{2}،

(۶) ما^{2} − لا^{2} − ۲ ا لا = ۰

۳ — حسب ذیل منحنیوں کو مرتسم کرو:

(۱) لا ما + ا لا − ۲ ا ما = ۰،

(۲) لا^{2} + ۲ لا ما + ما^{2} − ۲ لا − ۱ = ۰،

(۳) ۲ لا^{2} + ۵ لا ما + ۲ ما^{2} + ۳ ما − ۲ = ۰،

(۴) لا^{2} + ۴ لا ما + ما^{2} − ۱۱ = ۰،

(۵) (۲ لا + ۳ ما)^۲ + ۲ لا + ۲ ما + ۲ = ۰،

(۶) لا^۲ − ۴ لا ما − ۲ ما^۲ + ۱۰ لا + ۴ ما = ۰،

(۷) ۴۱ لا^۲ + ۲۴ لا ما + ۹ ما^۲ − ۱۳۰ ا لا − ۶۰ ا ما + ۱۱۶ ا^۲ = ۰

۴ ۔ اگر ایک مخروطی کے دو وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں تو ثابت کرو کہ اِن کا نقطۂ تقاطع نحنی کا مرکز ہونا چاہیئے ۔

۵ ۔ ثابت کرو کہ مخروطی

(لا − ۲ ما + ۱)^۲ + (۴ لا + ۲ ما − ۳)^۲ = ۱۰

کے نیم محوروں کا حاصل ضرب اکائی ہے ۔

۶ ۔ ثابت کرو کہ ناقص

لا^۲ − لا ما + ۲ ما^۲ − ۲ لا − ۶ ما + ۷ = ۰

کے نیم محوروں کا حاصل ضرب ۲/√۷ ہے اور اِس کے محوروں کی مساوات

لا^۲ − ما^۲ − ۲ لا ما + ۸ ما − ۸ = ۰

ہے ۔

(۲۳۹)

۷ ۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

۲ لا^۲ + لہ لا ما − ما^۲ − ۳ لا + ۶ ما − ۹ = ۰

خطوطِ مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرے گی ؟

۸ ۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس کے متقارب خطوط ۲ لا + ۳ ما − ۵ = ۰ اور ۵ لا + ۳ ما − ۸ = ۰ ہیں اور جو نقطہ (۱، −۱) میں سے گذرتا ہے ۔

۹ ۔ مخروطی ۳ لا^۲ − ۲ لا ما − ۵ ما^۲ + ۷ لا − ۹ ما = ۰

کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرو اور نیز اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس کے متقارب وہی ہیں اور جو نقطہ (۲، ۲) میں سے گذرتا ہے ۔

۱۰ ۔ زائد ۶ لا^۲ − ۷ لا ما − ۳ ما^۲ − ۲ لا − ۸ ما − ۶ = ۰

کے متقارب معلوم کرو اور نیز مزدوج زائد کی مساوات معلوم کرو ۔

۱۱ — اگر ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱ اور اَ لا^2 + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^2 = ۱ ایک ہی مخروطی کو تعبیر کریں اور محاور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ

(ا - ب)^2 + ۴ ھ^2 = (اَ - بَ)^2 + ۴ ھَ^{2}

۱۲ — ثابت کرو کہ محوروں کے تمام محلوں کے لیے بشرطیکہ وہ قائم رہیں اور مبدا نہ بدلے مساوات

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ میں گ^2 + ف^2 کی قیمت مستقل رہتی ہے۔

۱۳ — ایک دئے ہوئے خط کے کسی نقطہ سے دو دائروں میں سے ہر ایک کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وتر تماس کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک زائد ہے جس کے متقارب دئے ہوئے خط پر اور اُس خط پر عمود ہیں جو دائروں کے مرکزوں کو ملاتا ہے۔

۱۴ — ایک متغیر دائرہ ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور ایک مخروطی کو نقطوں ف، ق، ر، س پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

وف × وق × ور × وس
(دائرہ کا نصف قطر)^2

مستقل ہے۔

۱۵ — اگر ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱ اور **ا** لا^2 + ۲ **ھ** لا ما + **ب** ما^2 = ۱ دو مخروطیوں کی مساواتیں ہوں تو قائم محوروں کی کسی تبدیلی کی وجہ سے ا **ا** + ب **ب** + ۲ ھ **ھ** نہیں بدلیگا۔

۱۶ — ل کی مختلف قیمتوں کے لیے قائم زائدوں لا^2 - ما^2 + ۲ ل لا ما - ا^2 = ۰ کے (۲۴۰) راسوں کا طریق وہ منحنی ہے جس کی مساوات (لا^2 + ما^2)^2 = ا^2 (لا^2 - ما^2) = ۰ ہے۔

۱۷ — اگر ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ مبدا سے اِن کے نقطۂ تقاطع کے فاصلہ کا مربع

$$\frac{(ج ا - گ^۲ + ب ج - ف^۲)}{ا ب - ھ^۲}$$

ہے۔

۱۸۔ اگر ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ایک قائم زائد ہو تو ثابت کرو کہ اس کے متقاربوں کے حوالے سے اس کی مساوات ۲ (ھ^۲ - ا ب)$^{\frac{۳}{۲}}$ لا ما - Δ = ۰ ہوگی۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ مخروطی ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کے متقاربوں کی مساوات

ب لا^۲ - ۲ ھ لا ما + ا ما^۲ = ۰

ہے جہاں لا = ا لا + ھ ما + گ اور ما = ھ لا + ب ما + ف

۲۰۔ ثابت کرو کہ وہ منحنی جو مساواتوں

لا = ا ت^۲ + ب ت + ج اور ما = اَ ت^۲ + بَ ت + جَ

سے حاصل ہوتا ہے مکافی ہے جس کا وتر خاص

$$\frac{(اَ ب - ا بَ)^۲}{(ا^۲ + اَ^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

ہے۔

(۲۴۱)

دسواں باب

متفرق مسائل

۱۷۷ ۔ ہم (دفعہ ۱۶۷) میں ثابت کر چکے ہیں، کہ وہ منحنی جو درجۂ دوم کی مساوات سے تعبیر ہوتا ہے ہمیشہ ایک مخروطی ہوتا ہے ۔
ہم اِس پورے باب میں مخروطی کی مساوات کو

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

فرض کریں گے اِلّا آنکہ اِس کے خلاف بیان کیا گیا ہو ۔
اِس مساوات کے دائیں جانب جو جملہ ہے اِس کو بعض اوقات علامت فہ (لا ، ما) سے تعبیر کیا جائے گا ۔

۱۷۸ ۔ اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو ایک مخروطی کے دو نقطوں میں سے گذرے اور نیز کسی نقطہ پر مماس کی مساوات معلوم کرو ۔

فرض کرو کہ مخروطی پر دو نقطے (لاَ ، ماَ) اور (لاً ، ماً) ہیں ۔
مساوات

ا (لا ـ لاَ) (لا ـ لاً) + ھ {(لا ـ لاَ) (ما ـ ماً) + (لا ـ لاً) (ما ـ ماَ)}

+ ب (ما ـ ماَ) (ما ـ ماً) = ا لا لاَ + ۲ ھ لا ما + ب ماَ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج

(۱) . . . .

کو مختصر کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ وہ درجہ اول کی مساوات ہے، اور اس لیے وہ کسی خاص خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر ہم مساوات (۱) میں لا = لاَ اور ما = ماَ رکھیں تو دائیں جانبی رکن متماثلاً معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن کے معدوم ہونے کی وجہ یہ ہے کہ نقطہ (لاَ ، ماَ) منحنی پر ہے۔ اس لیے نقطہ (لاَ ، ماَ) خطِ مستقیم (۱) پر واقع ہے، اسی طرح نقطہ (لاً ، ماً) بھی اس خط پر واقع ہے۔

پس نقطوں (لاَ ، ماَ) اور (لاً ، ماً) میں سے گذرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات (۱) ہے اور یہ مساوات

ا لا (لاَ + لاً) + ھ ما (لاَ + لاً) + ھ لا (ماَ + ماً) + ب ما (ماَ + ماً)

+ ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ا لاَ لاً + ھ (لاَ ماً + لاً ماَ) + ب ماَ ماً ، . . . (۲)

میں تحویل ہوتی ہے۔

نقطہ (لاَ ، ماَ) پر مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات (۲) میں لاً = لاَ اور ماً = ماَ رکھتے ہیں چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

۲ ا لا لاَ + ۲ ھ (لا ماَ + لاَ ما) + ۲ ب ما ماَ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج

= ا لاَ^۲ + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^۲

اس مساوات کے طرفین میں ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج جمع کرو، تو چونکہ نقطہ (لاَ ، ماَ) منحنی پر ہے اس لیے بائیں جانبی رکن معدوم ہوگا اور مماس کی مساوات شکل

ا لا لاَ + ھ (ماَ لا + لاَ ما) + ب ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ)

+ ج = ۰ ، . . . . (۳)

میں حاصل ہوگی۔

یہ قابلِ توجہ ہے کہ نقطہ (لاَ ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات منحنی کی

مساوات سے اس طرح حاصل ہوجاتی ہے کہ لا^{2} کی بجائے لا لاَ ، ۲ لا ما کی بجائے ماَ لا + لاَ ما ، ما^{2} کی بجائے ما ماَ ، ۲ لا کی بجائے لا + لاَ ، اور ۲ ما کی بجائے ما + ماَ لکھا جائے۔

۱۷۹ — وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خطِ مستقیم ایک مخروطی کا مماس ہو سکے۔

فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات

ل لا + م ما + ن = ۰ ، . . . . . . (۱)

ہے۔

ان خطوطِ مستقیم کی مساوات جو مبدا کو ان نقطوں سے ملاتے ہیں جہاں خط (۱) منحنی فہ (لا ، ما) = ۰ کو قطع کرتا ہے مساوات (دفعہ ۳۸)

ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} − ۲ (گ لا + ف ما) $\frac{\text{ل لا + م ما}}{\text{ن}}$ + ج $\left(\frac{\text{ل لا + م ما}}{\text{ن}}\right)^{2}$

= ۰ ، . . . . . . (۲)

ہے۔

اب اگر خط (۱) مخروطی فہ (لا ، ما) = ۰ کا مماس ہے تو وہ مخروطی کو منطبق نقطوں پر قطع کرے گا اور اس لیے خطوط (۲) منطبق ہونے چاہئیں اس کے لیے شرط ہے

(ا ن^{2} − ۲ گ ل ن + ج ل^{2}) (ب ن^{2} − ۲ ف م ن + ج م^{2}) (۲۴۳)

= (ھ ن^{2} − ف ل ن − گ م ن + ج ل م)^{2}

یا ل^{2} (ب ج − ف^{2}) + م^{2} (ج ا − گ^{2}) + ن^{2} (ا ب − ھ^{2}) + ۲ م ن (گ ھ − ف ا)

+ ۲ ن ل (ھ ف − گ ب) + ۲ ل م (ف گ − ھ ج) = ۰ ، . . (۳)

اس مساوات (۳) کو شکل

اُ ل² + ب م² + ج ن² + ۲ ف م ن + ۲ گ ن ل + ۲ ھ ل م = ۰

(۴) ....

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں سر اُ، ب، ج وغیرہ مقطع

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} \qquad (\text{سہ})$$

میں اُ، ب، ن، وغیرہ، کے ہم جزو ضربی ہیں ۔

ثبوتِ دیگر ۔ نقطہ (لاَ، ماَ) پر کا مماس

لا (ا لاَ + ھ ماَ + گ) + ما (ھ لاَ + ب ماَ + ف) + گ لاَ + ف ماَ + ج = ۰

ہے ۔ یہ مماس دئے ہوئے خط پر منطبق ہوگا اگر

ا لاَ + ھ ماَ + گ ۔ لہ ل = ۰،

ھ لاَ + ب ماَ + ف ۔ لہ م = ۰،

گ لاَ + ف ماَ + ج ۔ لہ ن = ۰،

نیز چونکہ (لاَ، ماَ) دئے ہوئے خط پر ہے اس لیے

ل لاَ + م ماَ + ن = ۰

پس لاَ، ماَ، لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوگا

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} & \text{ل} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} & \text{م} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} & \text{ن} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

اس کو پھیلایا جائے تو

اُ ل² + ب م² + ج ن² + ۲ ف م ن + ۲ گ ن ل + ۲ ھ ل م = ۰

۱۸۰ ۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کی مساوات معلوم کرنا ۔

حسب دفعات ۷۶، ۱۰۰، یا ۱۱۹ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ قطبی کی مساوات اسی شکل کی ہوتی ہے جو مماس کی مساوات کی ہے۔

پس نقطہ (لاَ، ماَ) کے قطبی کی مساوات

ا لا لاَ + ھ (ماَ لا + لاَ ما) + ب ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ)
+ ج = ۰،

یا لا (ا لاَ + ھ ماَ + گ) + ما (ھ لاَ + ب ماَ + ف)
+ گ لاَ + ف ماَ + ج = ۰،

ہے۔

مبدا، کے قطبی کی مساوات کو اوپر کی مساوات میں لاَ = ماَ = ۰ رکھکر (۲۴۴) حاصل کیا جاتا ہے چنانچہ یہ مساوات

گ لا + ف ما + ج = ۰

ہے۔

۱۸۱ — اگر دو نقطے ف، ق ایسے ہوں کہ ایک مخروطی کے لحاظ سے ف کے قطبی پر ق واقع ہو تو اسی مخروطی کے لحاظ سے ق کے قطبی پر ف واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ ف کے محدد لاَ، ماَ اور ق کے محدد لاً، ماً ہیں۔
ف کے قطبی کی مساوات ہے

ا لا لاَ + ھ (ماَ لا + لاَ ما) + ب ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ)
+ ج = ۰

اب چونکہ نقطہ (لاً، ماً)، ف کے قطبی پر ہے اس لیے

ا لاَ لاً + ھ (ماَ لاً + لاَ ماً) + ب ماَ ماً + گ (لاَ + لاً) + ف (ماَ + ماً)
+ ج = ۰

اِس نتیجہ کے تشاکل سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ یہ وہ شرط بھی ہے کہ ق کا قطبی ف میں سے گذرے۔

اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ ر پر ملیں تو خط ف ق کا قطب ر ہو گا۔ چونکہ ر، ف کے قطبی پر ہے اِس لیے ر کا قطبی ف میں سے گذرے گا اور اسی طرح ر کا قطبی ق میں سے بھی گذریگا اِس لیے اِس کو خط ف ق ہونا چاہیئے۔

اگر مخروطی کا کوئی وتر ایک ثابت نقطہ ق میں سے کھینچا جائے اور اِس وتر کا قطب ف ہو تو چونکہ ق، ف کے قطبی پر ہے اِسلیے نقطہ ف ہمیشہ ایک ثابت خطِ مستقیم پر واقع ہوگا یعنے ق کے قطبی پر۔

تعریف۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو نقطوں کو اُس وقت مزدوج کہا جاتا ہے جبکہ ہر ایک دوسرے کے قطبی پر واقع ہو۔

تعریف۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو خطوطِ مستقیم کو اُسوقت مزدوج خطوط کہا جاتا ہے جبکہ ہر ایک دوسرے کے قطب میں سے گذرے۔

مزدوج قطر، حسب تعریف دفعہ ۱۲۷، مرکز میں سے گذرنے والے مزدوج خطوط ہوتے ہیں۔

ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ دو خطوطِ مستقیم

$$ل_1 لا + م_1 ما + ن_1 = ۰ ،$$

اور

$$ل_2 لا + م_2 ما + ن_2 = ۰ ،$$

مخروطی فہ (لا، ما) = ۰ کے لحاظ سے مزدوج ہوں، طریقہ حسب ذیل ہے۔

فرض کرو کہ $ل_1 لا + م_1 ما + ن_1 = ۰$ کا قطب $(لا_1 ، ما_1)$ ہے، پس $ل_1 لا + م_1 ما + ن_1 = ۰$ وہی ہے جو

$$لا(ا لا_1 + ھ ما_1 + گ) + ما(ھ لا_1 + ب ما_1 + ف) + گ لا_1 + ف ما_1 + ج = ۰ \quad (۲۴۵)$$

ہے اور اِس لیے

$$ا لا_1 + ھ ما_1 + گ - ک ل_1 = ۰ ،$$

$$ھ لا_1 + ب ما_1 + ف - ک م_1 = ۰ ،$$

اور گ لا۱ + ف ما۱ + ج ـ لہ ن۱ = ۰

اب اگر دئے ہوئے خطوط مزدوج ہیں تو (لا۱، ما۱)

ل۲ لا + م۲ ما + ن۲ = ۰

پر ہے، اِس لیے

ل۲ لا۱ + م۲ ما۱ + ن۲ = ۰

پس لا۱، ما۱، لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

ا	ھ	گ	ل۱
ھ	ب	ف	م۱
گ	ف	ج	ن۱
ل۲	م۲	ن۲	۰

= ۰

∴ ا ل۱ ل۲ + ب م۱ م۲ + ج ن۱ ن۲ + ف (م۱ ن۲ + م۲ ن۱)

+ گ (ن۱ ل۲ + ن۲ ل۱) + ھ (ل۱ م۲ + ل۲ م۱) = ۰

۱۸۲ — اگر مخروطی کا کوئی وتر ایک نقطہ و میں سے گذرتا ہوا کھینچا جائے تو وہ منحنی اور و کے قطبی سے موسیقی طور پر منقطع ہوگا۔

فرض کرو کہ و ف ق س کوئی وتر ہے جو منحنی کو ف، س پر اور و کے قطبی کو ق پر قطع کرتا ہے۔

و کو مبدا قرار دو اور خط و ف ق س کو محور لا۔ فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہے۔ جہاں ما = ۰ مخروطی کو قطع کرتا ہے

ا لا۲ + ۲ گ لا + ج = ۰

∴ ۱/و ف + ۱/و س = − ۲ گ/ج ، ۔۔۔۔۔۔ (۱)

و کے قطبی کی مساوات

$$\text{گ لا} + \text{ف ما} + \text{ج} = 0$$

ہے ۔ اس لیے

$$\frac{1}{\text{وق}} = -\frac{\text{گ}}{\text{ج}}, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

(۱) اور (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{1}{\text{وف}} + \frac{1}{\text{ور}} = \frac{2}{\text{وق}}$$

(۲۴۶) **۱۸۴ ۔ مخروطی کے متوازی وتروں کا ایک نظام کھینچا گیا ہے ۔ وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرنا ۔**

فرض کرو کہ مخروطی پر دو نقطے (لاَ ، ماَ) اور (لاً ، ماً) ہیں ۔ اِن نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات

$$\text{ا}(\text{لا}-\text{لاَ})(\text{لا}-\text{لاً}) + \text{ہ}\left\{(\text{لا}-\text{لاَ})(\text{ما}-\text{ماً}) + (\text{لا}-\text{لاً})(\text{ما}-\text{ماَ})\right\} + \text{ب}(\text{ما}-\text{ماَ})(\text{ما}-\text{ماً}) = \text{ا لا}^2 + 2\text{ہ لا ما} + \text{ب ما}^2 + 2\text{گ لا} + 2\text{ف ما} + \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے ۔

(۱) میں لا کا سر $\text{ا}(\text{لاَ}+\text{لاً}) + \text{ہ}(\text{ماَ}+\text{ماً}) + 2\text{گ}$ اور ما کا سر $\text{ہ}(\text{لاَ}+\text{لاً}) + \text{ب}(\text{ماَ}+\text{ماً}) + 2\text{ف}$ ہے ۔ پس اگر اوپر کا خط ، خط ما = م لا کے متوازی ہے تو

$$\text{م} = -\frac{\text{ا}(\text{لاَ}+\text{لاً}) + \text{ہ}(\text{ماَ}+\text{ماً}) + 2\text{گ}}{\text{ہ}(\text{لاَ}+\text{لاً}) + \text{ب}(\text{ماَ}+\text{ماً}) + 2\text{ف}}, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

اب اگر (لا ، ما) اس وتر کا وسطی نقطہ ہو جو نقطوں (لاَ ، ماَ) اور (لاً ، ماً) کو

ملاتا ہے تو ۲ لا = لاَ + لاً ، ۲ ما = ماَ + ماً اور اس لیے (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$ا لا + ھ ما + گ + م (ھ لا + ب ما + ف) = ۰$$

یا $$لا (ا + م ھ) + ما (ھ + م ب) + گ + م ف = ۰، \quad \ldots (۳)$$

جو مطلوبہ مساوات ہے ۔

اگر خط (۳) کو شکل ما = مَ لا + ک میں لکھا جائے تو

$$مَ = - \frac{ا + م ھ}{ھ + م ب}$$

یا $$ا + ھ (م + مَ) + ب م مَ = ۰، \quad \ldots\ldots (۴)$$

یہ وہ شرط ہے کہ خطوط ما = م لا اور ما = مَ لا ، مخروطی

$$ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوں ۔ (سـ)

۱۸۴ ــ وہ شرط معلوم کرنا کہ خطوط $ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰$، مخروطی $ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۱$ کے مزدوج قطر ہو سکیں ۔

اگر خطوط $ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰$ وہی ہیں جو ما ـ م لا = ۰ اور ما ـ مَ لا = ۰ سے حاصل ہوتے ہیں تو

$$م + مَ = - ۲ \frac{ھ}{ب} \quad \text{اور} \quad م مَ = \frac{ا}{ب}$$

لیکن ما ـ م لا = ۰ اور ما ـ مَ لا = ۰ مزدوج قطر ہیں اگر (۲۴۷)

$$ا + ھ (م + مَ) + ب م مَ = ۰$$

اس لیے مطلوبہ شرط

$$ا - ۲ ھ \frac{ھ}{ب} + ب \frac{ا}{ب} = ۰$$

یا $$ا ب + ب ا = ۲ ھ ھ \quad (سـ)$$

[نتیجہ بالا کو دفعات ۵۶ اور ۵۸ سے فوراً ماخوذ کیا جا سکتا ہے]

مثال ۱ ۔ مخروطی ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱ کے مساوی مزدوج قطروں کی مساوات معلوم کرنا ۔

ان خطوط مستقیم سے جو مخروطی کے مرکز اور مخروطی اور ہم مرکز دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گذرتے ہیں مساوی قطر حاصل ہوتے ہیں۔ مخروطی اور دائرہ ل (لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم س) = ۱ کے نقاط تقاطع میں سے خطوط

(ا - ل) لا^2 + ۲ (ھ - ل جم س) لا ما + (ب - ل) ما^2 = ۰

گذرتے ہیں۔ یہ خطوط مزدوج ہوں گے اگر

ب (ا - ل) + ا (ب - ل) = ۲ ھ (ھ - ل جم س)

اس سے ل کی جو قیمتیں حاصل ہوں ان کو درج کرنے سے مطلوبہ مساوات

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 - $\frac{\text{۲ (ا ب - ھ}^2\text{)}}{\text{ا + ب - ۲ ھ جم س}}$ (لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم س) = ۰

حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۲ ۔ ثابت کرو کہ کسی دو ہم مرکز مخروطیوں میں بالعموم مشترک مزدوج قطروں کا ایک اور صرف ایک زوج ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطیوں کی مساواتیں

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱ اور اَ لا^2 + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^2 = ۱

ہیں۔

قطر { ا لا^2 + ۲ ﮦ لا ما + ب ما^2 = ۰ . دونوں مخروطیوں کے لحاظ سے مزدوج ہوں گے اگر

ا ب - ۲ ﮦ ھ + ب ب = ۰

اور ا بَ - ۲ ﮦ ھَ + ب بَ = ۰

∴ ب / (ب ﻫَ − بَ ﻫ) = ۲ﻫ − / (ا بَ − اَ ب) = − ا / (ﻫ اَ − ا ﻫَ)

اس لیے مشترک مزدوج قطروں کی مساوات

(ﻫ اَ − ا ﻫَ) لا^۲ + (ب ﻫَ − بَ ﻫ) ما^۲ − (ا بَ − اَ ب) لا ما = ۰

ہے۔

چونکہ کسی دو ہم مرکز مخروطیوں میں مزدوج قطروں کا ایک زوج مشترک ہوتا ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی دو ہم مرکز مخروطیوں کی مساواتیں شکلوں

ا لا^۲ + ب ما^۲ = ۱ ، اَ لا^۲ + بَ ما^۲ = ۱

میں تحویل کیجا سکتی ہیں۔

۱۸۵ ۔ اُس خطِ مستقیم کا طول معلوم کرنا جو ایک دئے ہوئے نقطہ سے دی ہوئی سمت میں کھینچنے پر مخروطی سے ملے۔ (۲۴۸)

فرض کرو کہ (لاَ ، ماَ) دیا ہوا نقطہ ہے اور اس میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ وہ نقطہ جو اس خط پر نقطہ (لاَ ، ماَ) سے فاصلہ ر پر ہے (لاَ + ر جم طہ ، ماَ + ر جیب طہ) ہے، محاور علی القوائم فرض کئے گئے ہیں۔ اگر یہ نقطہ مخروطی فہ (لا ، ما) = ۰ پر ہو تو

ا (لاَ + ر جم طہ)^۲ + ۲ﻫ (لاَ + ر جم طہ) (ماَ + ر جیب طہ) + ب (ماَ + ر جیب طہ)^۲

+ ۲گ (لاَ + ر جم طہ) + ۲ف (ماَ + ر جیب طہ) + ج = ۰

یا ر^۲ (ا جم^۲ طہ + ۲ﻫ جیب طہ جم طہ + ب جیب^۲ طہ) + ۲ ر جم طہ (ا لاَ + ﻫ ماَ + گ)

+ ۲ ر جیب طہ (ﻫ لاَ + ب ماَ + ف) + فہ (لاَ ، ماَ) = ۰

اس دو درجی مساوات کی اصلیں ر کی مطلوبہ دو قیمتیں ہیں۔

اب اگر نقطہ (لاَ ، ماَ) اس وتر کا نقطہ وسطی ہو جو مخروطی، خط پر قطع کرتا ہے تو ر کی

وہ قیمتیں جو اوپر کی مساوات سے حاصل ہوں گی مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونگی۔ اس لیے ر کا سر معدوم ہونا چاہیئے چنانچہ

(ا لاَ + ھ ماَ + گ) جم طہ + (ھ لاَ + ب ماَ + ف) جب طہ = ۰

پس اگر وتروں کو ہمیشہ ایک مستقل سمت میں کھینچا جائے یعنی طہ مستقل ہو تو اِن کے وسطی نقطوں کا طریق [دفعہ ۱۸۳]

ا لا + ھ ما + گ + (ھ لا + ب ما + ف) مس طہ = ۰

ہے۔

۱۸۶ — وہ مستطیل جو اُس وتر کے مقطوعوں سے بنتا ہے جو نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرتا ہے اور محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے ر کی اُن دو قیمتوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے جو دفعہ ۱۸۵ کی دو درجی مساوات سے حاصل ہوتی ہیں چنانچہ وہ (مستطیل)

$$\frac{\text{فہ (لاَ ، ماَ)}}{\text{ا جم}^2\text{ طہ + ۲ ھ جب طہ جم طہ + ب جب}^2\text{ طہ}}$$

کے مساوی ہوتا ہے۔

نتیجۂ صریح ۱ — اگر اُسی نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے دوسرا وتر کھینچا جائے اور یہ وتر محور لا کے ساتھ زاویہ طہَ بنائے تو اِس وتر کے مقطوعوں کا مستطیل

$$\frac{\text{فہ (لاَ ، ماَ)}}{\text{ا جم}^2\text{ طہَ + ۲ ھ جب طہَ جم طہَ + ب جب}^2\text{ طہَ}}$$

ہوگا۔

(۲۴۹) پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہوے کسی مخروطی کے دو وتر دی ہوئی سمتوں میں کھینچے جائیں تو وتروں کے مقطوعوں کے مستطیلوں کی نسبت تمام نقطوں کے لیے (بشمول مخروطی کے مرکز کے) مستقل ہوتی ہے چنانچہ یہ نسبت مخروطی کے متوازی قطروں کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

نتیجۂ صریح ۲ — اُن دو مماسوں کی نسبت جو کسی نقطہ سے مخروطی پر

کھینچے جائیں مخروطی کے متوازی قطروں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے ۔

نتیجہ صریح ۳ ۔ اگر نقطہ (لاً، ماً) میں سے ایک وتر کھینچا جائے جو محور لا کے ساتھ وہی زاویہ طہ بنائے تو اس وتر کے مقطوعوں کا مستطیل

$$\frac{\text{فہ}\ (\text{لاً}،\ \text{ماً})}{\text{ا جم}^2\ \text{طہ} + ۲\ \text{ھ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^2\ \text{طہ}}$$

ہوگا ۔

پس کسی دو متوازی وتروں کے مقطوعوں کے مستطیلوں کی نسبت جبکہ وتر دو ثابت نقطوں (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) میں سے کھینچے جائیں مستقل ہوتی ہے چنانچہ یہ نسبت $\frac{\text{فہ}\ (\text{لاَ}،\ \text{ماَ})}{\text{فہ}\ (\text{لاً}،\ \text{ماً})}$ کے مساوی ہوتی ہے ۔

نتیجہ صریح ۴ ۔ اگر ایک مخروطی کو ایک دائرہ چار نقطوں ف، ق، ر، س پر قطع کرے تو خط ف ق جو اِن نقطوں میں سے کسی دو کو ملائے اور خط ر س جو دیگر دو نقطوں کو ملائے مخروطی کے محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں ۔

کیونکہ اگر ف ق اور ر س، ت پر ملیں تو مستطیل ت ف × ت ق اور ت ر × ت س مساوی ہیں جس کی وجہ یہ ہے کہ چاروں نقطے مخروطی پر ہیں ۔ اِس لیے نتیجہ صریح ۱ کی رُو سے مخروطی کے متوازی قطر مساوی ہیں اور اِس لیے وہ مخروطی کے ایک محور کے ساتھ مساوی طور پر مائل ہونے چاہئیں [دیکھو دفعہ ۱۳۶] ۔

مثال ۱ ۔ اگر ایک مثلث ایک مخروطی کو محیط کرے تو وہ تین خطوط جو مثلث کے راسوں کو مقابل کے اضلاع کے نقاطِ تماس کے ساتھ ملاتے ہیں ایک نقطہ پر ملیں گے ۔

فرض کرو کہ مثلث کے راس ا، ب، ج ہیں اور مقابل کے اضلاع کے نقاطِ تماس اَ، بَ، جَ ۔ نیز فرض کرو کہ مثلث کے ضلعوں کے متوازی مخروطی کے نیم قطروں کے طول $ر_۱$، $ر_۲$، $ر_۳$ ہیں ۔ تب

ب اَ : ب جَ = رِ۲ : رِ۲ ، ج بَ : ج اَ = رِ۲ : رِ۲ ،

ا جَ۲ : ا بَ۲ = رِ۲ : رِ۲

∴ ب ا × ج ب × ا ج = ± اَجَ × بَ اَ × جَ ب

جس سے ظاہر ہے کہ تینوں خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں کیونکہ اَ ، بَ ، جَ ، ایک خط مستقیم پر نہیں ہو سکتے ۔

(۲۵۰) مثال ۲ ۔ اگر ایک مخروطی ایک مثلث کے اضلاع کو علی الترتیب نقطوں اَ اور اً ، بَ اور بً ، جَ اور جً پر قطع کرے تو

ب اَ × ب اً × ج بَ × ج بً × ا جَ × ا جً

= ب جَ × ب جً × ج اَ × ج اً × ا بَ × ا بً

(کارنو کا مسئلہ)

[ب اَ × ب اً : ب جَ × ب جً = رِ۲ : رِ۲ اور علیٰ ہذا دوسروں کیلئے

ر ، ر ، ر مخروطی کے وہ نیم قطر ہیں جو مثلث کے اضلاع کے متوازی ہیں]

مثال ۳ ۔ اگر ایک مخروطی ایک کثیر ضلعی ا ب ج د ۔ ۔ ۔ کے تمام ضلعوں کو مس کرے اور اضلاع ا ب ، ب ج ، ۔ ۔ ۔ ۔ کے نقاط تماس ف ، ق ، ر ، س ، ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ہوں تو

ا ف × ب ق × ج ر × د س ۔ ۔ ۔ = ف ب × ق ج × ر د ۔ ۔ ۔ ۔ ۔

۱۸۷ ۔ اگر مساوات

ا لا۲ + ۲ ﮪ لا ما + ب ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

کے دائیں جانب رکن کو اختصاراً س لکھا جائے اور

اَ لا۲ + ۲ ﮪَ لا ما + بَ ما۲ + ۲ گَ لا + ۲ فَ ما + جَ = ۰

کے دائیں جانب رکن کو س َ کو لکھا جائے تو س ۔ لہ س َ = ۰ ایک ایسے مخروطی کی مساوات ہوگی جو مخروطیوں س = ۰ اور س َ = ۰ کے مشترک نقطوں میں سے گذرے گا۔

کیونکہ مساوات س ۔ لہ س َ = ۰ دوسرے درجہ کی ہے اور اسلیے ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے۔ نیز اگر کوئی نقطہ دئے ہوئے دونوں مخروطیوں پر ہو تو اس کے محددد دونوں مساواتوں س = ۰ اور س َ = ۰ کو پورا کریں گے اور اس لیے وہ مساوات س ۔ لہ س َ = ۰ کو بھی پورا کرینگے۔

لہ کو کوئی مناسب قیمت دیکر مخروطی س ۔ لہ س َ = ۰ سے کوئی اَور شرط پوری کرائی جا سکتی ہے۔

پس س ۔ لہ س َ = ۰ ایک ایسے مخروطی کی عام مساوات ہے جو دو دئے ہوئے مخروطیوں س = ۰ اور س َ = ۰ کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

اگر مخروطی س َ = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے جنکی مساواتیں ل لا + م ما + ن = ۰ اور ل َ لا + م َ ما + ن َ = ۰ ہیں جن کو ہم اختصاراً ع = ۰ اور و = ۰ لکھیں گے تو س ۔ لہ ع و = ۰ ایک ایسے مخروطی کی عام مساوات ہوگی جو اُن نقطوں میں سے گذریگا جہاں خطوط ع = ۰ اور و = ۰ مخروطی س = ۰ کو قطع کرتے ہیں۔

اب اگر خط و = ۰، خط ع = ۰ کی جانب حرکت کرکے بالآخر اس پر منطبق ہو جائے تو مساوات س ۔ لہ ع^2 = ۰، لہ کی تمام قیمتوں کے لیے، ایک ایسے مخروطی کو تعبیر کرے گی جو مخروطی س = ۰ کو منطبق نقطوں کے دو زوجوں پر قطع کرے گا یعنے وہاں جہاں س = ۰ سے خط ع = ۰ ملتا ہے۔ اس کا

یہ مطلب ہے کہ س - ل ع² = ۰ ایک مخروطی ہے جو س = ۰ کو اُن دو نقطوں پر مس کرتا ہے جہاں س = ۰، خط ع = ۰ سے منقطع ہوتا ہے

مثال ۱ - دو قائم زائد کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے تمام مخروطی قائم زائد ہوتے ہیں۔

اگر قائم زائد کی مساواتیں س = ۰ اور سَ = ۰ ہوں تو وہ تمام مخروطی جو ان کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتے ہیں مساوات س - لسَ = ۰ میں شامل ہیں۔ اب س - لسَ = ۰ میں لا² اور ما² کے سروں کا مجموعہ صفر ہوگا کیونکہ س = ۰ اور سَ = ۰ میں یہ مجموعہ صفر ہے، محاور قائم فرض کئے گئے ہیں۔ اِس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اِس کی حسب ذیل مخصوص صورتیں ہیں:

(۱) اگر دو قائم زائد چار نقطوں پر متقاطع ہوں تو ان میں سے کسی دو نقطوں کو ملانیوالا خطِ مستقیم دوسرے دو نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم پر عمود ہوگا۔ (کیونکہ خطوط کا زوج نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہوا مخروطی ہے)۔

(۲) اگر ایک قائم زائد ایک مثلث کے راسوں میں سے گذرے تو وہ مرکز عمودی میں سے بھی گذرے گا۔ (کیونکہ اگر مثلث کے راس ا، ب، ج ہوں اور راس ا سے ب ج پر کھینچا ہوا عمود مخروطی کو د پر قطع کرے تو خطوط اد، ب ج کا زوج ایک قائم زائد ہے کیونکہ یہ خطوط علی القوائم ہیں۔ اِس لیے زوج ب د، ا ج بھی ایک قائم زائد ہے یعنے یہ خطوط علی القوائم ہیں۔)

مثال ۲ - اگر دو مخروطیوں کے محاور متوازی ہوں تو اِن کے نقاطِ تقاطع میں سے ایک دائرہ گذرے گا

محددوں کے محوروں کو مخروطیوں کے محوروں کے متوازی لو تو اِن کی مساواتیں ہوں گی

ا لا² + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰،

اور　　اَ لاَ² + بَ ماَ² + ۲گَ لا + ۲فَ ما + جَ = ۰ ۔

ان کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والا مخروطی

ا لا² + ب ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج + لہ (اَ لا² + بَ ما² + ۲گَ لا

+ ۲فَ ما + جَ) = ۰

ہوگا۔ لیکن یہ ایک دائرہ ہوگا اگر ہم لہ کو ایسا منتخب کریں کہ ا + لہ اَ = ب + لہ بَ اور یہ صریحاً ہمیشہ ممکن ہے۔

مثال ۳ ۔ اگر ایک ناقص کے مماس ت ف، ت ق اور تَ فَ، تَ قَ ہوں تو ایک مخروطی اِن چھ نقطوں ت ف، ق، تَ، فَ، قَ میں سے گذرے گا۔

فرض کرو کہ مخروطی ا لا² + ب ما² = ۱ ہے اور نقطہ ت کے محدد (لاَ، ماَ) اور تَ کے (لاً، ماً) ہیں۔ ف ق اور فَ قَ کی مساواتیں ا لا لاَ + ب ما ماَ - ۱ = ۰ اور ا لا لاً + ب ما ماً - ۱ = ۰ ہونگی۔ مخروطی

لہ (ا لا² + ب ما² - ۱) - (ا لا لاَ + ب ما ماَ - ۱) (ا لا لاً + ب ما ماً - ۱) = ۰

ہمیشہ چار نقطوں ف، ق، فَ، قَ میں سے گذرے گا۔ وہ ت میں سے بھی گذرے گا اگر لہ ایسا ہو کہ

لہ (ا لاَ² + ب ماَ² - ۱) - (ا لاَ² + ب ماَ² - ۱) (ا لاَ لاً + ب ماَ ماً - ۱) = ۰

یعنے اگر　　لہ = ا لاَ لاً + ب ماَ ماً - ۱

اِس نتیجہ کے تشاکل سے ظاہر ہے کہ مخروطی، تَ میں سے بھی گذرے گا۔

مثال ۴ ۔ اگر ایک مخروطی کے دو وتر ایک قطر کے دو نقطوں میں سے جو مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہیں کھینچے جائیں تو ان وتروں کے سروں میں سے گذرنے والا کوئی مخروطی قطر سے ایسے نقطوں پر منقطع ہوگا جو مرکز سے متساوی الفصل ہوں گے۔

قطر اور اس کے مزدوج کو محاور قرار دو تو مخروطی کی مساوات ا لا^{2} + ب ما^{2} = ۱ ہوگی ۔ فرض کرو کہ وتروں کی مساواتیں ما ۔ م (لا ۔ ج) = ۰ اور ما ۔ مَ (لا + ج) = ۰ ہیں ۔ اب ان کے سروں میں سے گذرنے والے کسی مخروطی کی مساوات

ا لا^{2} + ب ما^{2} ۔ ۱ ۔ لہ {ما ۔ م (لا ۔ ج)}{ما ۔ مَ (لا + ج)} = ۰

سے حاصل ہوگی ۔

محور لا اس مخروطی کو ان نقطوں پر قطع کرتا ہے جو ا لا^{2} ۔ ۱ ۔ لہ م مَ (لا^{2} ۔ ج^{2}) = ۰ سے حاصل ہوتے ہیں اور لا کی یہ دو قیمتیں صریحاً مساوی اور مختلف العلامت ہیں خواہ لہ، م، اور مَ کچھ ہی ہوں ۔

مخصوص صورت میں اگر ف س ق اور فَ سَ قَ، ایک مخروطی کے دو ماسکی وتر ہوں تو خطوط ف فَ اور ق قَ، محور کو مرکز سے متساوی الفصل نقطوں پر قطع کرتے ہیں ۔

مثال ۵ ۔ اگر ایک دائرہ اور ایک مخروطی میں دوہرا تماس ہو تو وتر تماس محوروں میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہوتا ہے ۔

کیونکہ اگر ا لا^{2} + ب ما^{2} ۔ ۱ + لہ (ل لا + م ما + ن)^{2} = ۰ ایک دائرہ ہو تو لا ما کا سر صفر ہے اور اس لیے ل یا م صفر ہے ۔

مثال ۶ ۔ اگر دو دائرے ایک مخروطی کے ساتھ دوہرا تماس رکھیں اور وتر تماس متوازی ہوں تو دائروں کا بنیادی محور تماس کے ان وتروں کے درمیان وسط میں ہوگا ۔

دائروں

ا لا^{2} + ب ما^{2} ۔ ۱ + (ب ۔ ا) (لا ۔ د$_{1}$)^{2} = ۰،

ا لا^{2} + ب ما^{2} ۔ ۱ + (ب ۔ ا) (لا ۔ د$_{2}$)^{2} = ۰،

کا بنیادی محور ۲ لا ۔ د$_{1}$ ۔ د$_{2}$ = ۰

ہے ۔

(۲۵۳) **مثال ۷ ۔** اگر دو دائرے ایک مخروطی کے ساتھ دوہرا تماس رکھیں اور دو وتر تماس ایک دوسرے پر عمود ہوں تو ان کا نقطۂ تقاطع اُس ہم محور نظام کے ایک انتہائی نقطہ پر ہوتا ہے جو دائروں سے متعین ہوتا ہے ۔

دائروں کی مساواتیں جبکہ مخروطی کی مساوات $ا لا^۲ + ب ما^۲ - ۱ = ۰$ ہو

$$ا لا^۲ + ب ما^۲ - ۱ + (ب - ا) (لا - د)^۲ = ۰،$$

اور

$$ا لا^۲ + ب ما^۲ - ۱ + (ب - ا) (ما - ع)^۲ = ۰،$$

ہیں ۔ پس تفریق کرنے پر نقطہ دائرہ

$$(لا - د)^۲ + (ما - ع)^۲ = ۰$$

دئے ہوئے دائروں کے ساتھ ہم محور ہے ۔

۱۸۸ ۔ مماسوں کے اُس زوج کی مساوات معلوم کرنا جو کسی نقطہ سے مخروطی پر کھینچے گئے ہوں ۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰، \quad ... (۱)$$

ہے ۔

اگر $(لا'، ما')$ وہ نقطہ ہو جس سے مماس کھینچے گئے ہیں تو وتر تماس کی مساوات

$$ا لا لا' + ھ (لا ما' + لا' ما) + ب ما ما' + گ (لا + لا') + ف (ما + ما') + ج = ۰$$

ہوگی ۔

مساوات

$$ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج$$

$$= ل \{ا لا لا' + ھ (لا ما' + لا' ما) + ب ما ما' + گ (لا + لا') + ف (ما + ما') + ج\}^۲ \quad ....(۲)$$

ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جو ابتدائی مخروطی کو ان دو نقطوں پر مس کرتا ہے،

جہاں وہ وتر تماس سے منقطع ہوتا ہے۔ یہ دو مماس ایک مخروطی ہیں جو ان نقطوں پر مس کرتا ہے اور جو خود نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے بھی گذرتا ہے۔ اس لیے مساوات (۲) مطلوبہ مساوات ہو گی اگر لہ کو ایسا منتخب کیا جائے کہ (لاَ، ماَ)، (۲) پر ہو یعنے اگر

$$و لاَ^2 + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^2 + ۲گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج$$

$$= لہ \{ و لاَ^2 + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^2 + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج \}^2$$

اِس لیے

$$۱ = لہ \{ و لاَ^2 + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^2 + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج \} = لہ فہ (لاَ، ماَ)$$

لہ کی اس قیمت کو (۲) میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(و لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲گ لا + ۲ ف ما + ج) فہ (لاَ، ماَ)$$

$$= \{ و لا لاَ + ھ (لا ماَ + لاَ ما) + ب ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج \}^2$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔ (۳)

(۲۵۴) مساوات بالا کو حسب ذیل طریقہ پر بھی معلوم کیا جا سکتا ہے: فرض کرو کہ نقطہ (لاَ، ماَ) سے دو مماس ت ق، ت قَ ہیں، فرض کرو کہ ت ق پر کوئی نقطہ ف (لا، ما) ہے اور وتر تماس ق قَ پر ت اور ف سے عمود ت ن اور ف م ہیں۔ تب

$$\frac{ف ق^2}{ت ق^2} = \frac{ف م^2}{ت ن^2}، \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

لیکن

$$\frac{ف ق^2}{ت قَ^2} = \frac{فہ (لا، ما)}{فہ (لاَ، ماَ)} \quad \text{(دفعہ ۱۸۶ نتیجہ صریح ۳)}$$

اور

$$\frac{ف م^2}{ت ن^2} = \frac{\{ و لا لاَ + ھ (لا ماَ + لاَ ما) + ب ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج \}^2}{\{ و لاَ^2 + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^2 + ۲گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج \}^2}$$

اِس لیے (۱) سے حاصل ہوتا ہے

فہ (لا، ما) فہ (لاَ، ماَ)

= {ا لالاَ + ھ (لا ماَ + لاَ ما) + ب ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج }^{۲}

۱۸۹ ۔ مخروطی کے اُن مماسوں کی مساوات معلوم کرنا جو ایک دئے ہوئے وتر کے سِروں پر کھینچے گئے ہوں ۔

فرض کرو کہ دئے ہوئے وتر کی مساوات ل لا + م ما + ن = ۰ ہے ۔ کوئی مخروطی جو فہ (لا، ما) = ۰ کو اس وتر کے سِروں پر مس کرتا ہے مساوات

فہ (لا، ما) ۔ لہ (ل لا + م ما + ن)^{۲} = ۰، . . . (۱)

سے حاصل ہوتا ہے ۔

مساوات (۱) مطلوبہ مساوات ہوگی اگر لہ کو ایسا منتخب کیا جائے کہ مساوات (۱) دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے جس کے لیے شرط

ا ۔ لہ ل^{۲}	ھ ۔ لہ ل م	گ ۔ لہ ل ن
ھ ۔ لہ ل م	ب ۔ لہ م^{۲}	ف ۔ لہ م ن
گ ۔ لہ ل ن	ف ۔ لہ م ن	ج ۔ لہ ن^{۲}

= ۰

ہے ۔ اِس کو پھیلانے سے

△ ۔ لہ (ا ل^{۲} + ب م^{۲} + ج ن^{۲} + ۲ ف م ن + ۲ گ ن ل + ۲ ھ ل م) = ۰

پس مطلوبہ مساوات

فہ ع ۔ △ (ل لا + م ما + ن)^{۲} = ۰

ہے جہاں △، فہ کا ممیز ہے اور ع = ۰ وہ شرط ہے کہ ل لا + م ما + ن = ۰، فہ = ۰ کو مس کرے ۔ [دفعہ ۱۷۹] ۔

(۲۵۵) **۱۹۰۔ مخروطی کے مرتب دائرہ کی مساوات معلوم کرنا۔**

اُن مماسوں کی مساوات جو (لاَ، ماَ) سے مخروطی فہ (لا، ما) = ۰ کے کھینچے گئے ہوں

{ا لاَ^۲ + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^۲ + ۲گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج } فہ (لا، ما)

= { ا لا لاَ + ھ (لا ماَ + لاَ ما) + ب ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج }^۲

ہے۔ یہ دو مماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں گے اگر مساوات بالا میں لا^۲ اور ما^۲ کے سروں کا مجموعہ صفر ہو۔ اِس کے لیے ضرورت ہے کہ

(ا + ب) (ا لاَ^۲ + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^۲ + ۲گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج)

= (ا لاَ + ھ ماَ + گ)^۲ + (ھ لاَ + ب ماَ + ف)^۲

اِس لیے نقطہ (لاَ، ماَ) اُس دائرہ پر ہے جس کی مساوات

(ا ب ۔ ھ^۲) (لا^۲ + ما^۲) + ۲ لا (گ ب ۔ ف ھ) + ۲ ما (ف ا ۔ ھ گ) + ج (ا + ب)

۔ ف^۲ ۔ گ^۲ = ۰

یا ج لا^۲ + ج ما^۲ ۔ ۲ گ لا ۔ ۲ ف ما + ا + ب = ۰، ......(۱)

ہے جہاں ا، ب، ج، ف، گ، ھ کے وہی معنی ہیں جو دفعہ ۱۷۹ میں بیان کئے جا چکے ہیں۔

اگر ھ^۲ ۔ ا ب = ۰ تو اوپر کی مساوات

۲ لا (ب گ ۔ ف ھ) + ۲ ما (ف ا ۔ ھ گ) + ج (ا + ب) ۔ ف^۲ ۔ گ^۲ = ۰،

یا ۲ گ لا + ۲ ف ما ۔ ا ۔ ب = ۰، ...... (۲)

میں تحویل ہوتی ہے۔

اِس صورت میں مخروطی ایک مکافی ہے اور (۲) مرتب کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ منحنی

۱۱ لا^۲ + ۲۴ لا ما + ۴ ما^۲ ۔ ۲ لا + ۱۶ ما + ۱۱ = ۰

کے مرتب دائرہ کی مساوات

لا۲ + ما۲ + ۲لا ۔ ۲ ما = ۱

ہے۔

مثال ۲ ۔ ثابت کرو کہ مکافی

لا۲ + ۲ لا ما + ما۲ ۔ ۴ لا + ۸ ما ۔ ۶ = ۰

کے مرتب کی مساوات ۳ لا ۔ ۳ ما + ۸ = ۰ ہے۔

۱۹۱ ۔ ثابت کرو کہ ایک مرکزدار مخروطی میں چار اور صرف چار ماسکے ہوتے ہیں جن میں سے دو حقیقی ہوتے ہیں اور دو خیالی۔ (۲۵۶)

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

ا لا۲ + ب ما۲ ۔ ۱ = ۰ .... (۱)

ہے۔

فرض کرو کہ ایک ماسکہ (لاَ، ماَ) ہے اور نظیری مرتب کی مساوات لا جم عہ + ما جب عہ ۔ ع = ۰ ہے۔ اگر مخروطی کا خروج المرکز ز ہو تو مخروطی کی مساوات ہوگی

(لا ۔ لاَ)۲ + (ما ۔ ماَ)۲ ۔ ز۲ (لا جم عہ + ما جب عہ ۔ ع)۲ = ۰ ..(۲)

چونکہ (۱) اور (۲) ایک ہی منحنی کو تعبیر کرتے ہیں اور (۱) میں لا ما کا سر صفر ہے اس لیے (۲) میں لا ما کا سر صفر ہونا چاہیئے، پس عہ صفر ہے یا $\frac{\pi}{2}$۔

اس لیے ایک مرتب، محوروں میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہے۔ فرض کرو کہ عہ = ۰۔ تو چونکہ (۱) میں لا اور ما کے سر صفر ہیں اس لیے ماَ = ۰ اور لاَ = ز۲ ع ۔ نیز (۱) اور (۲) میں دوسرے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\frac{ا}{۱ - ز^۲} = \frac{ب}{۱} = \frac{-۱}{لاَ^۲ - ز^۲ ع^۲}$$

$$\therefore \quad \text{ز} = \sqrt{\text{ا} - \frac{\text{ا}}{\text{ب}}} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$\text{ا ع لاَ} = \text{ا} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

اور

$$\text{لاَ}^{۲} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

(۵) سے ہم دیکھتے ہیں کہ محور لا پر دو ماسکے ہیں جن کے فاصلے مرکز سے $\pm \sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ا}}{\text{ب}}}$ ہیں۔ (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک مرتب نظیری ماسکہ کا قطبی ہے۔

اگر ع = $\frac{\pi}{۲}$ تو اُسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ محور ما پر دو ماسکے ہیں جن کے فاصلے مرکز سے $\pm \sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ب}} - \frac{\text{ا}}{\text{ا}}}$ ہیں۔ ماسکوں کے اِن دو زوجوں میں سے ایک صریحاً حقیقی ہے اور دوسرا خیالی خواہ ا اور ب کی قیمتیں (حقیقی) کچھ ہی ہوں۔

(۲۵۷) محور لا پر کے ایک ماسکہ کے حوالے سے مخروطی کا خروج المرکز حسب مساوات (۳)، $\sqrt{\text{ا} - \frac{\text{ا}}{\text{ب}}}$ کے مساوی ہے، اسی طرح محور ما پر کے ایک ماسکہ کے حوالے سے خروج المرکز $\sqrt{\text{ا} - \frac{\text{ب}}{\text{ا}}}$ ہوگا۔ اگر منحنی ناقص ہے تو ا اور ب کی علامت ایک ہی ہوگی اور اِن میں سے ایک خروج المرکز حقیقی اور دوسرا خیالی ہوگا۔ لیکن اگر منحنی ایک زائد ہو تو ا اور ب کی علامتیں مختلف ہونگی اور دونوں خروج المرکز حقیقی ہونگے۔

کسی مخروطی میں اگر $\text{ز}_{۱}$ اور $\text{ز}_{۲}$ خروج المرکز ہوں تو

$$\frac{۱}{ز_۱^۲} + \frac{۱}{ز_۲^۲} = \frac{ا}{ا-ب} + \frac{ب}{ب-ا} = ۱$$

۱۹۲ — درجہ دوم کی عام مساوات سے تعبیر شدہ مخروطی کا خروج المرکز معلوم کرنا۔

محوروں کو بدلنے سے ہم مخروطی کی مساوات کو شکل

$$عہ\, لا^۲ + بہ\, ما^۲ + جہ = ۰، \quad \ldots\ldots (۱)$$

میں تحویل کر سکتے ہیں۔

اگر مخروطی کا ایک خروج المرکز ز ہو تو

$$عہ = بہ\,(۱ - ز^۲)، \quad \ldots\ldots (۲)$$

لیکن (دفعہ ۵۲) ہم جانتے ہیں کہ

$$عہ + بہ = ا + ب، \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور
$$عہ\, بہ = اب - ھ^۲، \quad \ldots\ldots (۴)$$

مساواتوں (۲)، (۳) اور (۴) سے عہ اور بہ کو ساقط کرنے پر

$$\frac{(۲ - ز^۲)^۲}{۱ - ز^۲} = \frac{(ا + ب)^۲}{اب - ھ^۲}$$

یا
$$ز^۴ + \frac{(ا-ب)^۲ + ۴ھ^۲}{اب - ھ^۲}(ز^۲ - ۱) = ۰، \quad \ldots\ldots (۵)$$

اگر منحنی ایک ناقص ہے تو اب - ھ^۲ مثبت ہے اور ز^۲ کی ایک قیمت مثبت ہے اور دوسری منفی۔ ز کی حقیقی قیمت ناقص کا وہ خروج المرکز ہے جو ایک حقیقی ماسکہ کے حوالے سے ہوتا ہے اور خیالی قیمت وہ خروج المرکز ہے جو خیالی ماسکہ کے حوالے سے ہوتا ہے۔ (۲۵۸)

اگر منحنی ایک زائد ہے تو ز^۲ کی دونوں قیمتیں حقیقی ہیں اور اس لیے دونوں خروج المرکز حقیقی ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۹۰ میں معلوم ہو چکا ہے۔ اس لیے ان دو خروج المرکزوں میں تمیز پیدا کرنا چاہیئے۔

(۱) میں عہ اور بہ کی علامتیں مختلف ہوتی ہیں جبکہ منحنی زائد ہوتا ہے۔ اور اگر عہ کی علامت جہ کی علامت سے مختلف ہو تو حقیقی ماسکے محور لا پر واقع ہوں گے۔ پس حقیقی ماسکے کے حوالے سے خروج المرکز معلوم کرنے کے لیے (۳) اور (۴) سے عہ اور بہ کی قیمتیں حاصل کرو تو (۲) سے مطلوبہ خروج المرکز معلوم ہوگا اگر عہ کی وہ قیمت لیجائے جس کی علامت جہ کی علامت سے مختلف ہے۔

مثال — اُس مخروطی کا خروج المرکز معلوم کرو جس کی مساوات ہے

لا^2 - ۴ لا ما - ۲ ما^2 + ۱۰ لا + ۴ ما = ۰۔

مرکز کے حوالے سے مساوات لا^2 - ۴ لا ما - ۲ ما^2 - ۱ = ۰ ہے۔ یہ عہ لا^2 + بہ ما^2 - ۱ = ۰ ہو جائے گی جہاں عہ + بہ = - ۱ اور عہ بہ = - ۶۔ پس عہ = ۲ اور بہ = - ۳۔ حقیقی ماسکے کے حوالے سے خروج المرکز مساوات ۲ = - ۳ (۱ - ز^2) سے حاصل ہوگا، اس لیے ز = $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ ۔

۱۹۳ — مخروطی کے ماسکہ اور مرتب کی تعریف سے مخروطی کے ماسکے، مرتب، اور خروج المرکز حسب ذیل طریقہ پر فوراً معلوم کئے جا سکتے ہیں:

اگر (عہ، بہ) ایک ماسکہ ہے تو مخروطی

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ... (۱)

بموجب تعریف

(لا - عہ)^2 + (ما - بہ)^2 - (ل لا + م ما + ن)^2 = ۰، ... (۲)

کے مماثل ہے جہاں نظیری مرتب ل لا + م ما + ن = ۰ ہے اور خروج المرکز ز^2 = ل^2 + م^2 سے حاصل ہوتا ہے۔

(۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے پر

ل^2 - ۱ = لہ ا، ل م = لہ ھ، م^2 - ۱ = لہ ب،

ل ن + عہ = لہ گ، م ن + بہ = لہ ف، ن^2 - عہ^2 - بہ^2 = لہ ج

پس

لہ(ا عہ + ھ بہ + گ) = ل(ل عہ + م بہ + ن)،
لہ(ھ عہ + ب بہ + ف) = م(ل عہ + م بہ + ن)، ..... (ا)
لہ(گ عہ + ف بہ + ج) = ن(ل عہ + م بہ + ن)

(۲۵۹) نیز

لہ(ا − ب) = ل² − م²
لہ ھ = ل م ...... (ب)

ا ـ ماسکے ـ

مساواتوں (ا) کو ترتیب وار عہ، بہ، ا سے ضرب دو اور جمع کرو تو

(ل عہ + م بہ + ن)² = لہ فہ (عہ، بہ)

نیز

(ل² − م²)(ل عہ + م بہ + ن)² = لہ² {(ا عہ + ھ بہ + گ)² − (ھ عہ + ب بہ + ف)²}

اور ل م (ل عہ + م بہ + ن)² = لہ² (ا عہ + ھ بہ + گ)(ھ عہ + ب بہ + ف)

اِس لیے مساواتوں (ب) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{(\text{ا عہ + ھ بہ + گ})^2 - (\text{ھ عہ + ب بہ + ف})^2}{\text{ا − ب}} = \frac{(\text{ا عہ + ھ بہ + گ})(\text{ھ عہ + ب بہ + ف})}{\text{ھ}}$$

= فہ (عہ، ب)

اِس لیے ماسکے دو مخروطیوں کے نقاطِ تقاطع ہیں جو مساواتوں

$$\frac{(\text{ا لا + ھ ما + گ})^2 - (\text{ھ لا + ب ما + ف})^2}{\text{ا − ب}} = \frac{(\text{ا لا + ھ ما + گ})(\text{ھ لا + ب ما + ف})}{\text{ھ}} = \text{فہ (لا، ما)}$$

سے حاصل ہوتے ہیں ۔

۲ ۔ مرتب

مساواتوں (۱) سے عہ اور بہ کو ساقط کرنے سے

$$\begin{vmatrix} لہ ا - ل^۲ & لہ ھ - ل م & لہ گ - ل ن \\ لہ ھ - ل م & لہ ب - م^۲ & لہ ف - م ن \\ لہ گ - ل ن & لہ ف - م ن & لہ ج - ن^۲ \end{vmatrix} = ۰$$

یعنی $لہ^۲ \times \Delta - لہ^۲ (ل^۲ ا + م^۲ ب + ن^۲ ج + ۲ م ن ف + ۲ ن ل گ$

$+ ۲ ل م ھ) = ۰$

جس میں لہ کا سر اور مستقل رقم صفر ہیں ۔

پس (ب) سے (۲۶۰)

$$\frac{ل^۲ ا + وغیرہ}{\Delta} = \frac{ل^۲ - م^۲}{ا - ب} = \frac{ل م}{ھ}$$

اِن مساواتوں سے نسبتیں ل : م : ن ملتی ہیں جن سے مرتب متعین ہوتے ہیں ۔

۳ ۔ خروج المرکز ۔

$لہ (ا + ب) = ل^۲ + م^۲ - ۲ = ز^۲ - ۲$ کیونکہ $ز^۲ = ل^۲ + م^۲$

اور $لہ^۲ (ا ب - ھ^۲) = (۱ - ل^۲)(۱ - م^۲) - ل^۲ م^۲ = ۱ - ل^۲ - م^۲ = ۱ - ز^۲$

$\therefore \quad (۲ - ز^۲)^۲ (ا ب - ھ^۲) = (۱ - ز^۲)(ا + ب)^۲$

۱۹۴ ۔ مخروطی کی مساوات جبکہ ماسکہ کو مبدا اپر لیا گیا ہو $لا^۲ + ما^۲ = ز^۲ (لا جم عہ + ما جب عہ - ع)^۲$ ہے جس سے ظاہر ہے کہ خطوط $لا \pm \sqrt{-۱}\, ما = ۰$ میں سے کوئی ایک، مخروطی سے منطبق نقطوں پر ملتا ہے پس ماسکے سے مخروطی کے مماس خیالی خطوط $لا \pm \sqrt{-۱}\, ما = ۰$ ہیں

یعنی

$$لا^2 + ما^2 = ۰$$

اِن مماسوں کا وتر تماس نظیری مرتب ہے۔

چونکہ ماسکے سے کھینچے ہوئے مماسوں کی مساوات مرتب کے محل پر منحصر نہیں ہوتی اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہو تو اِن کے دو خیالی مماس مشترک ہوتے ہیں اور یہ کہ ہم ماسکی مخروطیوں میں چار مشترک مماس ہوتے ہیں۔

اب اگر محددوں کے مبداء اور محوروں کو کسی طریقہ پر بدلا جائے لیکن وہ قائم رہیں تو ایک ماسکہ سے کھینچے ہوئے مماسوں کی مساوات $لا^2 + ما^2 = ۰$ سے بدلکر $لا^2 + ما^2 + ۲گ\ لا + ۲ف\ ما + ج = ۰$ ہو جائے گی۔

پس ایک مخروطی کے مماسوں کی مساوات جبکہ مماس ایک ماسکہ سے کھینچے گئے ہوں اُن شرطوں کو پورا کرتی ہے جو ایک دائرہ کے لیے ہیں۔

اِس کے بالعکس اگر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے مخروطی کے مماسوں کی مساوات دائرہ کی شرطوں کو پورا کرے تو نقطہ ایک ماسکہ ہونا چاہیے۔

دائری نقطے لاتناہی پر۔ وہ خطوط جو مبداء سے کسی دائرہ پر لاتناہی پر کے نقطوں تک کھینچے گئے ہوں مساوات $لا^2 + ما^2 = ۰$ سے حاصل

ہوتے ہیں، اِس لیے تمام دائروں میں لامتناہی پر دو خیالی مشترک نقطے ہوتے ہیں - اِن نقطوں کو ماسکہ نما کہتے ہیں -

اوپر کے بیان سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی مخروطی کے حقیقی ماسکوں سے کھینچے ہوئے مماس ایک خیالی ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع ہیں جس کے دوسرے دو متقابلہ راس ماسکہ نما ع اور ج ہیں اور دوسرے دو متقابلہ راس مخروطی کے خیالی ماسکے ہیں -

پس وہ مساوات جس سے مخروطی کے ماسکے اور مرتب حاصل ہوتے ہیں حسب ذیل طریقہ پر معلوم کیجا سکتی ہے -

۱ - ماسکے معلوم کرنا -

نقطہ (لاَ، ماَ) سے مخروطی فہ (لا، ما) کے مماسوں کی مساوات

(ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج) فہ (لاَ، ماَ)

= {ا لاَ لا + ھ (لاَ ما + ماَ لا) + ب ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج}^{2}

ہے -

اگر (لاَ، ماَ) مخروطی کا ایک ماسکہ ہو تو یہ مساوات ایک دائرہ کی شرطوں کو پورا کرتی ہے یعنے یہ کہ لا^2 اور ما^2 کے سر مساوی ہیں اور لا ما کا سر صفر ہے -

پس

ا فہ (لاَ، ماَ) - (ا لاَ + ھ ماَ + گ)^2 = ب فہ (لاَ، ماَ) - (ھ لاَ + ب ماَ + ف)^2

اور ھ فہ (لاَ، ماَ) = (ا لاَ + ھ ماَ + گ)(ھ لاَ + ب ماَ + ف)

اِس لیے ماسکے وہ نقطے ہیں جو مساواتوں

[(ا لا + ھ ما + گ)^2 - (ھ لا + ب ما + ف)^2] / [ا - ب]

$$= \frac{(الا + ھ ما + گ)(ھ لا + ب ما + ف)}{ھ} = فہ(لا، ما) ...(۱)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اِن مساواتوں کو شکل

$$\frac{\left(\frac{فرفہ}{فرلا}\right)^2 - \left(\frac{فرفہ}{فرما}\right)^2}{ا - ب} = \frac{\left(\frac{فرفہ}{فرلا}\right)\left(\frac{فرفہ}{فرما}\right)}{ھ} = ۴ فہ$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

(۶۲) **۲۔ مرتب معلوم کرنا۔**

وتر $ل لا + م ما + ن = ۰$

کے سروں پر کے مماس [دفعہ ۱۸۹]

$$فہ(لا، ما) \times ﻉ - \Delta (ل لا + م ما + ن)^2 = ۰$$

ہیں۔

اگر $ل لا + م ما + ن = ۰$ ایک مرتب ہے تو یہ خطوط ماسکہ نماؤں میں سے گذرتے ہیں۔ اِس لیے

$$(ا - ب) ﻉ - \Delta (ل^2 - م^2) = ۰$$

اور $ھ ﻉ - \Delta ل م = ۰$

اِن سے نسبتیں $ل : م : ن$ معلوم کیجا سکتی ہیں اور پھر مرتب متعین ہو جاتے ہیں۔

مثال۔ اُس مخروطی کے ماسکے اور مرتب معلوم کرو جس کی مساوات

$$لا^2 + ۱۲ لا ما - ۴ ما^2 - ۶ لا + ۴ ما + ۹ = ۰$$

ہے۔

ماسکوں کے لیے مساواتیں

$$\frac{(لا + ۶ ما - ۳)^2 - (۶ لا - ۴ ما + ۲)^2}{۱ + ۴} = \frac{(لا + ۶ ما - ۳)(۶ لا - ۴ ما + ۲)}{۶}$$

= فہ (لا، ما)

ہیں ۔ پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

۳ (لا + ۲ ما - ۳) + ۲ (۲ لا - ۴ ما + ۲) = ۰،

یا ۲ (لا + ۲ ما - ۳) - ۳ (۲ لا - ۴ ما + ۲) = ۰،

∴ ۳ لا + ۲ ما - ۱ = ۰ یا ۴ لا - ۲ ما + ۳ = ۰

پس اگر ہم

(لا + ۲ ما - ۳)(۲ لا - ۴ ما + ۲) = ۲ فہ (لا، ما) .... (۱)

میں ۲ ما کی بجائے ۱ - ۳ لا درج کریں تو عمل تحویل کے بعد لا^۲ - ۱ = ۰ حاصل ہوتا ہے

جب لا = ۱ تو ما = -۱

اور جب لا = -۱ تو ما = ۲

اِس لیے حقیقی ماسکے (۱، -۱) اور (-۱، ۲) ہیں ۔

خیالی ماسکے مخروطی (۱) اور خط ۴ لا - ۲ ما + ۳ = ۰ کے نقاطِ تقاطع ہیں

مرتب ماسکوں کے قطبی ہیں اور حقیقی مرتبوں کی مساواتیں

۲ لا - ۳ ما - ۱ = ۰ اور ۲ لا - ۳ ما + ۴ = ۰

حاصل ہوں گی ۔

لیکن مرتبوں کی مساواتیں ماسکوں کو پہلے معلوم کئے بغیر بھی اوپر کے ضابطوں سے معلوم کیجا سکتی ہیں ۔

یہ معلوم ہوگا کہ

ا = -۴۰، ہ = -۶۰، ب = ۰، گ = ۰، ف = -۲۰، ج = -۴۰ (۲۶۳)

اور Δ = -۴۰۰ ۔ پس

(ل^۲ - م^۲) / ۵ = ل م / ۶ = (۴۰ ل^۲ + ۱۲۰ ل م + ۴۰ م ن + ۴۰ ن^۲) / ۴۰۰

∴ ل / ۲ = م / -۳ یا ل / ۳ = م / ۲

اور ۲۰ ل م = ۱۲ ل^۲ - ۳۶ ل م + ۱۲ م ن + ۱۲ ن^۲

جب ۳ ل + ۲ م = ۰ تو

$۱۲ ل^۲ - ۲۴ ل^۲ - ۱۸ ل ن + ۱۲ ن^۲ = ۰$

$\therefore \frac{ل}{۲} = \frac{ن}{۴} = \frac{م}{-۳}$ یا $\frac{ل}{۲} = \frac{ن}{-۱} = \frac{م}{-۳}$

اِس لیے حقیقی مرتبوں کی مساواتیں

۲ لا − ۳ ما + ۴ = ۰ اور ۲ لا − ۳ ما − ۱ = ۰

ہیں۔

جب ۳ م − ۲ ل = ۰ ہو تو مرتب خیالی ہوتے ہیں۔

ناقص اور اِس کے مرتب دائرہ کی مساواتوں $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ اور $لا^۲ + ما^۲ = ا^۲ + ب^۲$ سے بآسانی معلوم ہوتا ہے کہ مخروطی کے مرتبوں کا ایک زوج، مخروطی اور اِس کے مرتب دائرہ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے متوازی خطوط ہوتے ہیں۔

پس مخروطی ف (لا، ما) = ۰ کے مرتب مساوات

$ف (لا، ما) + لہ (ج لا^۲ + ج ما^۲ - ۲ گ لا - ۲ ف ما + ا + ب) = ۰$

سے معلوم ہوتے ہیں جہاں لہ ایسا ہے کہ دوسرے درجہ کی ارقام کامل مربع ہیں۔

اِس لیے لہ مساوات

$(ا + لہ ج) (ب + لہ ج) = ھ^۲$

یا $۱ + لہ (ا + ب) + لہ^۲ ج = ۰$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اوپر کی مثال میں

$۱ + لہ (-۳) + (-۴۰) لہ^۲ = ۰$، اس لیے ۸ لہ − ۱ = ۰ یا ۵ لہ + ۱ = ۰

مخروطی کا مرتب دائرہ

− ۴۰ لا² − ۴۰ ما² + ۴۰ ما − ۴۰ = ۰

(۲۹۴) ہے۔ اِس لیے جب ل = ۱/۸ تو مرتب

۸ (لا² + ۱۲ لا ما − ۴ ما² − ۶ لا + ۴ ما + ۹) + ۴۰ (− لا² − ما² + ما − ۱) = ۰

یا ۴ لا² − ۱۲ لا ما + ۹ ما² + ۲ لا − ۹ ما − ۴ = ۰

یعنی (۲ لا − ۳ ما + ۴) (۲ لا − ۳ ما − ۱) = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں۔

جب ل = − ۱/۲ تو مرتبوں کی مساوات

۵ (لا² + ۱۲ لا ما − ۴ ما² − ۶ لا + ۴ ما + ۹) + ۴۰ (لا² + ما² − ما + ۱) = ۰

یا ۹ لا² + ۱۲ لا ما + ۴ ما² − ۶ لا − ۴ ما + ۱۷ = ۰

یعنی (۳ لا + ۲ ما − ۱ + ۴ √−۱) (۳ لا + ۲ ما − ۱ − ۴ √−۱) = ۰

ہے۔

۱۹۵ — مخروطی کے محوروں کی مساوات معلوم کرنا۔

مخروطی کے محور متقاربوں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں اور متقارب اُن خطوں کے متوازی ہوتے ہیں جو مساوات ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰ سے (دفعہ ۱۷۴) حاصل ہوتے ہیں۔

پس (دفعہ ۳۹) محاور وہ خطوطِ مستقیم ہیں جو مخروطی کے مرکز میں سے گذرتے ہوئے خطوط

(لا² − ما²) / (ا − ب) = لا ما / ھ

کے متوازی ہیں۔

محوروں کی مساواتوں کو ہم حسب ذیل طریقہ پر بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر مخروطی کے محور پر ایک نقطہ ن ہو تو وہ خط جو ن کو مخروطی کے

مرکز سے ملاتا ہے ن کے قطبی پر عمود ہے۔

فرض کرو کہ ن کے محدد لاَ، ماَ ہیں۔ تب ن کے قطبی کی مساوات

لا (ا لاَ + ھ ماَ + گ) + ما (ھ لاَ + ب ماَ + ف) + گ لاَ + ف ماَ + ج = ۰ (۱)

ہے۔

مخروطی کے مرکز میں سے گذرنیوالے کسی خط کی مساوات

ا لا + ھ ما + گ + ل (ھ لا + ب ما + ف) = ۰، (۲)

ہے۔ اب چونکہ (۲)، (۱) پر عمود ہے اس لیے

(ا + ل ھ)(ا لاَ + ھ ماَ + گ) + (ھ + ل ب)(ھ لاَ + ب ماَ + ف) = ۰، (۳)

چونکہ (۲) نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرتا ہے اس لیے

ا لاَ + ھ ماَ + گ + ل (ھ لاَ + ب ماَ + ف) = ۰، (۴)

ل کو (۳) اور (۴) سے ساقط کرو تو ہم دیکھتے ہیں کہ (لاَ، ماَ) مخروطی (۲۶۵)

$$\frac{(ا لا + ھ ما + گ)^2 - (ھ لا + ب ما + ف)^2}{ھ} = \frac{(ا لا + ھ ما + گ)(ھ لا + ب ما + ف)}{ا - ب}$$

پر ہونا چاہیئے، یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

محوروں کی مساوات کو دفعہ ۱۹۳ یا دفعہ ۱۹۴ سے بھی ماخوذ کیا جا سکتا ہے کیونکہ اُن مخروطیوں میں سے ایک جن پر ماسکے واقع ہوتے ہیں خطوطِ مستقیم کا ایک زوج ہے جو مرکز میں سے گذرتے ہیں اور اس لیے یہ زوج محاور ہونا چاہیئے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ وہ تمام مخروطی جو ایک مخروطی کے چار ماسکوں میں سے گذرتے ہیں قائم زائد ہیں۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اُس مخروطی کے ماسکے جس کی مساوات

$$ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱$$

ہے منحنیوں

$$\frac{لا^{۲} - ما^{۲}}{ا - ب} = \frac{لا\,ما}{ھ} = \frac{۱}{ھ^{۲} - اب}$$

پر واقع ہیں۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ مخروطی

$$لا^{۲} - ۶\,لا\,ما + ما^{۲} - ۲\,لا - ۲\,ما + ۵ = ۰$$

کے حقیقی ماسکے (۱، ۱) اور (−۲، −۲) ہیں۔

مثال ۴ — ثابت کرو کہ $۲\,لا^{۲} - ۸\,لا\,ما - ۴\,ما^{۲} - ۴\,ما + ۱ = ۰$ کے حقیقی ماسکوں کے محدد

$$\left(۰،\ \frac{۱}{۲}\right) \quad اور \quad \left(-\frac{۲}{۳}،\ -\frac{۵}{۶}\right)$$ ہیں۔

مثال ۵ — مکافی $لا^{۲} + ۲\,لا\,ما + ما^{۲} - ۴\,لا + ۸\,ما - ۶ = ۰$ کا ماسکہ

نقطہ $\left(-\frac{۱}{۳}،\ -\frac{۲}{۳}\right)$ ہے۔

مثال ۶ — ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے خیالی ماسکوں سے اس کے کسی مماس پر عمود نکالے جائیں تو ان عمودوں کا حاصل ضرب نیم محور اعظم کے مربع کے مساوی ہوگا۔

مثال ۷ — ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے ایک خیالی ماسکہ سے ناقص کے کسی نقطہ کے مماس پر عمود نکالا جائے تو اس عمود کا پائین اس دائرہ پر واقع ہوتا ہے جو محور اصغر کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو۔

مثال ۸ — اگر ایک دائرہ ایک ناقص کے ساتھ دوہرا تماس رکھے تو ثابت کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ سے دائرہ کا مماس ایسے بدلتا ہے جیسے وتر تماس سے اس نقطہ کا فاصلہ۔

۱۹۶ — مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جبکہ محددوں کے محاور مخروطی کے کسی نقطہ پر کے مماس اور عماد ہوں۔ (۲۶۶)

مخروطی کی مساوات کی عام سے عام شکل

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہے۔

چونکہ مبدا منحنی پر ہے اس لیے محدد (۰، ۰) اِس مساوات کو پورا کرینگے اور اِس لیے ج = ۰ ۔

خط ما = ۰ منحنی سے وہاں ملتا ہے جہاں ا لا^2 + ۲ گ لا = ۰ ۔ اگر خط ما = ۰ مبدا پر کا مماس ہے تو لا کی وہ دونوں قیمتیں جو مساوات ا لا^2 + ۲ گ لا = ۰ سے حاصل ہوتی ہیں صفر ہونی چاہئیں۔ اسلیے گ = ۰ ۔

پس مخروطی کی مساوات کی عام سے عام شکل جبکہ محاور لا اور ما کو مماس اور نظیری عماد پر لیا گیا ہو حسب ذیل ہے:

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ ف ما = ۰

مثال ۱ ۔ مخروطی کے وہ تمام وتر جو مخروطی کے ایک ثابت نقطہ و پر ایک قائمہ زاویہ بناتے ہیں و پر کے عماد سے ایک ثابت نقطہ پر ملتے ہیں ۔

و پر کے مماس اور عماد کو محاور قرار دو ۔ تب مخروطی کی مساوات ہوگی

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ ف ما = ۰

فرض کرو کہ ایک وتر ف ق کی مساوات ل لا + م ما + ن = ۰ ہے۔

خطوط و ف، و ق کی مساوات (دفعہ ۳۸) ہوگی

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ ف ما (ل لا + م ما) = ۰، . . . (۱)

لیکن و ف اور و ق ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں، اس لیے

(۱) میں لا^2 اور ما^2 کے سروں کا مجموعہ صفر ہے ۔ اس لیے ا + ب + ۲ ف م = ۰

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ م مستقل ہے، اور م اُس مقطوعہ کا مکافی ہے جو ف ق، عماد پر قطع کرتا ہے ۔

مثال ۲ ۔ اگر ایک مخروطی کے کوئی دو وتر و ف اور و ق، و پر کے مماس کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو خط ف ق، مماس کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرے گا ۔

حسب مثال (۱) خطوط وف اور وق کی مساوات

$ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ ف ما (ل لا + م ما) = ۰$

ہے۔ اگر وف اور وق محاور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں تو لا ما کا سر صفر ہے۔ یعنی ہذا...

۱۹۷ — مخروطی ا لا^2 + ب ما^2 = ۱ کے کسی نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے عماد کی مساوات

$$\frac{لا - لاَ}{ا لاَ} = \frac{ما - ماَ}{ب ماَ}$$

ہے۔ یہ عماد نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرے گا اگر

$$\frac{ھ - لاَ}{ا لاَ} = \frac{ک - ماَ}{ب ماَ}$$

یعنی اگر $لاَ ماَ (ا - ب) + ب ھ ماَ - ا ک لاَ = ۰$

اس لیے ان عمادوں کے پائین جو کسی مخصوص نقطہ (ھ، ک) میں سے گذریں مخروطی

$لا ما (ا - ب) + ب ھ ما - ا ک لا = ۰$، ...... (۱)

پر واقع ہوتے ہیں۔

مخروطی (۱) اور ابتدائی مخروطی کے چار حقیقی یا خیالی نقاطِ تقاطع وہ نقطے ہیں جن پر کے عماد نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتے ہیں۔

مخروطی (۱) صریحاً ایک قائم زائد ہے جس کے متقارب محدود کے محوروں کے متوازی ہیں یعنی ابتدائی مخروطی کے محوروں کے متوازی۔ نیز یہ قائم زائد اس مخروطی کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور خود نقطہ (ھ، ک) میں سے بھی۔

۱۹۸ — اگر دو وتروں ل لا + م ما - ۱ = ۰ اور لَ لا + مَ ما - ۱ = ۰ کے سروں پر کے عماد نقطہ (ھ، ک) پر ملیں تو لہ کی کسی خاص قیمت کیلئے مخروطی

$ا لا^2 + ب ما^2 - ۱ - لہ (ل لا + م ما - ۱)(لَ لا + مَ ما - ۱) = ۰$، ... (۱)

ہو ل کی تمام قیمتوں کے لیے اِن دو وتروں کے چار سِروں میں سے گذرتا ہے وہی ہو گا (دفعہ ۱۹۷)

جو $لا ما (ا - ب) + ب ہ ما - ا ک لا = ۰$ ... (۲)

ہے۔

اِس آخری مساوات میں $لا^۲$ اور $ما^۲$ کے سر اور مستقل رقم صفر ہیں اور اِس لیے وہ قبل الذکر مساوات میں صفر ہونے چاہئیں۔ اس لیے

$$ا - ا ل لَ = ۰، \quad ب - ب م مَ = ۰ \quad \text{اور} \quad ا + ب = ۰$$

پس وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ وتروں $ل لا + م ما - ا = ۰$ (۲۶۸)

اور $لَ لا + مَ ما - ا = ۰$ کے سِروں پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں یہ ہیں کہ

$$\frac{ل لَ}{ا} = \frac{م مَ}{ب} = - ۱، \quad \ldots\ldots (۳)$$

۱۹۹ — گذشتہ دفعہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ناقص (محاور ۲ ا، ۲ ب) کے اُن وتروں کے سِروں پر کے عماد جن کی مساواتیں

$$ل لا + م ما - ا = ۰ \quad \text{اور} \quad لَ لا + مَ ما - ا = ۰$$

ہیں ایک نقطہ پر ملیں گے اگر

$$ا^۲ ل لَ = ب^۲ م مَ = - ۱، \quad \ldots\ldots (۱)$$

اگر اِن چار سِروں کے خارج المرکز زاوئے ع، ہ اور جہ، ضہ ہوں تو وتروں کی مساواتیں

$$\frac{لا}{ا} جم \frac{ع + ہ}{۲} + \frac{ما}{ب} جب \frac{ع + ہ}{۲} = جم \frac{ع - ہ}{۲}$$

اور

$$\frac{لا}{ا} جم \frac{جہ + ضہ}{۲} + \frac{ما}{ب} جب \frac{جہ + ضہ}{۲} = جم \frac{جہ - ضہ}{۲}$$

ہونگی۔ اِس لیے (۱) کے ساتھ مقابلہ کرنے پر

جم $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ) جم $\frac{1}{2}$ (جہ + ضہ) + جم $\frac{1}{2}$ (عہ - بہ) جم $\frac{1}{2}$ (جہ - ضہ) = ۰،

اور جب $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ) جب $\frac{1}{2}$ (جہ + ضہ) + جم $\frac{1}{2}$ (عہ - بہ) جم $\frac{1}{2}$ (جہ - ضہ) = ۰،

تفریق کرنے پر جم $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ + جہ + ضہ) = ۰

اِس لیے عہ + بہ + جہ + ضہ = (۲ن + ۱) π ، ..... (۲)

نیز پہلی مساوات سے

جم $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ + جہ + ضہ) + جم $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ - جہ - ضہ)

+ جم $\frac{1}{2}$ (عہ + جہ - بہ - ضہ) + جم $\frac{1}{2}$ (عہ + ضہ - بہ - جہ) = ۰

اور شرط (۲) کو استعمال کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

جب (عہ + بہ) + جب (بہ + جہ) + جب (جہ + عہ) = ۰، ..... (۳)

(نیز دیکھو دفعہ ۱۳۹)

(۲۶۹) **مثال ۱۔** اگر ا ب ج وہ اعظم مثلث ہو جو ایک ناقص میں بنایا جا سکے تو ثابت کرو کہ ا، ب، ج پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں گے۔

خارج المرکز زاویے عہ، عہ + $\frac{2\pi}{3}$ اور عہ + $\frac{4\pi}{3}$ ہونگے [دفعہ ۱۲۸]۔

وہ شرط کہ عماد ایک نقطہ پر ملیں یہ ہے (دفعہ ۱۹۸ (۳))

جب ۲عہ + جب (۲عہ + $\frac{2\pi}{3}$) + جب (۲عہ + $\frac{4\pi}{3}$) = ۰

جو صریحاً درست ہے۔

مثال ۲۔ ایک مرکزدار مخروطی کے چار نقطوں ف، ق، ر، س پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور ف، ق، ر میں سے گذرنے والا دائرہ مخروطی کو مکرر سَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ س سَ، مخروطی کا ایک قطر ہے۔

س سَ، مخروطی کا ایک قطر ہوگا اگر ر س اور ر سَ، مزدوج قطروں کے متوازی ہوں (دفعہ ۱۳۴)۔

اب اگر ف ق، ل لا + م ما − ۱ = ۰ ہو تو ر س، $\frac{ا}{ل}$ لا + $\frac{ب}{م}$ ما + ۱ = ۰ ہوگا (دفعہ ۱۹۱)، نیز ر سَ، ل لا − م ما = ۰ کے متوازی ہوگا کیونکہ ف، ق، ر، سَ ایک دائرہ پر ہیں۔ پس س سَ ایک قطر ہے کیونکہ [دفعہ ۱۸۲] ل لا − م ما = ۰ اور $\frac{ا}{ل}$ لا + $\frac{ب}{م}$ ما = ۰، ا لا^2 + ب ما^2 = ۱ کے مزدوج قطر ہیں۔

[اس مسئلہ کو دفعہ ۱۹۹ (۲) اور دفعہ ۱۳۶ ا سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے]

مثال ۳ — اگر ایک ناقص کے نقطوں ا، ب، ج، د پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں تو ا، ب، ج، د میں سے گذرنے والے ایک مکافی کا محور، مساوی مزدوجوں میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہوگا۔

اگر (ھ، ک) وہ نقطہ ہو جہاں عماد ملتے ہیں تو ا، ب، ج، د مخروطیوں

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \quad \text{اور} \quad لا\,ما\left(\frac{۱}{ا^2} - \frac{۱}{ب^2}\right) + \frac{ھ\,ما}{ب^2} - \frac{ک\,لا}{ا^2} = ۰$$

کے چار نقاطِ تقاطع ہیں۔

اِن نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے تمام مخروطی مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱ - \lambda\left\{لا\,ما\left(\frac{۱}{ا^2} - \frac{۱}{ب^2}\right) + \frac{ھ\,ما}{ب^2} - \frac{ک\,لا}{ا^2}\right\} = ۰$$

میں شامل ہیں۔

اگر یہ ایک مکافی ہو تو دوسرے درجہ کی ارقام ایک کامل مربع ہونی چاہئیں اور اس لیے $\frac{لا}{ا} \pm \frac{ما}{ب}$ کا مربع ہونی چاہئیں۔ اس لیے ہر ایسے مکافی کی مساوات شکل $\left(\frac{لا}{ا} \pm \frac{ما}{ب}\right)^2 + ا\,لا + ب\,ما + ج = ۰$ کی ہے۔ اس لیے

اِن کے محاور، خطوط $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \pm \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۰$ میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہیں (دفعہ ۱۷۲)۔

(۲۰۰)

مثال ۴ — ایک مخروطی کے لحاظ سے ایک نقطہ ن کا قطبی لیا گیا ہے اور اِس نقطہ سے اِس کے قطبی پر عمود کھینچا گیا ہے، اگر یہ عمود ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ (عہ) ن کا طریق ایک قائم زائدہ ہے (بہ) اُس مثلث کا حائط دائرہ جو ن کا قطبی محوروں سے قطع کرتا ہے ہمیشہ ایک ثابت نقطہ وَ میں سے گذرتا ہے (جہ) ایک مکافی جس کا ماسکہ وَ ہے محوروں کو مس کرے گا اور ایسے تمام قطبیوں کو (ضہ) اس مکافی کا مرتب ج و ہے جہاں ج مخروطی کا مرکز ہے، اور (صہ) و اور وَ باہم تبدیل کئے جا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ ہے اور فرض کرو کہ ثابت نقطہ و کے محدد (ھ، ک) ہیں۔

اگر کسی نقطہ ن کے محدد (لاَ، ماَ) ہوں تو اُس خط کی مساوات جو ن میں سے گذرے اور اس کے قطبی پر عمود ہو

$$\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^2}}$$

یا

$$\frac{\text{ا}^2\,\text{لا}}{\text{لاَ}} - \frac{\text{ب}^2\,\text{ما}}{\text{ماَ}} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$$

ہوگی۔ اگر یہ خط نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرے تو

$$\frac{\text{ا}^2\,\text{ھ}}{\text{لاَ}} - \frac{\text{ب}^2\,\text{ک}}{\text{ماَ}} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \text{ ، } \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

(۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ (لاَ، ماَ) ایک قائم زائدہ ہے۔ ...(عہ)

اُس مثلث کے حائط دائرہ کی مساوات جو (لاَ، ماَ) کا قطبی محوروں سے

قطع کرتا ہے

لا۲ + ما۲ ـ ا۲ لا / لا َ ـ ب۲ ما / ما َ = ۰

ہوگی ۔ یہ دائرہ نقطہ (لہ ھ ، لہ ک) میں سے گذریگا اگر

لہ (ھ۲ + ک۲) = ا۲ ھ / لا َ ـ ب۲ ک / ما َ

پس اگر (لا َ ، ما َ) رشتہ (۱) کو پورا کرتا ہے تو

لہ = (ا۲ ـ ب۲) / (ھ۲ + ک۲)

اس لیے ایسے تمام دائرے نقطہ وَ میں سے گذرتے ہیں جس کے محدد

(ا۲ ـ ب۲) / (ھ۲ + ک۲) ھ ، (ب۲ ـ ا۲) / (ھ۲ + ک۲) ک ، .... (ب)

ہیں ۔

نقطہ وَ اُس مثلث کے حائط دائرہ پر ہے جو محوروں اور کسی ایک قطبی (۲۰۱) سے بنتا ہے ، اس لیے وہ مکافی جس کا ماسکہ وَ ہے اور جو محوروں کو مس کرتا ہے ہر ایک قطبی کو مس کرے گا ، .... (ج)

یہ مکافی ابتدائی مخروطی کے محوروں کو مس کرتاہے ، اس لیے مرکز ج ، مکافی کے مرتب پر ایک نقطہ ہے ، نیز خطوط ج و اور ج وَ محور لا کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں جو مکافی کا ایک مماس ہے ، اس لیے وَ ماسکہ ہونیکی وجہ سے ج و مرتب ہے ، .... (ھ)

چونکہ ج وَ × ج و = ا۲ ـ ب۲ اور ج و ، ج وَ محور لا کے ساتھ مساوی زاویئے بناتے ہیں اور محور ما کی ایک ہی جانب واقع ہیں اس لیے و اور وَ باہم بدل پذیر ہیں ، .... (ھ)

۲۰۰ ـ تعریف ـ دو منحنیوں کو متشابہ اور متشابہًا واقع اُسوقت

کہا جاتا ہے جبکہ ایک منحنی کے سمتی نیم قطر جو کسی نقطہ و سے کھینچے گئے ہوں دوسرے منحنی کے متوازی سمتی نیم قطروں کے ساتھ جو دوسرے نقطہ وَ سے کھینچے گئے ہوں ایک مستقل نسبت رکھیں۔

دو منحنیوں کو متشابہ اسوقت کہا جاتا ہے جبکہ دو ثابت نقطوں و اور وَ سے کھینچے ہوئے نصف قطر جو ایک دوسرے کے ساتھ ایک مستقل زاویہ بنائیں متناسب ہوں۔

اِن دو ثابت نقطوں و اور وَ کو تشابہ کے مرکز کہا جا سکتا ہے۔

۲۰۱ — اگر دو منحنیوں کے لیے تشابہ کے مرکزوں کا ایک زوج موجود ہو تو ایسے زوجوں کی لامتناہی تعداد ہوگی۔

فرض کرو کہ تشابہ کے مرکزوں کا دیا ہوا زوج و، وَ ہے اور فرض کرو کہ و ن، وَ نَ متوازی نصف قطروں کا کوئی زوج ہے۔ کوئی نقطہ ج لو اور وَ جَ کو و ج کے متوازی اور نسبت وَ نَ : و ن میں کھینچو۔ تب متشابہ مثلثات ج و ن اور جَ وَ نَ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ج ن، جَ نَ کے متوازی ہے اور اس کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ ج، جَ تشابہ کے مرکز ہیں۔

۲۰۲ — اگر دو مرکز دار مخروطی متشابہ ہوں تو اِن دو منحنیوں کے مرکز تشابہ کے مرکز ہوں گے۔

فرض کرو کہ تشابہ کے دو مرکز و اور وَ ہیں۔ ایک مخروطی کا کوئی وتر ن و ق کھینچو اور اس کے جواب میں دوسرے منحنی کا وتر نَ وَ قَ کھینچو۔ تب بموجب فرض ن و × و ق : نَ وَ × وَ قَ، نظیری وتروں کے ہر زوج کے لیے مستقل ہے۔ لیکن چونکہ و ایک ثابت نقطہ ہے اس لیے ن و × و ق ہمیشہ پہلے مخروطی کے اُس وتر کے مربع کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے جو اس کے متوازی ہے یہی صورت دوسرے مخروطی کے لیے بھی درست ہے۔ اس لیے (۲۷۲)

اِن دو مخروطیوں کے نظیری قطر ایک دوسرے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتے ہیں پس اِن منحنیوں کے مرکز تشابہ کے مرکز ہیں۔

۲۰۳۔ وہ شرطیں معلوم کرنا کہ دو مخروطی متشابہ اور متشابہاً واقع ہوں۔

گذشتہ دفعہ کی رو سے اِن کے مرکز تشابہ کے مرکز ہیں۔

فرض کرو کہ اِن مخروطیوں کی مساواتیں اِن مرکزوں اور متوازی محوروں کے حوالے سے

$$ا\,لا^2 + ۲\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^2 + ج = ۰$$

اور

$$اَ\,لا^2 + ۲\,ھَ\,لا\,ما + بَ\,ما^2 + جَ = ۰$$

ہیں۔ اِن مساواتوں کو قطبی محددوں میں لکھا جائے تو

$$ر^2 (ا\,جم^2 طہ + ۲\,ھ\,جب طہ\,جم طہ + ب\,جب^2 طہ) + ج = ۰،$$

اور

$$رَ^2 (اَ\,جم^2 طہ + ۲\,ھَ\,جب طہ\,جم طہ + بَ\,جب^2 طہ) + جَ = ۰$$

پس اگر $ر^2 : رَ^2$ مستقل ہو تو طہ کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\frac{ا\,جم^2 طہ + ۲\,ھ\,جب طہ\,جم طہ + ب\,جب^2 طہ}{اَ\,جم^2 طہ + ۲\,ھَ\,جب طہ\,جم طہ + بَ\,جب^2 طہ}$$

کو مستقل ہونا چاہیئے۔ اِس کے لیے ضروری ہے کہ $\frac{ا}{اَ} = \frac{ھ}{ھَ} = \frac{ب}{بَ}$۔ اسلیے اِن دو مخروطیوں کے متقارب متوازی ہیں [اِس نتیجہ کو حسب ذیل طریقہ پر حاصل کیا جا سکتا ہے: چونکہ ر: رَ مستقل ہے جبکہ اِن دو میں سے ایک لامتناہی ہو جاتا ہے اس لیے دوسرا بھی لامتناہی ہوگا جس سے ثابت ہوتا ہے کہ متقارب متوازی ہیں۔]

اس کے بالعکس اگر یہ شرطیں پوری ہوں اور اگر ہر کسر لہ کے مساوی ہو تو

$$\frac{ر^2}{رَ^2} = \frac{ج}{لہ\,جَ}$$

اِس لیے نظیری نصف قطروں کی نسبت مستقل ہے اور اِس لئے منحنی متشابہ ہیں۔

(۲۰۳) اگر ج اور لہ جَ ایک ہی علامت کے نہ ہوں تو مستقل نسبت خیالی ہوتی ہے، اور صفر یا لامتناہی ہوتی ہے اگر ج یا جَ صفر ہو۔
تشابہ کی شرطیں اُن تین منحنیوں سے جن کی مساواتیں

لا ما = ج، لا ما = ۰، اور لا ما = - ج

ہیں پوری ہوتی ہیں۔ اِس لیے ایک زائدہ اِس کا مزدوج زائدہ اور اِن کے متقارب تین متشابہ اور متشابہاً واقع منحنی ہیں۔ مزدوج زائد کے لیے مستقل نسبت $\sqrt{-1}$ ہے اور متقاربوں کے لیے صفر۔

لیکن یہ منحنی ایک ہی شباہت نہیں رکھتے۔ کیونکہ متشابہ منحنیوں کے لیے جن کی شباہت وہی ہو مستقل نسبت حقیقی اور مُعین (محدود) ہونی چاہیئے۔

۲۰۴ ۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو مخروطی متشابہ ہوں اگرچہ متشابہاً واقع نہ ہوں۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اِن دو منحنیوں کے مرکز تشابہ کے مرکز ہونے چاہئیں۔
فرض کرو کہ اِن منحنیوں کی مساواتیں اِن کے اپنے مرکزوں کے حوالے سے

$$\text{ا لا}^2 + 2\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + \text{ج} = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

اور

$$\text{اَ لا}^2 + 2\text{ھَ لا ما} + \text{بَ ما}^2 + \text{جَ} = 0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

ہیں اور فرض کرو کہ وہ وتر جو پہلے منحنی میں محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے طہ کی تمام قیمتوں کے لیے اُس وتر کے متناسب ہے جو دوسرے منحنی میں محور لا کے ساتھ زاویہ (طہ + عہ) بناتا ہے۔ اگر دوسرے منحنی کے محوروں کو زاویہ عہ میں سے گھمایا جائے تو اُس وقت اِن مخروطیوں کے نصف قطر ایسے ہوں گے جو متعلقہ محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں گے اور

ایک مستقل نسبت میں ہوں گے۔

فرض کرو کہ اس طرح دوسرے مخروطی کی مساوات

$$\text{ا}'\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}'\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}'\,\text{ما}^2 + \text{ج}' = 0$$

ہو جاتی ہے۔ تب پچھلی دفعہ کی رُو سے حاصل ہونا چاہیئے

$$\frac{\text{ا}'}{\text{ا}} = \frac{\text{ھ}'}{\text{ھ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{ب}}$$

اِس لیے

$$\frac{\text{ا}' + \text{ب}'}{\text{ا} + \text{ب}} = \frac{\sqrt{\text{ا}'\text{ب}' - \text{ھ}'^2}}{\sqrt{\text{اب} - \text{ھ}^2}}$$

لیکن [دفعہ ۵۲] $\text{ا}' + \text{ب}' = \text{ا}' + \text{ب}'$ اور $\text{ا}'\text{ب}' - \text{ھ}'^2 = \text{ا}'\text{ب}'$ (۲۷۴)

$- \text{ھ}'^2$ اِس لیے تشابہ کی شرط

$$\frac{\text{اب} - \text{ھ}^2}{(\text{ا} + \text{ب})^2} = \frac{\text{ا}'\text{ب}' - \text{ھ}'^2}{(\text{ا}' + \text{ب}')^2}$$

ہے۔

اوپر کے بیان سے ظاہر ہے کہ متشابہ مخروطیوں کے متقاربوں کے درمیان زاویئے مساوی ہوتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۷۴)۔

اِس نتیجہ کو حسب ذیل طریقہ پر بھی حاصل کیا جا سکتا ہے: چونکہ اِن دو منحنیوں کے سمتی نیم قطر جو ایک دوسرے کے ساتھ ایک خاص مستقل زاویہ پر مائل ہیں مستقل نسبت میں ہیں اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اُن دو سمتوں کا درمیانی زاویہ جو ایک منحنی کے لیے لامتناہی قیمتیں دیتے ہیں دوسرے منحنی کے نظیری زاویئے کے مساوی ہونا چاہیئے یعنے ایک مخروطی کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ دوسرے مخروطی کے متقاربوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے۔

۲۰۵ — مثلثات جو ایک مخروطی کے اندر اور دوسرے ہم محور مخروطی کے گرد کھینچے گئے ہوں —

فرض کرو کہ مخروطی $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}=1$ پر کے نقطوں ا، ب، ج کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ، جہ ہیں اور فرض کرو کہ ان نقطوں پر کے مماسوں سے مثلث اَ بَ جَ بنتا ہے —

ب، ج پر کے مماس نقطہ اَ پر ملتے ہیں جہاں

$$\frac{لا}{ا}=\frac{جم\frac{1}{2}(بہ+جہ)}{جم\frac{1}{2}(بہ-جہ)}\ ،\ \frac{ما}{ب}=\frac{جب\frac{1}{2}(بہ+جہ)}{جب\frac{1}{2}(بہ-جہ)}$$

نقطہ اَ مخروطی $سَ=\frac{لا^2}{اَ^2}+\frac{ما^2}{بَ^2}-1=0$ پر ہوگا اگر

$$\frac{ا^2}{اَ^2}جم^2\frac{1}{2}(بہ+جہ)+\frac{ب^2}{بَ^2}جب^2\frac{1}{2}(بہ+جہ)=جم^2\frac{1}{2}(بہ-جہ)$$

یعنے اگر $ل+م\,جم\,بہ\,جم\,جہ+ن\,جب\,بہ\,جب\,جہ=0$، ..... (۱)

جہاں $ل=\frac{ا^2}{اَ^2}+\frac{ب^2}{بَ^2}-1$ ، $م=\frac{ا^2}{اَ^2}-\frac{ب^2}{بَ^2}-1$ ، $ن=\frac{ب^2}{بَ^2}-\frac{ا^2}{اَ^2}-1$

نقطہ بَ، سَ پر ہوگا اگر

$ل+م\,جم\,جہ\,جم\,عہ+ن\,جب\,جہ\,جب\,عہ=0$، ..... (۲)

(۱) اور (۲) سے (۲۰۵)

$$\frac{ل}{جب(عہ-بہ)}=\frac{م\,جم\,جہ}{جب\,بہ-جب\,عہ}=\frac{ن\,جب\,جہ}{جم\,عہ-جم\,بہ}$$

یا

$$\frac{ل}{جم\frac{1}{2}(عہ-بہ)}=\frac{م\,جم\,جہ}{-جم\frac{1}{2}(عہ+بہ)}=\frac{ن\,جب\,جہ}{-جب\frac{1}{2}(عہ+بہ)}\text{، ..... (۳)}$$

پس

$$\frac{1}{\text{ل}^2}\,\text{جم}^2\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ}) = \frac{1}{\text{م}^2}\,\text{جم}^2\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ}) + \frac{1}{\text{ن}^2}\,\text{جب}^2\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})$$

اِس لیے جَ کا طریق مخروطی

$$\frac{\text{ل}^2}{\text{اَ}^2\,\text{م}^2} + \frac{\text{ل}^2\,\text{ا}^2}{\text{بَ}^2\,\text{ن}^2} = 1 \quad \text{،} \ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

ہے۔

جَ کا طریق خود مخروطی سَ ہوگا اگر

$$\text{ا}^2\,\text{م}^2 = \text{اَ}^2\,\text{ل}^2 \quad \text{اور} \quad \text{ب}^2\,\text{ن}^2 = \text{بَ}^2\,\text{ل}^2$$

جو

$$\frac{\text{ا}^4}{\text{اَ}^4} + \frac{\text{ب}^4}{\text{بَ}^4} + 1 - 2\,\frac{\text{ا}^2\,\text{ب}^2}{\text{اَ}^2\,\text{بَ}^2} - 2\,\frac{\text{ا}^2}{\text{اَ}^2} - 2\,\frac{\text{ب}^2}{\text{بَ}^2} = 0$$

کے مماثل ہیں یعنے

$$\frac{\text{ا}}{\text{اَ}} \pm \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} \pm 1 = 0 \quad \text{،} \ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

چونکہ اوپر کی شرط عہ اور بہ پر منحصر نہیں ہے اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک مثلث کو سَ کے اندر اور س کے گرد کھینچا جائے تو ایسے مثلثوں کی تعداد لامتناہی ہوگی۔

ہم فرض کرینگے کہ $\frac{\text{ا}}{\text{اَ}} + \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} = 1$، تب یہ معلوم ہوگا کہ

$$\frac{\text{ل}}{\text{م}} = \frac{\text{ا}}{\text{اَ}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ل}}{\text{ن}} = \frac{\text{ب}}{\text{بَ}}$$

اور پھر (۱) ہو جائے گا ۔

$$۱ + \frac{اَ}{ا} \text{ جم بہ جم جہ} + \frac{بَ}{ب} \text{ جب جہ جب بہ} = ۰، \quad \ldots\ldots (۱)$$

اسی طرح دو اور متشابہ مساواتیں حاصل ہونگی ۔

اب (۳) سے (۲۷۶)

$$\frac{\text{جم } \frac{۱}{۲} (\text{عہ} + \text{بہ})}{\text{جم } \frac{۱}{۲} (\text{عہ} - \text{بہ})} = - \frac{\text{ھ}}{\text{ل}} \text{ جم جہ} = - \frac{اَ}{ا} \text{ جم جہ}$$

اور

$$\frac{\text{جب } \frac{۱}{۲} (\text{عہ} + \text{بہ})}{\text{جم } \frac{۱}{۲} (\text{عہ} - \text{بہ})} = - \frac{\text{ن}}{\text{ل}} \text{ جم جہ} = - \frac{بَ}{ب} \text{ جم جہ}$$

اِس طرح جَ ' لا = ۔اَ جم جہ اور ما = ۔ بَ جب جہ سے متعین ہوجاتا ہے ۔ اِسی طرح اَ اور بَ کے لیے ۔

پس سَ پر کے نقطوں اَ ' بَ ' جَ کے خارج المرکز زاوئے

 π + عہ ' π + بہ ' π + جہ ہیں جہاں عہ ' بہ ' جہ ' نقطوں ا ' ب ' ج کے خارج المرکز زاوئے ہیں ۔

اَ بَ جَ کے مرکزِ ہندسی کا طریق معلوم کرنا ۔

مساواتوں

$$۱ + \frac{اَ}{ا} \text{ جم بہ جم جہ} + \frac{بَ}{ب} \text{ جب بہ جب جہ} = ۰، \text{ وغیرہ}$$

سے ہم دیکھتے ہیں کہ عہ ' بہ ' جہ ' حسب ذیل مساوات کی تین اصلیں ہیں:

$$\frac{اَ}{ا} \frac{\text{جم عہ جم بہ جم جہ}}{\text{جم طہ}} + \frac{بَ}{ب} \frac{\text{جب جہ جب بہ جب عہ}}{\text{جب طہ}} + ۱ = ۰$$

لیکن (ا'/ا جم عہ جم بہ جم جہ + جم طہ^۲)(ا - جم^۲ طہ) - ب'^۲/ب^۲ جب^۲ عہ جب^۲ بہ جب^۲ جہ جم^۲ طہ =
سے حاصل ہوتا ہے

جم عہ + جم بہ + جم جہ + جم ضہ = - ۲ا'/ا جم عہ جم بہ جم جہ

اور جم عہ جم بہ جم جہ جم ضہ = - ا'^۲/ا^۲ جم^۲ عہ جم^۲ بہ جم^۲ جہ

اِس لیے

جم عہ + جم بہ + جم جہ = + (۲ا - ا')/ا' جم ضہ ،

اور اسی طرح جب عہ + جب بہ + جب جہ = + (۲ب - ب')/ب' جب ضہ

اب ۳ لاَ = Σ اَ جم (۲ + عہ) = - اَ (جم عہ + جم بہ + جم جہ)

اور ۳ ماَ = - Σ بَ جب (۲ + عہ) = - بَ (جب عہ + جب بہ + جب جہ)

اِس لیے مرکزِ ہندسی کے طریق کی مساوات

$$\frac{۹ لا^۲}{(۲ا - اَ)^۲} + \frac{۹ ما^۲}{(۲ب - بَ)^۲} = ۱$$

ہے۔

(۲۷۷)

دسویں باب پر مثالیں

۱ ـــ اگر ق اور ف کوئی دو نقطے ہوں اور ج ایک مخروطی کا مرکز ہو تو ثابت کرو کہ مخروطی کے لحاظ سے نقطہ ف کے قطبی پر ق اور ج سے کھینچے ہوئے عمود ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو ق کے قطبی پر ف اور ج سے کھینچے ہوئے عمودوں میں ہے ۔

۲ ـــ اگر کسی نقطہ سے ایک مخروطی کے دو مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان میں وہی نسبت ہوتی ہے جو نظیری عاادوں میں ہے ۔

۳ ـــ ایک مخروطی پر و کے مختلف مقاموں کے لیے دفعہ ۱۹۶ میں مندرجہ مثالوں کے ثابت نقطوں کے طریق معلوم کرو ۔

۴ ـــ ایک ناقص کے متوازی وتروں کے ایک نظام میں سے ایک وتر ف و ق ہے اور اس پر ایک نقطہ و ایسا ہے کہ ف و۲ + و ق۲ مستقل ہے ۔ ثابت کرو کہ و کے مختلف محلوں کے لیے و کا طریق ایک ہم مرکز مخروطی ہے ۔

۵ ـــ اگر و ایک ثابت نقطہ ہو اور و ن نَ کوئی وتر جو ایک مخروطی کو ن، نَ پر قطع کرتا ہے، اور اگر اس خط پر ایک نقطہ د ایسا لیا جائے کہ $\frac{1}{و د^2} = \frac{1}{و ن^2} + \frac{1}{و نَ^2}$ تو ثابت کرو کہ د کا طریق ایک مخروطی ہو گا جس کا مرکز و ہو گا ۔

۶ ـــ اگر متوازی خطوطِ مستقیم کے ایک نظام میں سے ایک خط و ف فَ ق قَ ہو جو ایک دئے ہوئے مخروطی کو ف، فَ پر اور دوسرے کو ق، قَ پر قطع کرتا ہے اور و ایسا ہو کہ مستطیلوں و ن × و نَ اور و ق × و قَ کی نسبت مستقل ہے تو ثابت کرو کہ و کا طریق ایک مخروطی ہے جو ابتدائی مخروطیوں کے

نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

۷ — ایک مخروطی کے کوئی دو وتر ف و فَ اور ق و قَ ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ف و} \times \text{و فَ}} + \frac{1}{\text{ق و} \times \text{و قَ}}$$ مستقل ہے۔

۸ — اگر ایک ناقص کے محورِ اعظم پر ایک نقطہ لیا جائے جس کا فصلہ

$\text{ا}\sqrt{\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس نقطہ میں سے گذرنے والے کسی وتر کے مقطوعوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

۹ — اگر ایک قائم زائد کے متوازی وتروں کے ایک نظام میں سے ایک وتر ف فَ ہو اور اگر عمودی قطر کے سرے ا، اَ ہوں تو ثابت کرو کہ ف ا اور فَ اَ ایک ثابت دائرہ پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ الفاظ "قائم زائد" اور "دائرہ" باہم بدلے جا سکتے ہیں۔

۱۰ — اگر ایک مکافی کا کوئی ماسکی وتر ن س نَ ہو اور ن م، نَ مَ ایک ثابت خطِ مستقیم پر عمود ہوں تو

$$\frac{\text{ن م}}{\text{ن س}} + \frac{\text{نَ مَ}}{\text{نَ س}}$$

مستقل ہوگا۔

۱۱ — ایک دائرہ کے وتر ایک ثابت نقطے میں سے گذرتے ہوئے کھینچے گئے ہیں اور ان وتروں کو قطر مانکر دائرے مرتسم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں میں سے کسی ایک کے لحاظ سے ثابت نقطہ کا قطبی ایک ثابت مکافی کو مس کرتا ہے۔

۱۲ — ایک مخروطی پر کے ایک ثابت نقطے سے وتر کھینچے گئے ہیں جو

ایک ثابت قطر پر مساوی مقطوعے قطع کرتے ہیں جہاں ان مقطوعوں کو مرکز سے پیمائش کیا گیا ہے۔ ان وتروں کے دوسرے سروں پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۱۳۔ اگر ایک ناقص کے کسی ماسکی وتر کے سروں کے محدد (لَا، مَا) اور (لاً، ماً) ہوں اور اس کے وسطی نقطہ کے محدد (لآ، مآ) ہوں تو ثابت کرو کہ مَا، ماً ایسے بدلیں گے جیسے لآ۔ مکانی کی صورت میں کیا ہو جائے گا؟

۱۴۔ ایک ناقص کے محور پر دو ثابت نقطے س، ھ ہیں جن کا فاصلہ مرکز ج سے مساوی ہے۔ ان نقطوں میں سے گذرتے ہوئے دو وتر س ق اور ف ھ قَ کھینچے گئے ہیں اور معین م ق کو ر تک اس طرح خارج کیا گیا ہے کہ م ر، قَ کے فصلہ کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

۱۵۔ ایک ناقص کے محور پر دو ثابت نقطے س، ھ ہیں جو مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہیں اور ان نقطوں میں سے گذرتے ہوئے دو وتر ف س ق اور ف ھ قَ کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف پر کا مماس اور خط ق قَ محور کے ساتھ ایسے زاویے بناتے ہیں جن کے مماس ایک مستقل نسبت میں ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک ناقص کے دو متوازی وتر جو ماسکوں میں سے کھینچے گئے ہیں منحنی کو نقطوں ف، فَ پر محور اعظم کی ایک ہی جانب قطع کرتے ہیں اور نقطوں ف، فَ میں سے گذرنے والا خط نیم محوروں ج ا، ج ب کو علی الترتیب ع، و پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{ا ج}^2}{\text{ع ج}^2} + \frac{\text{ب ج}^2}{\text{و ج}^2}$ مستقل ہے۔

۱۷۔ ایک ناقص کے دو مماس کسی بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر وہ چار نقطے جہاں مماس محوروں کو قطع کرتے ہیں ایک دائرہ پر واقع ہوں تو نقطہ کا طریق ایک ثابت قائم زائد ہوگا۔ (۹، ۲)

۱۸۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے مماس محور اعظم اور محور اصغر کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں لیکن وہ علی القوائم نہ ہوں تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک

تمام زاویے ہو کا جس کے راس ناقص کے ماسکے ہوں گے۔

۱۹ — اگر ایک مخروطی کے ماسوں کا ایک زوج ایک ثابت نقطہ سے دو نقطوں پر ملے اور مرکز سے ان کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ نقطۂ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ نقطۂ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے اگر مستقیموں کا حاصل ضرب یا مجموعہ مستقل ہو۔

۲۰ — نقطہ و ہیں سے جو ایک ناقص کے ایک وتر ا ب کا نقطۂ وسطی ہے کوئی وتر ف و ق کھینچا گیا ہے۔ ف اور ق پر کے ماس ا ب سے علی الترتیب س اور ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا س = ب ت۔

۲۱ — مخروطی ع لا۲ + ہ ما۲ = ۱ کے مماسوں کے ایسے زوج کھینچے گئے ہیں کہ وہ ہمیشہ مخروطی ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ = ۱ کے مزدوج قطروں کے متوازی رہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطۂ تقاطع کا طریق

ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ = ا/ع + ب/ہ

ہے۔

۲۲ — ایک ناقص کے دو مماس ف ت، ف تَ ہیں جو ایک ثابت نقطہ ق پر کے مماس سے نقطوں ت، تَ پر ملتے ہیں۔ ف کا طریق معلوم کرو (۱) جبکہ ق ت اور ق تَ کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو، اور (۲) جبکہ مستطیل ق ت × ق تَ مستقل ہو۔

۲۳ — ایک مخروطی کے راس ا پر کے مماس پر ایک ثابت نقطہ و ہے اور اس مماس پر و سے مساوی فاصلوں پر دو نقطے ف، فَ ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف اور فَ سے مخروطی کے دوسرے مماس کھینچے جائیں تو ان کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۲۴ — اگر ایک دئے ہوئے مربع کے حائط دائرہ کے کسی نقطہ سے اس دائرہ کے مماس کھینچے جائیں جو مربع کے اندر کھینچا گیا ہو تو یہ مماس مربع کے وتروں

ایسے چار نقطوں پر ملیں گے جو ایک قائم زائد پر واقع ہوں گے ۔

۲۵ — ایک مخروطی کے ایسے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو جو ایک ثابت خطِ مستقیم پر مستقل طول کا مقطوعہ قطع کریں ۔

(۲۸۰) ۲۶ — ایک مخروطی کے دو مماس ایک ثابت خطِ مستقیم ہ ن سے نقطوں ف اور ق پر ملتے ہیں ۔ اگر ف، ق ایسے ہوں کہ ایک ثابت نقطہ و پر ف ق کے محاذی ایک قائمہ زاویہ بنے تو ثابت کرو کہ مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دوسرا مخروطی ہوگا ۔

۲۷ — ایک دائرہ کے قطر کے سروں کو کسی نقطہ سے ملایا گیا ہے اور اس نقطہ سے دائرہ کے دو مماس کھینچے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ عمود دار قطر پر کا وہ مقطوعہ جو ایک خط اور ایک مماس کے درمیان قطع ہوتا ہے اس مقطوعہ کے مساوی ہے جو دوسرے خط اور دوسرے مماس کے درمیان قطع ہوتا ہے ۔

۲۸ — مثلثات ایک ناقص کے گرد ایک دیے ہوئے قاعدہ پر جو ناقص کو نقطہ ف پر مس کرتا ہے کھینچے گئے ہیں ۔ اگر قاعدہ پر کے زاویے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں تو ثابت کرو کہ راسوں کا طریق وہ عماد ہے جو ف میں سے گذرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر کھینچا گیا ہے ۔

۲۹ — ایک مکافی قائم محوروں کے درمیان پھسلتا ہے ۔ وہ منحنی معلوم کرو جو اس کے محور پر کا کوئی نقطہ مرتسم کرتا ہے ۔ اس سے ثابت کرو کہ ماسکہ اور راس ایسے منحنی مرتسم کریں گے جن کی مساواتیں

$$\text{لا}^2\,\text{ما}^2 = \text{ل}^2\left(\text{لا}^2 + \text{ما}^2\right)\text{،}\quad \text{لا}^2\,\text{ما}^2\left(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 3\,\text{ل}^2\right) = \text{ل}^6$$

ہیں جہاں ۴ ل، مکافی کا وترِ خاص ہے ۔

۳۰ — اگر محددوں کے محاور ایک دوسرے سے زاویہ عہ پر مائل ہوں اور اگر ان کے درمیان ایک ناقص پھسلے تو ثابت کرو کہ مرکز کے طریق کی مساوات

$$\text{جب}^2\text{عہ}\left(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ف}^2\right)^2 - 4\,\text{جم}^2\text{عہ}\left(\text{لا}^2\,\text{ما}^2\,\text{جب}^2\text{عہ} - \text{ق}^4\right) = 0$$

ہے جہاں ف۲ اور ق۲ سے علی الترتیب ناقص کے نیم محوروں کے مربعوں کا مجموعہ اور حاصل ضرب تعبیر ہوتے ہیں۔

۳۱ — اگر ایک ناقص کے دو مماس وف، وق ہوں اور ان کے متوازی نیم قطر ج فَ، ج قَ ہوں تو ثابت کرو کہ

وف × وق + ج فَ × ج قَ = وس × وھ

جہاں س، ھ ماسکے ہیں۔

۳۲ — دو ثابت نقطوں ف، ق میں سے خطوطِ مستقیم ا ب ف، ج ق د کھینچے گئے ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کو نقطوں ا، ج پر اور دوسرے دئے ہوئے خطِ مستقیم کو نقطوں ب، د پر قطع کرتے ہیں۔ خطوطِ مستقیم ا د، ب ج کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر دئے ہوئے خطوط کے نقطۂ تقاطع پر اس خط کے محاذی جو ف اور ق کو ملاتا ہے ایک قائم زاویہ بنے تو طریق ایک قائم زائد ہوگا۔

۳۳ — ایک ناقص کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی پر اس نقطہ سے عمود کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس عمود کے پائین کا طریق ایک قائم زائد ہے اگر نقطہ ناقص کے ایک ثابت قطر پر واقع ہو۔ (۲۸۱)

۳۴ — دو ہم مرکز اور ہم محور مخروطیوں کے لحاظ سے ایک نقطہ ف کے قطبی نقطہ ق پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف ایک ثابت خطِ مستقیم پر حرکت کرے تو ق ایک قائم زائد مرتسم کریگا۔

۳۵ — اگر دو دئے ہوئے مخروطیوں کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی (۱) متوازی ہوں یا (۲) علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے کسی صورت میں نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۳۶ — ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے مرکز کا طریق جبکہ دو دئے ہوئے نقطوں کے قطبی دئے ہوئے خطوطِ مستقیم ہوں ایک ثابت خطِ مستقیم ہے۔

۳۷ — نیم محوروں ا، ب کا ایک ناقص دو ثابت عمود وار خطوں کے درمیان پھسلتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے ماسکوں کا طریقِ منحنی

(لا² + ما²) (لا² ما² + ب²) – ۴ ا² لا² ما² = ۰

ہے۔

۳۸ — ثابت کرو کہ اُن مخروطیوں کے ماسکوں کا طریق جنکا مرکز دیا گیا ہو اور جو دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کریں ایک زائد ہے۔

۳۹ — مخروطیوں کے ایک سلسلہ کے ماسکے ایک دئے ہوئے متوازی الاضلاع کے دو متصلہ اضلاع پر ہیں اور یہ مخروطی متوازی الاضلاع کے دوسرے دو ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن کے مرکز ایک خطِ مستقیم پر واقع ہیں۔

۴۰ — وہ دائرے جو ایک مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام پر انہیں قطر مان کر کھینچے گئے ہوں دوسرے مخروطی کو لف کرتے ہیں جس کے ماسکے اُن مماسوں کے نقاطِ تماس ہیں جو وتروں کے متوازی ہیں۔

۴۱ — ایک قائم زائد ایک ثابت مرکز دار مخروطی کے ساتھ دوہرا تماس رکھتا ہے۔ اگر وترِ تماس ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے تو قائم زائد کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہوگا جو ثابت مخروطی کے مرکز میں سے گزریگا۔

۴۲ — ایک دائرہ ایک قائم زائد کو نقطوں ف، ق، ر، س پر قطع کرتا ہے۔ مثلثات ق ر س، ر س ف، س ف ق اور ف ق ر کے مراکز عمودی علی الترتیب فَ، قَ، رَ، سَ ہیں۔ ثابت کرو کہ ف فَ، ق قَ، ر رَ، س سَ، زائد کے قطر ہیں۔

۴۳ — کوئی قائم زائد جس کے متقارب ایک ناقص کے محوروں کے متوازی ہوں ناقص کو ایسے نقطوں پر قطع کرے گا جن کے خارج المرکز زاوئے عہ، بہ، جہ، ضہ، رشتہ (۲۸۲)

عہ + بہ + جہ + ضہ = (۲ ن + ۱) π

کو پورا کرینگے۔

۴۴ — نصف قطر ا کے ایک دائرہ پر پانچ نقطے دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن پانچ قائم زائدوں کے مرکز جن میں سے ہر ایک، اوپر کے نقطوں میں سے

چار نقطوں میں سے گذرتا ہے نصف قطر $\frac{1}{2}$ کے ایک دائرہ پر واقع ہوں گے۔

۴۵ — اگر ایک قائم زائد کے متقارب ایک مخروطی کے محوروں کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے چار نقاط تقاطع کے اوسط محل کا مرکز منحنیوں کے مرکزوں کے درمیان وسط میں ہے۔

۴۶ — تین خطوط مستقیم علی الترتیب ایک مثلث کے تین ضلعوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ چھ نقطے جہاں وہ مثلث کے اضلاع کو قطع کرتے ہیں ایک مخروطی پر واقع ہیں۔

۴۷ — اگر ایک ناقص کے نقطہ ف پر کا عماد محوروں سے گ، گَ پر ملے اور اس پر ایک نقطہ و ایسا ہو کہ $\frac{2}{\text{ف و}} = \frac{1}{\text{ف گ}} + \frac{1}{\text{ف گَ}}$ تو و میں سے گذرنے والا کوئی وتر ف پر ایک قائمہ زاویہ بنائے گا۔

۴۸ — ایک ناقص کے ایک ثابت نقطہ و میں سے دو وتر و ف، و فَ کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر و میں سے گذرنے والے قطر کے دوسرے سرے وَ پر کا مماس محدودہ خطوں کو ایسے دو نقطوں ق، قَ پر قطع کرے کہ مستطیل وَ ق × وَ قَ مستقل ہو تو خط ف فَ خط و وَ کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کریگا۔

۴۹ — ایک مخروطی کے کسی نقطہ ف پر کے مماس کے متوازی وتر ل م کھینچا گیا ہے اور خط ف س جو زاویہ ل ف م کی تنصیف کرتا ہے ل م سے س پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ س کا طریق ایک زائد ہے جس کے متقارب ابتدائی مخروطی کے محوروں کے متوازی ہیں۔

۵۰ — ایک دئے ہوئے مرکز دار مخروطی کو ایک دوسرا مخروطی جو اول الذکر کے مرکز میں سے گذرتا ہے ایسے نقطوں پر مس کرتا ہے جو اول الذکر کے اُس وتر کے سرے ہیں جو اس کے قاطع محور کے ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے مخروطی کے مرکز کا طریق بھی ایک مرکز دار مخروطی ہے۔

۵۱ — ایک ناقص کا وتر ق قَ، مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے۔ ناقص کا مرکز ج ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ ق ج قَ کا

مرکز ق قَ کے مختلف محلوں کے لیے ایک زائد مرتسم کرے گا۔

(۲۸۳) ۵۲ — ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کو کسی نقطہ پر مس کرتا ہے اور مرکز میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس عمود کے پایین کا طریق جو ناقص کے مرکز سے ناقص اور دائرہ کے وتر تقاطع پر کھینچا گیا ہے ناقص

$$ا^2 لا^2 + ب^2 ما^2 = \frac{ا^4 ب^4}{(ا^2 - ب^2)^2}$$ ہے۔

۵۳ — ج کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ زائد ۲ لا ما − ج = ۰، ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کو مس کر سکے اور ثابت کرو کہ نقطۂ تماس ناقص کے مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کا ایک سرا ہوگا۔

نیز ثابت کرو کہ ان دو منحنیوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی اس قطر پر ملینگے۔

۵۴ — اگر دو دائروں کے متوازی وتر ج د، ع ف ہوں اور وہ (دائرے) ا اور ب پر متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ چھ نقطوں ا، ب، ج، د، ع، ف میں سے ایک مخروطی کھینچا جا سکتا ہے۔ محور اعظم کے محل کے لیے عمل معلوم کرو۔

۵۵ — اگر ایک دائرہ اور ایک مخروطی کے چار نقاطِ تقاطع میں سے دو پر مخروطی کے مماس کھینچے جائیں اور ان مماسوں کا نقطۂ تقاطع ف، دائرہ پر واقع ہو تو دوسرے دو نقطوں پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع فَ بھی اسی دائرہ پر واقع ہوگا۔ اس صورت میں وہ رشتہ معلوم کرو جو ایک مرکزدار مخروطی میں ف اور فَ کے محلوں کو مربوط کرتا ہے، اور نیز اس سے ایک مکافی کی صورت میں ف اور فَ کے اضافی محل متعین کرو۔

۵۶ — اگر ایک مکافی کے مرتب سے مساوی فاصلوں پر اور اس کی مخالف سمتوں میں دو نقطے ت، تَ ہوں اور ت سے مماس ت ف اور ت ق ہوں اور تَ سے تَ فَ اور تَ قَ تو ثابت کرو کہ ت، ف، ق، تَ، فَ، قَ سب کے سب ایک قائم زائد پر واقع ہوں گے۔

۵۷ — اگر ایک دیے ہوئے مکافی کے مماسوں کے دو زوج و ف، و ق اور وَ فَ، وَ قَ ہوں تو و، ف، ق، وَ، فَ، قَ میں سے گذرنے والا مخروطی مکافی ہوگا اگر و وَ کا وسطی نقطہ دیے ہوئے مکافی پر ہو۔

۵۸ — ایک ثابت نقطہ و کو مرکز مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں جو ایک مخروطی کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ اور مخروطی کے مشترک وتروں کے نقاطِ وسطی کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

(۲۸۴) ۵۹ — ایک ثابت نقطہ و کو مرکز مانکر کوئی دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک مخروطی کو چار حقیقی یا خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان چار نقطوں میں سے گذرنے والے تمام مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق ایک قائم زائد ہے جو دائرہ کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہے۔

۶۰ — کسی نقطہ سے $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱ = ۰$ کے تین عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا مرکزِ ہندسی جس کے راس ان عمادوں کے پائین ہیں ناقص $\frac{۹ لا^2}{ا^2} + \frac{۹ ما^2}{ب^2} = \frac{(ا^2 + ب^2)^2}{(ا^2 - ب^2)^2}$ پر ہے۔

۶۱ — اگر کسی نقطہ سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے جائیں اور وہ ایک محور سے نقطوں گ۱، گ۲، گ۳، گ۴ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{ج گ_۱} + \frac{۱}{ج گ_۲} + \frac{۱}{ج گ_۳} + \frac{۱}{ج گ_۴} = \frac{۴}{ج گ_۱ + ج گ_۲ + ج گ_۳ + ج گ_۴}$$

۶۲ — اگر ایک ناقص کے نقطوں ا، ب، ج، د پر کے عماد و پر ملیں تو مخروطی ا ب ج د و کی مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ثابت نقطہ و کیلئے اس مخروطی کے مرکز کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے بشرطیکہ ناقص ہم محور ناقصوں کے

ایک نظام سے متعلق ہو۔

۶۳ — ایک ناقص کے نقطوں ف، ق، ر، س پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں اور نقطوں ف، ق، ر، س سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو ناقص کے محور کے ساتھ وہی زاوئے بناتے ہیں جو علی الترتیب ج ف، ج ق، ج ر، ج س بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ چار خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۶۴ — ایک ناقص کے نقطوں ف، ق، ر، س پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں اور نقطوں ف، ق، ر، س میں سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو ناقص کے محور کے ساتھ وہی زاوئے بناتے ہیں جو علی الترتیب خطوط و ف، و ق، و ر، و س بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ چار خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۶۵ — ف، ق، ر، س پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور امدادی دائرہ پر فَ، قَ، رَ، سَ وہ نقطے ہیں جو علی الترتیب ف، ق، ر، س کے متناظر ہیں۔ اگر ف، ق، ر، س میں سے خطوط کھینچے جائیں جو علی الترتیب فَ ج، قَ ج، رَ ج اور سَ ج کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۶۶ — اگر ایک مخروطی کے راس سے اُن چار عمادوں پر عمود کھینچے جائیں جو ایک نقطہ و پر ملتے ہیں تو یہ خطوط مکرر مخروطی سے ایسے نقطوں پر ملیں گے جو ایک دائرہ پر واقع ہوں گے۔

۶۷ — مخروطی $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۴$ پر کے کسی نقطہ سے مخروطی $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاطِ تماس پر کے عماد مخروطی

$$ا^2 لا^2 + ب^2 ما^2 = \left(\frac{ا^2 - ب^2}{۲}\right)^2$$ پر ملیں گے۔

۶۸ — اگر ایک ناقص ایک مثلث ا ب ج کو محیط کرے اور مثلث کے راسوں پر کے مماس متقابلہ اضلاع کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ ا، ب، ج پر کے

عمادسی نقطہ و پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ مثلث کے مختلف شکلوں کے لیے و کا طریق ناقص $4 ا^2 لا^2 + 4 ب^2 ما^2 = (ا^2 - ب^2)^2$ ہے۔

۶۹ — اگر $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کے ایک وتر کے سروں پر کے مماس ناقص پر کے ایک نقطہ پر ملیں اور وتر خود عماد نہ ہو تو ثابت کرو کہ وہ ہم مرکز ناقص

$$\frac{لا^2}{ا^6} + \frac{ما^2}{ب^6} = \frac{1}{(ا^2 - ب^2)^2}$$ کو مس کرے گا۔

۷۰ — اس مثلث کا مرکز عمودی معلوم کرو جس کے راس (ا جم عہ، ب جیب عہ)، (ا جم ہ، ب جیب ہ) اور (ا جم جہ، ب جیب جہ) ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مثلث کا مرکز ہندسی ایک ثابت نقطہ ہو تو مرکز عمودی کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۷۱ — زائد $4 لا ما = ا ب$ کا کوئی مماس ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ سے نقطوں ف، ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطوں ف، ق پر ناقص کے عماد ناقص کے ایک ثابت قطر پر ملتے ہیں۔

۷۲ — اگر ناقص $ب^2 لا^2 + ا^2 ما^2 = ا^2 ب^2$ کے چار عماد نقطہ و سے کھینچے جائیں اور اگر $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$، $ع_4$ وہ عمود ہوں جو مرکز سے ان مماسوں پر کھینچے گئے ہیں جو ان عمادوں کے پائین پر ناقص کے ہیں تو و کا طریق ایک زائد ہوگا اگر

$$\frac{1}{ع_1^2} + \frac{1}{ع_2^2} + \frac{1}{ع_3^2} + \frac{1}{ع_4^2} = \frac{1}{ج^2}$$

یہاں ج مستقل ہے۔

۷۳ — ایک نقطہ سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے گئے ہیں اگر ان عمادوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو تو نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۷۴ — نقطہ (ف، ک) سے ایک ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں ثابت

کروکہ ان عمادوں کے پائین پر ناقص کے مماس ایک ایسا ذو اربعۃ الاضلاع بناتے ہیں کہ اگر (لاً ، ماً) اور (لاً ، ماً) متقابلہ راسوں کا کوئی زوج ہو تو $\frac{\text{لاً لاً}}{\text{ا}^2} = \frac{\text{ماً ماً}}{\text{ب}^2} = -1$۔ نیز ثابت کروکہ ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں کے نقاط وسطی کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات ف لا + گ ما = ۰ ہے۔

۷۵ــــ ایک ناقص کے چار نقطوں پر مماس کھینچے گئے ہیں جو ایسے ہیں کہ ان نقطوں پر کے عماد باہم متقاطع ہوتے ہیں۔ چار مستطیل بنائے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک کے دو متصلہ اضلاع ناقص کے محوروں پر ہیں اور ایک وتر اوپر کے مماسوں میں سے ایک مماس ہے۔ ثابت کروکہ دوسرے وتروں کے بعید سرے ایک خطِ مستقیم میں واقع ہوتے ہیں۔

۷۶ــــ ایک نقطہ ن سے ایک ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں جو ناقص سے نقطوں ا، ب، ج، د پر ملتے ہیں۔ اگر ایک ایسا مخروطی کھینچا جاسکے جو نقطوں ا، ب، ج، د میں سے اور ناقص کے ماسکہ میں سے گذرے اور ناقص کے نظیری مرتب کو مس کرے تو ثابت کروکہ ن، دو ثابت خطوں میں سے ایک پر واقع ہوتا ہے۔ (۲۸۶)

۷۷ــــ اگر ا، ب، ج، د پر کے عماد ایک نقطہ و پر ملیں تو س ا × س ب × س ج × س د = ک^2 × س و^2 جہاں س ایک ماسکہ ہے۔

۷۸ــــ کسی نقطہ سے ایک قائم زائد کے چار عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کروکہ ان عمادوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس فاصلہ کے مربع کے تین گنے کے مساوی ہے جو قائم زائد کے مرکز سے نقطہ کا ہے۔

۷۹ــــ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کا ایک وتر کھینچا گیا ہے جو محورِ اعظم سے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے $\text{ا}\sqrt{\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}}}$ ہے۔ اس وتر کے سروں پر ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کروکہ ان کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۸۰ — کسی نقطہ سے ایک مخروطی کے چار عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن عمادوں کا حاصل ضرب، اِس نقطہ سے مخروطی کے مماسوں اور نقطہ سے متماریوں کے فاصلوں کے مسلسل حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۸۱ — اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس کے مزدوج قطروں کے سروں پر کے مماس خطوطِ مستقیم (لا + لہ ما)² − ع² = ۰ اور (لا + مہ ما)² − ق² = ۰ ہیں۔

۸۲ — دائرہ لا² + ما² = ج² کے کسی نقطہ ت سے ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کے مماس ت ف، ت ق کھینچے گئے ہیں اور دائرہ ت ف ق ناقص کو مکرر فَ، قَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط فَ قَ ہمیشہ ناقص

$$\frac{لا^2}{ا^4} + \frac{ما^2}{ب^4} = \frac{ج^2}{(ا^2 - ب^2)^2}$$

کو مس کرتا ہے۔

۸۳ — ایک مخروطی کا ایک ماسکی وتر، محور اعظم کے سروں پر کے مماسوں کو نقطوں ا، ب پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اب کو قطر مان کر دائرہ کھینچا جائے تو وہ مخروطی کے ساتھ دوہرا تماس رکھتا ہے۔

۸۴ — اب ج د کوئی مستطیل ہے جو ایک ناقص کو جس کے ماسکے س اور ہ ہیں محیط کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ اب س یا اب ہ امدادی دائرہ کے مساوی ہے۔

۸۵ — ایک دائرہ جس کا مرکز ایک مکافی کے راس پر کے مماس پر ہے کھینچا گیا ہے، اور دائرہ اور مکافی کے چار مشترک مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن زاویوں کا مجموعہ جو یہ خطوط مکافی کے محور کے ساتھ بناتے ہیں صفر ہے۔ (۲۸۰)

۸۶ — امدادی دائرہ کے کسی نقطہ سے ایک ناقص کے مماس کھینچے گئے ہیں جو مرتب کو چار نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن میں سے دو نقطے اُس خط پر واقع ہوتے ہیں جو ناقص کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔ نیز معلوم کرو کہ دوسرے

دو نقطوں میں سے گذرنے والا خط محور اعظم کو کہاں قطع کرتا ہے۔

۸۷ — اگر دو مرکز دار مخروطیوں کی مساواتیں ع = ۰ اور و = ۰ ہوں اور ان کے مرکزوں پر ع اور د کی قیمتیں ع، د ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط ج ن، جَ نَ کے نقطۂ تقاطع کے طریق کی مساوات ع و = د ع ہے جہاں ن ایک منحنی پر اور نَ دوسرے منحنی پر ہے اور ن نَ، ج جَ کے متوازی ہے۔ اس صورت کا امتحان کرو جبکہ مخروطی متشابہ اور متشابہا واقع ہوں۔

۸۸ — دو دائرے ایک ناقص کے ساتھ دوہرا اندرونی تماس رکھتے ہیں اور ایک تیسرا دائرہ چار نقاط تماس میں سے گذرتا ہے۔ اگر ناقص کے کسی نقطے سے ان تین دائروں کے مماس ت، تَ، تً ہوں تو ثابت کرو کہ ت تَ = تً۲

۸۹ — اس مخروطی کی عام مساوات معلوم کرو جو دو دائروں (لا - ا)۲ + ما۲ = ج۲، (لا - ب)۲ + ما۲ = ا۲ کے ساتھ دوہرا تماس رکھے۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے وتر خاص کے سرے کے طریق کی مساوات ما۲ (لا۲ - ا۲) (لا۲ - ا۲ + ج۲) = ج۲ لا۲ ہے جبکہ مخروطی دائروں (لا ± ا)۲ + ما۲ = ج۲ کے ساتھ دوہرا تماس رکھے۔

۹۰ — ثابت کرو کہ خطوط ل لا + م ما = ۱ اور لَ لا + مَ ما = ۱ جو دو مخروطیوں

(ل۲مَ - لَ۲م) لا۲ + ۲ (ل - لَ) م مَ لا ما + (م - مَ) م مَ ما۲ = ۲ (ل مَ - م لَ) لا

اور (م۲لَ - مَ۲ل) ما۲ + ۲ (م - مَ) ل لَ لا ما + (ل - لَ) ل لَ لا۲ = ۲ (م لَ - مَ ل) ما

کے نقاط تقاطع میں سے گذرتے ہیں ایک مخروطی کے مزدوج قطر ہیں۔

۹۱ — اگر ایک ثابت نقطہ میں سے ایک ناقص کے وتر کھینچے جائیں اور ان پر انہیں قطر مان کر دائرے مرتسم کئے جائیں تو ثابت کرو کہ ناقص کے ساتھ ان دائروں کے دوسرے وتر تقاطع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

۹۲ — ثابت کرو کہ مخروطی ا۲ لا۲ + ب۲ ما۲ = (ا۲ - ب۲)۲ میں مثلثوں کی (۲۸۵) لا انتہا تعداد بنائی جا سکتی ہے جنکے اضلاع مخروطی $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کو مس

کرتے ہوں ۔

۹۳ — اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے تین اضلاع جہاں ذو اربعۃ الاضلاع ایک مخروطی میں بنایا گیا ہے تین ثابت نقطوں میں سے جو ایک ہی خطِ مستقیم میں واقع ہیں گذریں تو ثابت کرو کہ چوتھا ضلع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے جو اسی خط مستقیم میں واقع ہوگا گذرے گا۔

۹۴ — اگر ایک ناقص کا ایک وتر ف ق ایک دیئے ہوئے ہم مرکز دائرہ کو مس کرے اور وہ دائرہ جس کا قطر ف ق ہے ناقص کو نقطوں فَ، قَ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ فَ قَ ایک دوسرے ہم مرکز ثابت دائرہ کو لف کرے گا۔

۹۵ — ایک خط جو ایک ناقص کے مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے محورِ اعظم کے سروں پر کے مماسوں کو نقطوں ف، ق پر قطع کرتا ہے اور نقطوں ف، ق سے ناقص کے دوسرے مماس نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

۹۶ — ایک قائم زائد پر چار ثابت نقطے ل، م، ن، س ہیں اور ن کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ ن ا، ل م پر عمود ہے اور وہ ن س سے ا پر ملتا ہے؛ ن ج، ل ن پر عمود ہے اور وہ م س سے ج پر ملتا ہے؛ ن ب، ل س پر عمود ہے اور وہ م ن سے ب پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ا × ن ا = ن ب × ن ب = ن ج × ن ج۔

۹۷ — ایک مکافی کے ایک ثابت قطر پر ن کوئی نقطہ ہے۔ ن سے منحنی کے عماد منحنی کو ا، ب، ج پر قطع کرتے ہیں۔ ن ا، ن ب، ن ج کے متوازی مماس، اَ، بَ، جَ پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثوں ا ب ج اور اَ بَ جَ کے رقبوں میں نسبت مستقل ہے۔

۹۸ — ایک دائرہ (مرکز ج) کے قطر ا ب پر نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ا ن اور ب ن کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس دائرہ کے مرکز کا طریق [illegible] دائروں کو مس کرتا ہے دو ناقصوں پر مشتمل ہے جن کا ایک ماسکہ ج ہے۔

۹۹ — ایک مخروطی کے مرکز اور ماسکوں س، سَ سے کسی نقطہ تک خطوط کھینچے گئے ہیں اور یہ خطوط متناظر وتر تماس سے نقطوں و، گ، گَ پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن دائروں کا بنیادی محور جو س گ، سَ گَ پر انہیں قطر مان کر کھینچے گئے ہیں، و میں سے گزرتا ہے۔

۱۰۰ — اگر ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع دو دئے ہوئے خطوط مستقیم سے علی الترتیب نقطوں ا$_1$، ا$_2$؛ ب$_1$، ب$_2$؛ ج$_1$، ج$_2$ پر ملیں اور اگر ذوار بعۃ الاضلاع ب$_1$ ب$_2$ ج$_1$ ج$_2$، ج$_1$ ج$_2$ ا$_1$ ا$_2$، ا$_1$ ا$_2$ ب$_1$ ب$_2$ کے گرد مخروطی مرتسم کئے جائیں تو ان مخروطیوں کے تین دوسرے مشترک وتروں میں سے ہر ایک، مثلث ا ب ج کے ایک راس میں سے گذرے گا اور یہ سب وتر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

(۲۸۹)

گیارھواں باب

مخروطیوں کے نظام

۲۰۶ — مخروطی کی عام سے عام مساوات

ا لا^۲^ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲^ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

میں چھ مستقل ا، ھ، ب، گ، ف، ج ہیں۔ لیکن چونکہ ہم مساوات کو کسی مستقل مقدار سے ضرب دے سکتے ہیں یا تقسیم کر سکتے ہیں اور اس سے لا اور ما کے درمیانی رشتہ میں جو مساوات سے بیان ہوتا ہے کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی اس لیے فی الحقیقت صرف پانچ مستقل کسی مخصوص مخروطی کی مساوات میں ہوا کرتے ہیں چنانچہ یہ مستقل مقداریں وہ پانچ نسبتیں ہیں جو چھ مقداریں ا، ھ، ب، گ، ف، ج ایک دوسرے کے ساتھ رکھتی ہیں۔

پس ایک مخروطی سے پانچ شرطیں پوری کرائی جا سکتی ہیں اور اس سے زیادہ نہیں۔ مثلاً مخروطی کو پانچ مفروضہ نقطوں میں سے گذارا جا سکتا ہے یا اس طرح کھینچا جا سکتا ہے کہ وہ چار مفروضہ نقطوں میں سے گذرے اور ایک دئے ہوئے خط کو مس کرے۔ ان پانچ شرطوں سے جن کو کوئی مخروطی پورا کرے مستقلوں کے درمیان پانچ مساواتیں پیدا ہوتی ہیں اور یہ پانچ غیر تابع مساواتیں پانچ نسبتوں کو متعین کرنے کے لیے ضروری اور کافی دونوں ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ دی ہوئی مساواتوں سے نسبتوں کی قیمتوں کا ایک سے

زیادہ جٹ حاصل ہوں اور اس لیے ایک سے زیادہ مخروطی دی ہوئی شرطوں کو
پورا کریں لیکن ایسے مخروطیوں کی تعداد محدود ہوگی اگر شرطیں فی الحقیقت
ایک دوسرے پر منحصر نہ ہوں ۔

اگر صرف چار شرطیں (یا چار سے کم) دی گئی ہوں تو مخروطیوں کی
لامتناہی تعداد ان شرطوں کو پورا کرے گی ۔

یہ پانچ شرطیں جن کو کوئی مخروطی پورا کر سکتا ہے ایسی ہونی چاہئیں کہ ہر ایک
شرط سے مستقلوں کے درمیان ایک رشتہ حاصل ہو مثلاً ایک مفروضہ نقطہ
میں سے گذرنے کی شرط یا ایک مفروضہ خطِ مستقیم کو مس کرنے کی شرط ۔

(۲۹۰) بعض شرطیں ایسی ہوتی ہیں کہ ان سے مستقلوں کے درمیان دو یا زیادہ
رشتے حاصل ہوتے ہیں اور کسی ایسی شرط کو مذکورہ پانچ شرطوں میں سے دو یا
زیادہ سمجھنا ہوگا ۔ مثلاً

اگر ایک دئے ہوئے نقطہ کو مخروطی کا مرکز بنانا ہے تو دو شرطیں پوری
ہونی چاہئیں (دفعہ ۱۶۸) ۔

اگر ایک ماسکہ دیا گیا ہے تو یہ دو مماس دئے جانے کے معادل ہے [دفعہ ۱۹۴] ۔

اگر یہ دیا گیا ہے کہ ایک خط ایک مخروطی کو ایک دئے ہوئے نقطہ پر مس کرتا
ہے تو یہ دو شرطوں کے [illegible]ل ہے کیونکہ دئے ہوئے مخروطی پر دو متصل نقطے
حاصل ہوتے ہیں ۔

اگر ایک متقارب کی سمت دی گئی ہے تو یہ اس کے معادل ہے کہ ایک
نقطہ (لاتناہی پر) دیا گیا ہے ۔

اگر متقارب کا محل دیا گیا ہے تو یہ دو شرطوں کے معادل ہے کیونکہ
دو نقطے (لاتناہی پر) معلوم ہوتے ہیں ۔

اگر محوروں کے محل دئے گئے ہیں تو یہ تین شرطوں کے معادل ہے ۔

اگر خروج المرکز دیا گیا ہے تو یہ بالعموم ایک شرط کے معادل ہے لیکن چونکہ

$\frac{ز^۲}{۱ - ز^۲} = \frac{(ا - ب)^۲ + ۴ھ^۲}{اب - ھ^۲}$ [دفعہ ۱۹۲] اس لیے اگر ز = ۰ دیا گیا

ہے تو دو شرطیں ا = ب اور ھ = ۰ حاصل ہوتی ہیں ۔

۲۰۷ ۔ پانچ نقطوں میں سے جنمیں کوئی چار ایک خط مستقیم میں نہ ہوں ایک اور صرف ایک مخروطی کھینچا جا سکتا ہے ۔

اگر ان میں سے تین نقطے ایک خط مستقیم میں ہوں تو ان پانچ نقطوں میں سے گذرنے والا مخروطی خطوط مستقیم کا ایک زوج ہونا چاہئے کیونکہ کوئی خط مستقیم کسی 'کافی' 'ناقص' یا زائد کو تین نقطوں پر نہیں مل سکتا ۔ ان پانچ نقطوں میں سے گذرنے والے خطوط مستقیم کا محولہ بالا زوج یہ ہے (۱) وہ خط مستقیم جس پر تین نقطے واقع ہیں اور (۲) وہ خط مستقیم جو دوسرے دو نقطوں میں سے گذرتا ہے ۔

لیکن اگر پانچ نقطوں میں سے دو نقطوں سے زیادہ ایک خط مستقیم پر نہ ہوں تو فرض کرو کہ ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کو محور لا اور دوسرے دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کو محور ما لیا گیا ہے ۔

فرض کرو کہ ان محوروں کے حوالے سے محولہ بالا چار نقطوں کے محدد $(ھ_۱, ۰)$، $(ھ_۲, ۰)$، $(۰, ک_۱)$ اور $(۰, ک_۲)$ ہیں ۔

خطوط مستقیم کے زوج

$$\left(\frac{لا}{ھ_۱}+\frac{ما}{ک_۱}-۱\right)\left(\frac{لا}{ھ_۲}+\frac{ما}{ک_۲}-۱\right)=۰ \text{ اور } لا\,ما=۰$$

وہ مخروطی ہیں جو ان چار نقطوں میں سے گذرتے ہیں ۔ اس لیے وہ تمام مخروطی جو ان چار نقطوں میں سے گذرینگے مساوات

$$ل\,لا\,ما+\left(\frac{لا}{ھ_۱}+\frac{ما}{ک_۱}-۱\right)\left(\frac{لا}{ھ_۲}+\frac{ما}{ک_۲}-۱\right)=۰$$

سے حاصل ہوں گے ۔ یہ مخروطی پانچویں نقطہ میں سے جس کے محدد لاَ، ماَ ہیں گذرے گا اگر ل کو ایسا منتخب کیا جائے کہ

$$ل لاَ ماَ + (\frac{لاَ}{ھ} + \frac{ماَ}{ک} - ۱)(\frac{لاَ}{ھ^۲} + \frac{ماَ}{ک^۲} - ۱) = ۰$$

ل کی ایک اور صرف ایک قیمت ہے جو اس مساوات کو پورا کرتی ہے اور اس لیے ایک اور صرف ایک مخروطی ہے جو ان پانچ نقطوں میں سے گذرے گا ۔

اگر ان میں سے چار نقطے ایک خطِ مستقیم پر ہوں تو ایک سے زیادہ مخروطی ان پانچ نقطوں میں سے گذریں گے کیونکہ ایسا مخروطی دو خطوطِ مستقیم پر مشتمل ہوگا جن میں سے ایک تو وہ خطِ مستقیم ہے جس پر چار نقطے واقع ہیں اور دوسرا کوئی خطِ مستقیم ہے جو پانچویں نقطے میں سے گذرتا ہے ۔

مثال ۱ ۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو پانچ نقطوں

(۲، ۱)، (۱، ۰)، (۳، -۱)، (-۱، ۰)، اور (۳، -۲)

میں سے گذرتا ہے ۔

خطوں (لا - ما - ۱) (لا + ۴ ما + ۱) = ۰ اور ما (۲ لا + ما - ۵) = ۰ کے زوج پہلے چار نقطوں میں سے گذرتے ہیں اور اس لیے مخروطی

(لا - ما - ۱) (لا + ۴ ما + ۱) - ل ما (۲ لا + ما - ۵) = ۰

بھی ان چار نقطوں میں سے گذرتا ہے ۔ نقطہ (۳، -۲) اس مخروطی پر ہوگا اگر ل = -۸، اس لیے مطلوبہ مساوات

لاَ + ۱۹ لا ا + ۴ ماَ - ۵۴ ما - ۱ = ۰ ہے ۔

مثال ۲ ۔ چار ثابت نقطوں میں سے گذرنے والے مخروطی کی عام مساوات معلوم کرنا ۔

ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط کو محور لا اور دوسرے دو نقطوں کو ملانیوالے خط کو محور ما قرار دو اور فرض کرو کہ وہ خطوط جن کی مساواتیں ا لا + ب ما - ۱ = ۰ اور اَ لا + بَ ما - ۱ = ۰ ہیں محوروں کو دئے ہوئے نقطوں پر قطع کرتے ہیں ۔

اب لا ما = ۰ اور (ا لا + ب ما - ۱) (اَ لا + بَ ما - ۱) = ۰ دو مخروطی

ہیں جو دئے ہوئے چار نقطوں میں سے گذرتے ہیں اور اس لیے وہ تمام مخروطی جو ان چار نقطوں میں سے گذرتے ہیں مساوات

۱۲۹۲۱

$$ل\,لا\,ما + (د\,لا + ب\,ما - ۱)(دَ\,لا + بَ\,ما - ۱) = ۰ \quad \ldots (۱)$$

یا

$$د\,دَ\,لا^۲ + (ب\,دَ + د\,بَ + ل)\,لا\,ما + ب\,بَ\,ما^۲$$

$$-\ (د + دَ)\,لا - (ب + بَ)\,ما + ۱ = ۰ \quad \ldots (۲)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۰۹ — دفعہ ۲۰۸ کی مساوات (۲) مکافی کو تعبیر کرے گی اگر درجہ دوم کی رقمیں ایک کامل مربع ہوں یعنے اگر

$$۴\,د\,دَ\,ب\,بَ = (ب\,دَ + د\,بَ + ل)^۲$$

اِس مساوات کی دو اصلیں ہیں اور اس لئے دو مکافی چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذریں گے۔ یہ مکافی حقیقی ہوں گے اگر مساوات کی اصلیں حقیقی ہوں اور یہ اسوقت ہوگا جبکہ $د\,دَ \times ب\,بَ$ مثبت ہو۔ یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر $د\,دَ\,ب\,بَ$ منفی ہو تو ذو اربعۃ الاضلاع متداخلہ ہوگا۔ اِس صورت میں مکافی خیالی ہوتے ہیں جیساکہ ہندسی طور پر واضح ہے۔

جب مساوات (۲) دفعہ ۲۰۸ کی درجہ دوم کی رقمیں ایک کامل مربع ہوں تو یہ مربع $(\sqrt{د\,دَ}\,لا + \sqrt{ب\,بَ}\,ما)^۲$ ہونا چاہئے۔ پس [دفعہ ۱۷۲] مذکورۂ بالا دو مکافیوں کے محاور اُن خطوں کے متوازی ہیں جن کی مساواتیں

$$\sqrt{د\,دَ}\,لا \pm \sqrt{ب\,بَ}\,ما = ۰ \quad یا \quad د\,دَ\,لا^۲ - ب\,بَ\,ما^۲ = ۰$$ ہیں۔

یہ دو خطوطِ مستقیم دئے ہوئے چار نقطوں میں سے گذرنے والے کسی مخروطی کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں [دفعہ ۱۸۴]

پس وہ تمام مخروطی جو مفروضہ چار نقطوں میں سے گذرتے ہیں مزدوج قطروں کا ایک زوج رکھتے ہیں جو اِن نقطوں میں سے

گذرنے والے دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں۔

۲۱۰ ــ اُن مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرنا جو چار ثابت نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

اِس نظام کے کسی مخروطی کی مساوات حسب دفعہ ۲۰۸

ل لا ما + (ا لا + ب ما − ۱)(اَ لا + بَ ما − ۱) = ۰

ہے۔ اِس مخروطی کے مرکز کے محدد مساواتوں

ل ما + ا (اَ لا + بَ ما − ۱) + اَ (ا لا + ب ما − ۱) = ۰

اور ل لا + ب (اَ لا + بَ ما − ۱) + بَ (ا لا + ب ما − ۱) = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں۔

(۲۹۳) اِن مساواتوں کو علی الترتیب لا اور ما سے ضرب دو اور تفریق کرو تو ل کی تمام قیمتوں کے لیے حاصل ہوگا

(ا لا − ب ما)(اَ لا + بَ ما − ۱) + (اَ لا − بَ ما)(ا لا + ب ما − ۱) = ۰

یا ۲ ا اَ لا^{2} − ۲ ب بَ ما^{2} − (ا + اَ) لا + (ب + بَ) ما = ۰

اِس لیے مرکز کا طریق ایک مخروطی ہے جس کے متقارب خطوط ا اَ لا^{2} − ب بَ ما^{2} = ۰ کے متوازی ہیں یعنے اُن دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہیں جو چار نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔ [یہ دو مکافی نظام کے مخروطی ہیں اور اِس لیے اِن کے مرکز مرکزوں کے طریق پر لاتناہی پر کے نقطے ہیں]۔

ثبوت دیگر ــ اگر فہ$_{1}$ = ۰ اور فہ$_{2}$ = ۰ کوئی دو مخروطی ہوں جو چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرتے ہیں تو اِن چار نقطوں میں سے گذرنے والا کوئی اور مخروطی مساوات

ل$_{1}$ فہ$_{1}$ + ل$_{2}$ فہ$_{2}$ = ۰

سے حاصل ہوتا ہے۔ پس مرکز مساواتوں

ل$_{1}$ (فر فہ$_{1}$ / فر لا) + ل$_{2}$ (فر فہ$_{2}$ / فر لا) = ۰

اور $لہ_۱ \frac{فرفہ_۱}{فرلا} + لہ_۲ \frac{فرفہ_۲}{فرلا} = ۰$

سے حاصل ہوگا - اس لیے مرکزوں کا طریق مخروطی

$$\frac{فرفہ_۱}{فرلا} \frac{فرفہ_۲}{فرما} - \frac{فرفہ_۱}{فرما} \frac{فرفہ_۲}{فرلا} = ۰$$

ہے -

۴۱۱ - دفعہ ۴۱۰ میں حاصل شدہ مرکزوں کا طریق مبدا میں سے گذرتا ہے یعنے دئے ہوئے چار نقطوں میں سے دو کو ملانے والے خط اور دیگر دو کو ملانے والے خط کے نقطۂ تقاطع میں سے - پس تشاکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس طریق کو اِن چار نقطوں میں سے گذرنے والے دو دو خطوں کے دیگر زوجوں کے نقاطِ تقاطع میں سے بھی گذرنا چاہئیے - [یہ فوراً معلوم کیا جا سکتا تھا کیونکہ خطوں کا زوج نظام کے مخروطی ہیں اور اِن کے تقاطع اِن مخروطیوں کے مراکز ہیں اور اِس لیے یہ نقاطِ تقاطع مرکزوں کے طریق پر واقع ہیں] -

مرکز طریق محور لا کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں لا = ۰ اور جہاں $لا = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ا'}\right)$ -

اس لیے طریق نقطوں $(\frac{۱}{ا}، ۰)$ اور $(\frac{۱}{ا'}، ۰)$ کے درمیان وسط میں سے گذرتا ہے یعنے اُس خط کے نقطۂ وسطی میں سے جو اِن دو ثابت نقطوں کو ملاتا ہے - اسی طرح یہ طریق اُس خط کے نقطۂ وسطی میں سے بھی گذرتا ہے جو چار نقطوں میں سے کسی اور دو کو ملاتا ہے -

پس اگر ا، ب، ج، د کوئی چار نقطے ہوں تو ا ب اور ج د، ا ج اور ب د، اور ا د اور ب ج کے تین نقاطِ تقاطع اور خطوط ا ب، ب ج، ج ا، ا د، ب د، اور ج د کے نقاط وسطی سب کے سب ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں (اس مخروطی کو ا ب ج د کا نو نقطی مخروطی کہہ سکتے ہیں) اور یہ مخروطی اُن مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق (۴۹۰)

جو چار نقطوں ا ، ب ، ج ، د میں سے گذرتے ہیں ۔

ا ، ب ، ج ، د کے نو نقطی مخروطی کا مرکز

$$\text{۴لا} = \frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{اَ}} \text{ ، } \text{۴ما} = \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{بَ}}$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اس لیے وہ چار نقطوں ا ، ب ، ج ، د کا مرکز ہندسی ہے ۔

۲۱۲ ۔۔ اگر ا اَ اور ب بَ کی علامتیں ایک ہی ہوں تو ہم دفعہ ۲۱۰ سے یہ دیکھتے ہیں کہ مرکزوں کا طریق ایک زائد ہے ۔ اگر ا اَ اور ب بَ کی علامتیں مختلف ہوں تو مرکزوں کا طریق ایک ناقص ہے ۔ اگر ا اَ = ب بَ یعنے اگر چار نقطے ایک دائرہ پر ہوں تو مرکزوں کا طریق ایک قائم زائد ہے ۔ اگر ا اَ = ۔ ب بَ اور محاور علی القوائم ہوں تو نظام کے تمام مخروطی قائم زائد ہیں اور مرکزوں کا طریق ایک دائرہ ہے ۔ اس صورت میں چار نقطوں میں سے کسی دو کو ملانے والا خط اس خط پر عمود ہوتا ہے جو دوسرے دو نقطوں کو ملاتا ہے ، اس لیے د ، مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی ہے ۔

پس ایک دائرہ مثلث ا ب ج کے عمودوں کے پائینوں میں سے اور ا ب ، ب ج ، ج ا ، ا د ، ب د ، ج د کے نقاط وسطی میں سے گذرے گا جہاں د ، مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی ہے ۔ یہ دائرہ ان تمام مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق ہے (جو سب کے سب قائم زائد ہیں) جو ا ، ب ، ج ، د میں سے گذرتے ہیں ۔ اس دائرہ کو نو نقطی دائرہ کہتے ہیں ۔

۲۱۳ ۔۔ دفعہ ۲۰۸ میں جن چار نقطوں کی تعریف کی گئی ہے ان میں سے گذرنے والے کسی مخروطی کے متقارب خطوط

$$\text{ل لا ما} + (\text{ا لا} + \text{ب ما})(\text{اَ لا} + \text{بَ ما}) = 0$$

یا

$$\text{ا اَ لا}^2 + (\text{ل} + \text{ا بَ} + \text{اَ ب})\text{ لا ما} + \text{ب بَ ما}^2 = 0$$

کے متوازی ہوتے ہیں لیکن یہ خطوط (دفعہ ۱۸۴) مرکزوں کے طریق کے مزدوج قطروں کے متوازی ہیں ۔ اس لیے چار نقطوں میں سے گذرنے والے کسی مخروطی کے متقارب مرکزوں کے طریق کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں چنانچہ

(۲۹۵)

اُس قائم زائد کے متقارب جو چار نقطوں میں سے گذرتا ہے مرکزوں کے
طریق کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں۔

مثال ۱ — چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرنے والے مخروطیوں کے
ایک نظام کے لحاظ سے ایک ثابت نقطہ کا قطبی ایک ثابت نقطہ میں سے گذریگا۔

ثابت نقطہ کو مبداء قرار دو اور فرض کرو کہ مخروطیوں میں سے دو

س ≡ و لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

اور س' ≡ و' لا^۲ + ۲ ھ' لا ما + ب' ما^۲ + ۲ گ' لا + ۲ ف' ما + ج' = ۰

ہیں۔ تب اس نظام کا کوئی مخروطی س − ل س' = ۰ سے حاصل ہوتا ہے۔
مبداء کا قطبی

گ لا + ف ما + ج − ل (گ' لا + ف' ما + ج') = ۰

ہے اور یہ، ل کی تمام قیمتوں کے لیے، خطوط

گ لا + ف ما + ج = ۰ اور گ' لا + ف' ما + ج' = ۰

کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

مثال ۲ — چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرنے والے مخروطیوں کے
نظام کے لحاظ سے کسی دئے ہوئے خطِ مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔

ثابت خطِ مستقیم کو محور لا قرار دو اور فرض کرو کہ ایک مخروطی کی مساوات
مثال ۱ کے نمونہ کی ہے۔ (لا'، ما') کا قطبی

لا(و لا' + ھ ما' + گ) + ما(ھ لا' + ب ما' + ف) + گ لا' + ف ما' + ج

− ل {لا(و' لا' + ھ' ما' + گ') + ما(ھ' لا' + ب' ما' + ف') + گ' لا' + ف' ما' + ج'} = ۰

ہے۔ اگر یہ وہی خط ہے جو ما = ۰ ہے تو لا کا سر اور مستقل رقم صفر ہونی چاہئے۔ اِنکو
صفر کے مساوی رکھو اور ل کو ساقط کرو۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ کسی مخروطی کے لحاظ سے جو ایک دئے ہوئے مربع کے
راسوں میں سے گذرتا ہے ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے قطب کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

[ان خطوط کو محاور قرار دو جو مربع کے مرکز میں سے گذریں اور اضلاع کے متوازی ہوں ۔ تب مخروطی مساوات $لا^2 - ل^2 - لہ (ما^2 - ل^2) = ۰$ سے حاصل ہونگے]

مثال ۴ ۔ دئے ہوئے چار نقطوں سے جو چار مثلث حاصل ہوں ان کے نو نقطی دائرے ایک نقطہ پر ملتے ہیں ۔

یہ نقطہ اس قائم زائد کا مرکز ہے جو چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرتا ہے ۔ یہ دفعہ ۱۸۷ مثال ۱ اور دفعہ ۲۱۲ سے ماخوذ ہوتا ہے ۔

مثال ۵ ۔ چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرنے والے مخروطی کسی خط مستقیم سے درپیچ میں منقطع ہوتے ہیں ۔

فرض کرو کہ دیا ہوا خط مستقیم $ما = ۰$ ہے ۔ یہ خط $فہ_1 = ۰$، $فہ_2 = ۰$، اور $فہ_1 + لہ فہ_2 = ۰$ کو ان نقطوں پر قطع کرتا ہے جو مساواتوں

$$ل_1 لا^2 + ۲ گ_1 لا + ج_1 = ۰ ، ل_2 لا^2 + ۲ گ_2 لا + ج_2 = ۰$$

اور $$(ل_1 + لہ ل_2) لا^2 + ۲ (گ_1 + لہ گ_2) لا + ج_1 + لہ ج_2 = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں ۔ نتیجہ دفعہ ۶۳ سے ماخوذ ہوتا ہے ۔

۲۱۴ ۔ اگر چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرنے والے خطوط مستقیم کے ایک زوج کی مساواتیں $عہ = ۰$ اور $بہ = ۰$ ہوں اور دوسرے زوج کی مساواتیں $جہ = ۰$ اور $ضہ = ۰$ ہوں تو ان چار نقطوں میں سے گذرنیوالے کسی مخروطی کی مساوات شکل (۲۹۶)

$$عہ بہ = ک جہ ضہ$$

ہوگی ۔

اب اگر $عہ = ۰$ ایک خط مستقیم کی مساوات ہو اور کسی نقطہ کے محددوں کو عہ میں درج کیا جائے تو نتیجہ اس عمودی فاصلہ کے متناسب ہوگا جو نقطہ کا خط سے ہے ۔ پس اوپر کی مساوات کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ

$$ع_1 ع_2 \propto ع_3 ع_4$$

جہاں $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$، $ع_4$ وہ عمود ہیں جو چار خطوں $عہ = ۰$، $بہ = ۰$، $جہ = ۰$، $ضہ = ۰$

پر مخروطی کے کسی نقطہ سے کھینچے گئے ہیں۔

۲۱۵۔ اگر ایک مخروطی پر چار نقطے ف، ق، ر، س ہوں اور ق ف، ر س نقطہ ا پر، ق س، ف ر نقطہ ب پر، اور ف س، ق ر نقطہ ج پر ملیں تو تین نقطوں ا، ب، ج میں سے ہر ایک، مخروطی کے لحاظ سے، اُس خط کا قطب ہوگا جو دوسرے دو نقطوں کو ملاتا ہے۔

ا کو مبدا، اور خطوط ا س ر، ا ف ق کو علی الترتیب محور لا اور محور ما قرار دو۔

فرض کرو کہ ف س اور ق ر کی مساواتیں

ل لا + ب ما − ۱ = ۰، .... (۱)

اور ل َ لا + بَ ما − ۱ = ۰، .... (۲)

ہیں۔ تب ف ر اور ق س کی مساواتیں

لَ لا + ب ما − ۱ = ۰، .... (۳)

ل لا + بَ ما − ۱ = ۰، .... (۴)

ہوں گی۔

مخروطیوں لا ما = ۰ اور (ل لا + ب ما − ۱) (لَ لا + بَ ما − ۱) = ۰ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے کسی مخروطی کی مساوات

ك لا ما + (ل لا + ب ما − ۱) (لَ لا + بَ ما − ۱) = ۰

ہے۔ اس مخروطی کے مبدا کا قطبی [دفعہ ۱۸۰]

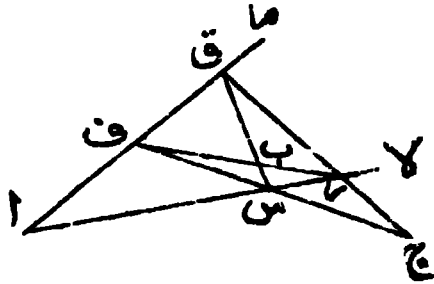
(ل + لَ) لا + (ب + بَ) ما − ۲ = ۰

ہے۔ اس کو شکلوں

ل لا + ب ما − ۱ + لَ لا + بَ ما − ۱ = ۰

اور $\bar{a}$ لا + ب ما - ۱ + $\bar{a}$ لا + $\bar{b}$ ما - ۱ = ۰

بیں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مبدا ر کا قطبی خطوط (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع اور نیز خطوط (۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ اِس لیے مخروطی کے لحاظ سے ا کا قطبی خط ب ج ہے۔

اِسی طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ج ا، ب کا قطبی ہے، اور ا ب، ج کا قطبی ہے۔

خود مزدوج یا خود قطبی مثلث وہ مثلث ہوتا ہے جس کا ہر راس، ایک مخروطی کے لحاظ سے، متقابل کے ضلع کا قطب ہوتا ہے۔

۲۱۶ — اگر ایک مخروطی ایک ذواربعتہ الاضلاع کے ضلعوں کو مس کرے اور ا ب ج وہ مثلث ہو جو ذواربعتہ الاضلاع کے وتروں سے بنتا ہے تو ا ب ج، مخروطی کے لحاظ سے، خود مزدوج مثلث ہوگا۔

فرض کرو کہ ف، ق، ر، س، نقاط تماس ہیں۔

تب شکل میں ال ف ق کا قطب ہے اور ن س ر کا قطب ہے۔
اس لیے ل ن ف ق اور س ر کے نقطۂ تقاطع کا قطبی ہے۔ اسی طرح
ک م س ف اور ر ق کے نقطۂ تقاطع کا قطبی ہے۔
پس ا جو ل ن اور ک م کا نقطۂ تقاطع ہے اُس خط کا قطب ہے جو
ف ق، س ر کے نقطۂ تقاطع اور س ف، ر ق کے نقطۂ تقاطع کو ملاتا ہے۔

لیکن (دفعہ ۲۱۵) ف ر اور س ق کا نقطۂ تقاطع اس آخری خط کا قطب ہے
اس لیے ا ف ر اور س ق کا نقطۂ تقاطع ہے۔
اسی طرح ب، س ف اور ر ق کا بھی نقطۂ تقاطع ہے اور ج ف ق اور س ر کا بھی نقطۂ تقاطع ہے۔
پس دفعہ ۲۱۵ کی رُو سے مثلث ا ب ج خود قطبی ہے [نیز دیکھو دفعہ ۲۸۶]

۲۱۷ ـــ اُس مخروطی کی عام مساوات معلوم کرنا جو محددوں کے محوروں کو مس کرے

اگر نقاطِ تماس کو ملانے والے خط کی مساوات
ا لا + ب ما - ا = ۰ ہو تو اُس مخروطی کی مساوات جو مخروطی لا ما = ۰ کے ساتھ ان نقطوں پر
دوہرا تماس رکھے جہاں خط ا لا + ب ما - ا = ۰ اِس سے ملتا ہے بموجب دفعہ ۱۸۷

$$(ا لا + ب ما - ا)^2 - ۲ لہ لا ما = ۰$$

ہے۔

۲۱۸ ـــ اُس مخروطی کی عام مساوات معلوم کرنا جو چار دئے ہوئے خطوں کو مس کرے۔

ان میں سے دو خطوطِ مستقیم کو محاور قرار دو اور فرض کرو کہ دوسرے دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

ل لا + م ما - ۱ = ۰ اور لَ لا + مَ ما - ۱ = ۰

ہیں۔ محوروں کو مس کرنے والے کسی مخروطی کی مساوات

(ا لا + ب ما - ۱)^۲ - ۲ لہ لا ما = ۰، .... (۱)

ہے۔

وہ خطوط جو مبدا، کو اُن نقطوں سے ملاتے ہیں جہاں (۱)، ل لا + م ما = ۰ کو قطع کرتا ہے مساوات

(ا لا + ب ما - ل لا - م ما)^۲ = ۲ لہ لا ما، .... (۲)

سے حاصل ہوتے ہیں۔

خط مخروطی کو مس کریگا اگر خطوط (۲) منطبق ہوں جس کے لیے شرط

(ا - ل)^۲ (ب - م)^۲ = {(ا - ل)(ب - م) - لہ}^۲

ہے۔ اس لیے لہ = ۲ (ا - ل)(ب - م)

پس چار خطوطِ مستقیم

لا = ۰، ما = ۰، ل لا + م ما - ۱ = ۰، اور لَ لا + مَ ما - ۱ = ۰

کو مس کرنے والے مخروطی کی عام مساوات

(ا لا + ب ما - ۱)^۲ = ۲ لہ لا ما

ہے جہاں مبدلوں ا، ب، لہ میں ربط

لہ = ۲ (ا - ل)(ب - م) = ۲ (ا - لَ)(ب - مَ)

ہیں۔

(۴۹۹)

۲۱۹ ـــ اُن مخروطیوں کے مرکزوں کا محل معلوم کرنا جو چار دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کریں۔

اگر دئے ہوئے خطوں میں سے دو کو محاور قرار دیا جائے اور دیگر دو کی

مساواتیں

ل لا + م ما − ۱ = ۰ اور لَ لا + مَ ما − ۱ = ۰

ہوں تو مخروطی کی مساوات

(ا لا + ب ما − ۱)^۲ − ۲ لہ لا ما = ۰

ہوگی بشرطیکہ

لہ = ۲ (ا − ل) (ب − م)، .... (۱)

لہ = ۲ (ا − لَ) (ب − مَ)، .... (۲)

مخروطی کا مرکز مساواتوں

ا (ا لا + ب ما − ۱) − لہ ما = ۰ اور ب (ا لا + ب ما − ۱) − لہ لا = ۰

سے حاصل ہوتا ہے ۔ اِس لیے

ا لا = ب ما، اور ا (۲ ا لا − ۱) = لہ ما، ...... (۳)

مطلوبہ طریق معلوم کرنے کے لیے مساواتوں (۱)، (۲)، اور (۳) سے ا، ب، اور لہ کو ساقط کرنا چاہیے ۔

(۱) اور (۳) سے

ا (۲ ا لا − ۱) = ۲ ما (ا − ل) (ب − م) = ۲ (ا − ل) (ب ما − م ما)،

اِس لیے

ا (۲ ل لا + ۲ م ما − ۱) = ۲ ل م ما

کیونکہ ا لا = ب ما ۔

اسی طرح (۲) اور (۳) سے

ا (۲ لَ لا + ۲ مَ ما − ۱) = ۲ لَ مَ ما

ا کو ساقط کرنے پر مرکزوں کے طریق کی مساوات

$$\frac{\text{۲ ل لا + ۲ م ما − ۱}}{\text{ل م}} = \frac{\text{۲ لَ لا + ۲ مَ ما − ۱}}{\text{لَ مَ}} \qquad (۳۰۰)$$

حاصل ہوتی ہے ۔

پس مطلوبہ طریق وہ خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات

$$\text{لا}^2\left(\frac{1}{\text{م}}-\frac{1}{\text{م}'}\right)+2\text{ما}\left(\frac{1}{\text{ل}}-\frac{1}{\text{ل}'}\right)-\frac{1}{\text{ل م}}+\frac{1}{\text{ل}'\text{م}'}=0$$

ہے۔

آسانی کے ساتھ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ خطِ مستقیم ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے، صریحاً یہ درست ہے کیونکہ کوئی بتیرا چار خطوط کو مس کرنے والے ایک بہت ہی پتلے ناقص کی انتہائی شکل ہے اور اس ناقص کا مرکز انتہا میں وتر کا نقطۂ وسطی ہے۔ پس ذو اربعۃ اضلاع کے تین وتروں کے نقاط وسطی اُن مخروطیوں کے مرکزوں کے طریق پر واقع ہوتے ہیں جو ذو اربعۃ الاضلاع کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔

[دیکھو دفعات ۲۴۴، ۲۸۶]

۲۲۰ ـــ وہ تمام مخروطی جو محوروں کو اُن نقطوں پر مس کرتے ہیں جہاں خط ا لا + ب ما - ۱ = ۰ محوروں کو قطع کرتا ہے مساوات

$$(\text{ا لا}+\text{ب ما}-1)^2=2\,\text{لہ لا ما}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ مخروطی مکافی ہوگا اگر لہ ایسا ہو کہ درجہ دوم کی رقمیں ایک کامل مربع بنائیں، اس کے لیے شرط

$$\text{ا}^2\text{ب}^2=(\text{ا ب}-\text{لہ})^2$$

ہے۔

$$\therefore\quad \text{لہ}=0\quad\text{یا}\quad \text{لہ}=2\,\text{ا ب}$$

قیمت لہ = ۰ سے منطبق خطوطِ مستقیم کا ایک زوج (ا لا + ب ما - ۱)^2 = ۰ حاصل ہوتا ہے۔

پس مکافی کے لیے لہ = ۲ ا ب چنانچہ منحنی کی مساوات

$$(\text{ا لا}+\text{ب ما}-1)^2=4\,\text{ا ب لا ما}$$

حاصل ہوتی ہے جس کو شکل

$$\sqrt{\text{ا لا}}+\sqrt{\text{ب ما}}=1$$

یوں لکھا جا سکتا ہے۔

۲۲۱ — مکافی $\sqrt{\text{ا لا}} + \sqrt{\text{ب ما}} = 1$ کے کسی نقطہ پر مماس کی مساوات معلوم کرنا۔ (۳۰۱)

ہم منحنی کی مساوات کو منطق بنا سکتے ہیں اور اس کے بعد دفعہ ۸۷ میں حاصل شدہ ضابطہ کا استعمال کر سکتے ہیں۔ لیکن نتیجہ کو سادہ تر شکل میں حسب ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے:

منحنی پر کے دو نقطوں (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\text{لاً} - \text{لاَ}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{\text{ماً} - \text{ماَ}} \text{،} \quad \ldots\ldots (1)$$

ہے مع شرائط $\sqrt{\text{ا لاَ}} + \sqrt{\text{ب ماَ}} = 1$ اور $\sqrt{\text{ا لاً}} + \sqrt{\text{ب ماً}} = 1$ کے ... (۲)

ان شرطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{\text{ا}}\left(\sqrt{\text{لاَ}} - \sqrt{\text{لاً}}\right) = -\sqrt{\text{ب}}\left(\sqrt{\text{ماَ}} - \sqrt{\text{ماً}}\right) \text{،} \quad \ldots\ldots (3)$$

(۱) اور (۳) کی متناظر طرفوں کو ضرب دو تو

$$\frac{\sqrt{\text{ا}}}{\sqrt{\text{لاَ}} + \sqrt{\text{لاً}}}(\text{لا} - \text{لاَ}) = -\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ماَ}} + \sqrt{\text{ماً}}}(\text{ما} - \text{ماَ})$$

اِس لیے (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\sqrt{\text{ا}}}{\sqrt{\text{لاَ}}}(\text{لا} - \text{لاَ}) + \frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ماَ}}}(\text{ما} - \text{ماَ}) = 0$$

لیکن چونکہ $\sqrt{\text{ا لاَ}} + \sqrt{\text{ب ماَ}} = 1$ اِس لیے مماس کی مساوات

$$\text{لا}\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{لاَ}}} + \text{ما}\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{ماَ}}} = ۱$$

ہے۔ مخروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کی مساوات معلوم کرنا ہو تو مکافی کی مساوات کی منطق شکل استعمال کرنی چاہیئے۔

مثال ۱ــ وہ شرط معلوم کرنا کہ خط ل لا + م ما - ۱ = ۰ مکافی $\sqrt{\text{ا لا}} + \sqrt{\text{ب ما}} = ۱$ کو مس کرے۔

کسی نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات

$$\text{لا}\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{لاَ}}} + \text{ما}\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{ماَ}}} = ۱$$

(۳۰۲) ہے۔ یہ مساوات خط کی مساوات کے مماثل ہوگی اگر ل = $\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{لاَ}}}$ اور م = $\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{ماَ}}}$

یا اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ل}} = \sqrt{\text{ا لاَ}}$ اور $\frac{\text{ب}}{\text{م}} = \sqrt{\text{ب ماَ}}$ ۔

پس مطلوبہ شرط

$$\frac{\text{ا}}{\text{ل}} + \frac{\text{ب}}{\text{م}} = ۱$$

ہے۔

مثال ۲ــ مکافی $\sqrt{\text{ا لا}} + \sqrt{\text{ب ما}} = ۱$ کا ماسکہ معلوم کرنا۔

وہ دائرہ جو ت ق کو ت پر مس کرتا ہے اور جو ف میں سے گذرتا ہے ماسکہ میں سے [دیکھو دفعہ ۱۶۵ (۴)، دو مماس منطبق ہوتے ہیں] بھی گذرتا ہے۔

یہ دو نقطے ف اور ق، $(\frac{۱}{\text{ا}}، ۰)$ اور $(۰، \frac{۱}{\text{ب}})$ ہیں۔ اس لیے ماسکہ ان دونوں دائروں پر ہے جن کی مساواتیں

$$لا^{۲} + ۲\, لا\, ما\, جم\, سہ + ما^{۲} - \frac{لا}{ا} = ۰$$

اور

$$لا^{۲} + ۲\, لا\, ما\, جم\, سہ + ما^{۲} - \frac{ما}{ب} = ۰$$

ہیں۔ پس ماسکہ مساوات

$$لا^{۲} + ما^{۲} + ۲\, لا\, ما\, جم\, سہ = \frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب} = \frac{۱}{ا^{۲} + ب^{۲} + ۲\, ا\, ب\, جم\, سہ}$$

مثال ۳۔ مکافی $\sqrt{ا\, لا} + \sqrt{ب\, ما} = ۱$ کا مرتب معلوم کرنا۔

مرتب علی القوائم ماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ہے۔ اب خط $ل\, لا + م\, ما = ۱$، $ما = ۰$ پر عمود ہوگا اگر $م - ل\, جم\, سہ = ۰$، اور خط مکافی کو مس کرے گا اگر $\frac{ا}{ل} + \frac{ب}{م} = ۱$۔ پس محور لا پر کا وہ مقطوعہ جو ماس سے جو محور لا پر عمود ہے منقطع ہوتا ہے $\frac{۱}{ل}\left(ا + \frac{ب}{جم\, سہ}\right) = ۱$ سے حاصل ہوتا ہے۔

پس نقطہ $\left(\frac{جم\, سہ}{ب + ا\, جم\, سہ}، ۰\right)$ مرتب پر ہے۔

اسی طرح نقطہ $\left(۰، \frac{جم\, سہ}{ا + ب\, جم\, سہ}\right)$ بھی مرتب پر ہے۔

اسلیے مطلوبہ مساوات $لا(ب + ا\, جم\, سہ) + ما(ا + ب\, جم\, سہ) = جم\, سہ$ ہے۔

(۳۰۲) **مثال ۴۔ مکافی $\sqrt{ا\, لا} + \sqrt{ب\, ما} = ۱$ کا محور معلوم کرنا۔**

چونکہ (ا لا + ب ما − ا)^۲ − ۴ ا ب لا ما = ۰

∴ (ا لا − ب ما + ل)^۲ = ۲ ا لا (ا + ل) + ۲ ب ما (ا − ل) + ل^۲ − ا

اب خطوط ا لا − ب ما = ۰ اور ا لا (ا + ل) + ب ما (ا − ل) = ۰ علی القوائم ہیں [دفعہ ۴۲] اگر

ا^۲ − ب^۲ + ل (ا^۲ + ب^۲ + ۲ ا ب جم سہ) = ۰

پس محور کی مساوات

ا لا − ب ما = (ا^۲ − ب^۲) (ا^۲ + ب^۲ + ۲ ا ب جم سہ)

ہے۔

[راس پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا} + \text{ب جم سہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب} + \text{ا جم سہ}} = \frac{۱}{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ + ۲\,\text{ا ب جم سہ}}$$

حاصل ہوگی]۔

ہم ماسکی مخروطی

۲۲۲ — چونکہ کسی مخروطی کے ماسکے اس کے محور پر ہوتے ہیں اس لیے اگر دو مخروطی ہم ماسکی ہوں تو ان کے محاور ایک ہی ہونے چاہئیں۔ مساوات

$$\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲ + \text{ل}} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲ + \text{ل}} = ۱$$

ل کی مختلف قیمتوں کے لیے ہم ماسکی نظام کے مختلف مخروطیوں کو تعبیر کریگی کیونکہ مرکز سے ماسکہ کا فاصلہ

$$\left\{(\text{ا}^۲ + \text{ل}) - (\text{ب}^۲ + \text{ل})\right\}^{\frac{۱}{۲}} \text{ یا } \sqrt{\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲}$$

ہے۔

۲۲۳ — ہم ماسکی مخروطیوں کے نظام کی مساوات

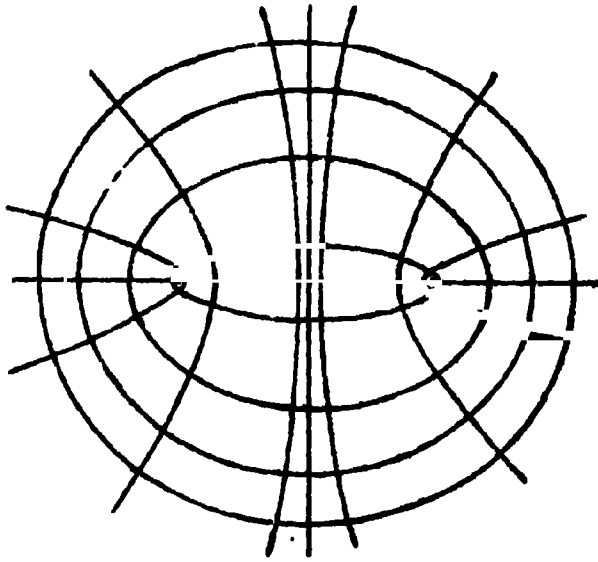
$$\frac{لا^2}{ا^2 + ل} + \frac{ما^2}{ب^2 + ل} = ۱$$

ہے —

اگر ل مثبت ہو تو منحنی ایک ناقص ہے -

منحنی کے صدر محور بڑھینگے جبکہ ل بڑھے، اور ان کی نسبت ایک سے قریب اور قریب تر ہوتی جائے گی جیسے ل زیادہ اور زیادہ تر بڑھے گا چنانچہ انتہا میں ایک ہم ماسکی ناقص لا متناہی نصف قطر کا ایک دائرہ ہوگا -

اگر ل منفی ہے تو صدر محور گھٹینگے جبکہ ل بڑھے اور نسبت $\frac{ب^2 + ل}{ا^2 + ل}$ بھی گھٹیگی جیسے ل بڑھے گا اور اس لیے ناقص چپٹا اور زیادہ چپٹا ہوتا جائے گا حتی کہ ل، - ب^2 کے مساوی ہو جائے اور اس انتہائی صورت میں محور اصغر (۳۰۲) معدوم ہوگا اور محور اعظم ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے مساوی ہوگا -

پس ماسکوں کو ملانیوالا خطی ناقص ہم ماسکی مخروطیوں کی ایک انتہائی شکل ہے -

اگر $\text{ب}^2 + \text{لہ}$ منفی ہو تو منحنی ایک زائد ہے۔

اگر $\text{ب}^2 + \text{لہ}$ ایک چھوٹی منفی مقدار ہو تو زائد کا قاطع محور ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے تقریباً مساوی ہے چنانچہ اس خط کا تکملہ (Complement) جو ماسکوں کو ملاتا ہے زائد کی ایک انتہائی شکل ہے۔

زائد کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ کبیر اور کبیرتر ہوتا جائے گا جیسے ۔لہ کبیر اور کبیرتر ہوگا، اور انتہا میں منحنی کی دونوں شاخیں محور ما پر منطبق ہوں گی۔

اگر لہ منفی ہو اور ا^2 سے عدداً بڑا ہو تو منحنی خیالی ہوگا۔

(۲۰۵) **۴۲۴** — ہم ماسکی نظام کے دو مخروطی کسی دئے ہوئے نقطہ میں سے گذرتے ہیں ثابت کرو کہ ان میں سے ایک مخروطی ناقص ہے اور دوسرا زائد۔

فرض کرو کہ ابتدائی مخروطی کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$$

ہے تو کسی ہم ماسکی مخروطی کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{(\text{ا}^2 + \text{لہ})} + \frac{\text{ما}^2}{(\text{ب}^2 + \text{لہ})} = 1$$

ہوگی۔ یہ دئے ہوئے نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرے گا اگر

$$\frac{\text{لاَ}^2}{\text{ا}^2 + \text{لہ}} + \frac{\text{ماَ}^2}{\text{ب}^2 + \text{لہ}} = 1$$

اس میں رکھو $\text{ب}^2 + \text{لہ} = \text{لَہ}$ تو

$$\text{لاَ}^2\,\text{لَہ} + \text{ماَ}^2(\text{لَہ} + \text{ا}^2\text{ز}^2) - \text{لَہ}(\text{لَہ} + \text{ا}^2\text{ز}^2) = 0$$

یا

$$\text{لَہ}^2 - \text{لَہ}(\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 - \text{ا}^2\text{ز}^2) - \text{ا}^2\text{ز}^2\,\text{ماَ}^2 = 0$$

یہ مساوات لَہ میں دو درجی ہے اور اس کی دونوں اصلیں حقیقی ہیں اور مختلف العلامت ہیں۔ اس لیے دو مخروطی ہیں جن میں سے ایک کے لیے $\text{ب}^2 + \text{لہ}$ مثبت ہے اور دوسرے کے لیے منفی ہے، اس لیے ایک مخروطی

ناقص ہے اور دوسرا زائد۔

۲۲۵ — ہم ماسکی نظام کا ایک مخروطی اور صرف ایک مخروطی ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ دئے ہوئے خط کی مساوات

ل لا + م ما - ۱ = ۰

ہے۔ یہ خطِ مستقیم مخروطی

$$\frac{لا^2}{ا^2+لہ} + \frac{ما^2}{ب^2+لہ} = 1$$

کو مس کرے گا اگر

$$(ا^2+لہ)\,ل^2 + (ب^2+لہ)\,م^2 = 1 \quad [\text{دفعہ } 116]$$

جس سے لہ کی ایک اور صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ پس ایک ہم ماسکی مخروطی دئے ہوئے خط کو مس کرے گا۔

(۳۰۶) **۲۲۶ — دو ہم ماسکی مخروطی اپنے تمام مشترک نقطوں پر ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔**

فرض کرو کہ مخروطیوں کی مساواتیں

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1 \quad \text{اور} \quad \frac{لا^2}{ا^2+لہ} + \frac{ما^2}{ب^2+لہ} = 1$$

ہیں اور فرض کرو کہ (لاَ، ماَ) ایک مشترک نقطہ ہے۔ تب محدد لاَ، ماَ اور لہ کی دونوں مساواتوں کو پورا کریں گے۔ اِس لیے عمل تفریق سے

$$\frac{لاَ^2}{ا^2(ا^2+لہ)} + \frac{ماَ^2}{ب^2(ب^2+لہ)} = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

اب (لاَ، ماَ) پر کے مماسوں کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{\text{لالاَ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ماماَ}}{\text{ب}^2} = 1 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لالاَ}}{\text{ا}^2 + \text{لہ}} + \frac{\text{ماماَ}}{\text{ب}^2 + \text{لہ}} = 1$$

ہیں۔ پس شرط (۱) سے ظاہر ہے کہ یہ مماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں

۲۲۷ ـــ دو دئے ہوئے ہم ماسکی مخروطیوں کے کوئی دو متوازی مماس کھینچے گئے ہیں اور اِن مماسوں پر مرکز سے عمود نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔

فرض کرو کہ مخروطیوں کی مساواتیں

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{لہ}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2 + \text{لہ}} = 1$$

ہیں۔

فرض کرو کہ خطوط

$$\text{لا جم عہ} + \text{ما جب عہ} = \text{ع} \quad \text{اور} \quad \text{لا جم عہ} + \text{ما جب عہ} = \text{عَ}$$

علی الترتیب اِن مخروطیوں کو مس کرتے ہیں۔ تب [دفعہ ۱۱۶ نتیجہ صریح]

$$\text{ع}^2 = \text{ا}^2 \text{جم}^2 \text{عہ} + \text{ب}^2 \text{جب}^2 \text{عہ}$$

اور
$$\text{عَ}^2 = (\text{ا}^2 + \text{لہ}) \text{جم}^2 \text{عہ} + (\text{ب}^2 + \text{لہ}) \text{جب}^2 \text{عہ}$$

$$\therefore \quad \text{عَ}^2 - \text{ع}^2 = \text{لہ}$$

۲۲۸ ـــ اگر دو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ایک کا مماس دوسرے مخروطی کے ایک مماس پر عمود ہو تو اِن کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔ ۲۰۷

فرض کرو کہ ہم ماسکی مخروطیوں کی مساواتیں

$$\frac{لا^2}{ل^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1 \quad اور \quad \frac{لا^2}{ل^2 + لہ} + \frac{ما^2}{ب^2 + لہ} = 1$$

ہیں۔

وہ خطوط جن کی مساواتیں

$$لا جم عہ + ما جب عہ = \sqrt{ل^2 جم^2 عہ + ب^2 جب^2 عہ} \quad \ldots (1)$$

اور

$$لا جم عہ - ما جب عہ = \sqrt{(ل^2 + لہ) جب^2 عہ + (ب^2 + لہ) جم^2 عہ} \quad \ldots (2)$$

ہیں مخروطیوں کو مس کرتے ہیں اور ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

مساواتوں (۱) اور (۲) کی طرفین کا مربع لیکر جمع کرو تو مطلوبہ طریق کی مساوات

$$لا^2 + ما^2 = ل^2 + ب^2 + لہ$$

حاصل ہوگی۔

اگر ہم دوسرے ناقص کے محور اصغر کو لا انتہا چھوٹا فرض کریں تو اس کے تمام مماس ماسکہ کے بہت ہی قریب سے گذریں گے، اس لیے دفعہ ۱۲۶ (عا) اوپر کی مخصوص صورت ہے۔

مثال ۱ — کوئی دو مکافی جن کا ماسکہ مشترک اور محاور مخالف سمتوں میں ہوں علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔

مثال ۲ — دو مکافیوں میں ماسکہ مشترک ہے اور ان کے محاور ایک ہی خط مستقیم میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ت ف ایک مکافی کا مماس اور ت ق دوسرے مکافی کا مماس ہو اور ت ف، ت ق علی القوائم ہوں تو ت کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

مثال ۳ — دو ہم ماسکی مخروطیوں کا مرکز ج ہے، ان میں سے ایک کا مماس ت ق ہے اور دوسرے کا ت ف۔ ثابت کرو کہ اگر مماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو ج ت، ف ق کی تنصیف کرے گا۔

فرض کرو کہ مماس

$$\frac{لا لاَ}{اِ^2}+\frac{ما ماَ}{ب^2}=1 \quad \text{اور} \quad \frac{لا لاً}{اِ^2}+\frac{ما ماً}{ب^2}=1$$

ہیں تو ج ت کی مساوات

$$لا\left(\frac{لاَ}{اِ^2}-\frac{لاً}{اِ^2}\right)+ما\left(\frac{ماَ}{ب^2}-\frac{ماً}{ب^2}\right)=0$$

ہوگی۔ یہ خط، ف ق کے وسطی نقطہ میں سے گذرے گا اگر (۳۰۸)

$$(لاَ+لاً)\left(\frac{لاَ}{اِ^2}-\frac{لاً}{اِ^2}\right)+(ماَ+ماً)\left(\frac{ماَ}{ب^2}-\frac{ماً}{ب^2}\right)=0$$

یعنے اگر $لاَ لاً\left(\frac{1}{اِ^2}-\frac{1}{اِ^2}\right)+ماَ ماً\left(\frac{1}{ب^2}-\frac{1}{ب^2}\right)=0$

یا اگر

$$\frac{لاَ لاً}{اِ^2 اِ^2}+\frac{ماَ ماً}{ب^2 ب^2}=0$$

کیونکہ مخروطی ہم ماسکی ہیں۔ یعنے اگر مماس علی القوائم ہوں۔

مثال ۴ — دو سکافیوں میں ماسکہ مشترک ہے اور ان کے محاور ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں۔ ان میں سے ایک کا مماس ت ف اور دوسرے کا ت ق ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ت میں سے گذرنے والا وہ خط جو محور کے متوازی ہے ف ق کی تنصیف کرے تو مماس علی القوائم ہوں گے۔

مثال ۵ — دو ہم ماسکی مخروطیوں پر کے وہ نقطے جن کے خارج المرکز زاوئے ایک ہی ہوں نظیری نقطوں سے موسوم کئے جائیں تو ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص پر کوئی دو نقطے ف، ق ہوں اور اس کے ایک ہم ماسکی ناقص پر نظیری نقطے ف، ق ہوں تو ف ق = ق ف۔

۲۲۹ — ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے قطب کا طریق ایک خطِ مستقیم ہوتا ہے

فرض کرو کہ ہم ماسکیوں کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}+\text{له}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}+\text{له}}=\text{۱}\text{، } \ldots\ldots (\text{۱})$$

ہے اور دئے ہوئے خطِ مستقیم کی مساوات

$$\text{ل لا}+\text{م ما}=\text{۱}\text{، } \ldots\ldots (\text{۲})$$

ہے۔

نقطہ (لاَ، ماَ) کے قطبی کی مساوات بلحاظ (۱)

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^{2}+\text{له}}+\frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^{2}+\text{له}}=\text{۱}\text{، } \ldots\ldots (\text{۳})$$

ہے۔

اگر (۲) اور (۳) ایک ہی خطِ مستقیم کو تعبیر کریں تو

$$\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^{2}+\text{له}}=\text{ل}\text{، }\quad \frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^{2}+\text{له}}=\text{م}$$

حاصل ہونا چاہئے، اِس لیے

$$\frac{\text{لاَ}}{\text{ل}}-\text{ا}^{2}=\frac{\text{ماَ}}{\text{م}}-\text{ب}^{2}=\text{له}$$

(۳۰۹) پس قطبوں کا طریق وہ خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{ل}}-\frac{\text{ما}}{\text{م}}=\text{ا}^{2}-\text{ب}^{2}$$

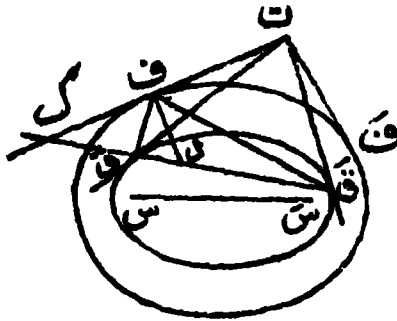
ہے۔

یہ خطِ مستقیم خط (۲) پر عمود ہے۔ نظام کا ایک ہم ماسکی مخروطی، خط (۲) کو مس کرے گا اور نقطہ تماس، اِس ہم ماسکی کے لحاظ سے خط کا قطب ہوگا۔

اِس لیے قطبوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو دئے ہوئے خط پر عمود ہے اور اُس نقطہ میں سے گذرتا ہے جہاں وہ ایک ہم ماسکی کو مس کرتا ہے۔

۲۳۰ ۔ کسی نقطہ ت سے ایک مخروطی کے دو مماس ت ف، ت فَ کھینچے گئے ہیں اور نیز ایک ہم ماسکی مخروطی کے دو مماس ت ق، ت قَ کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ خطوطِ مستقیم ق ف اور قَ ف، ف پر کے مماس سے مساوی زاوئے بنائیں گے۔

فرض کرو کہ ت ف اور ف پر کا عماد، ق قَ کو علی الترتیب ک، ل پر قطع کرتے ہیں۔

تب ت ف کا قطب اُس مخروطی کے لحاظ سے جس پر ق اور قَ واقع ہیں خط ف ل پر ہے (دفعہ ۲۲۹)۔ نیز چونکہ ت اُسی مخروطی کے لحاظ سے ق قَ کا قطب ہے اِس لیے ت ف کا قطب، ق قَ پر ہے [دفعہ ۱۸۱]۔ اِس لیے ت ف ک کا قطب، ل پر ہے جو ق قَ اور ف ل کا نقطہ تقاطع ہے۔

اِس لیے [دفعہ ۱۸۲] سعت گ، ق، ل، قَ اور مینسل ف ک، ف ق، ف ل، ف قَ موسیقی ہیں۔

پس چونکہ زاویہ ک ف ل ایک قائمہ زاویہ ہے اس لیے

ف ق اور ف قَ، ف ل یا ف ک کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں [دفعہ ۵۶]۔

نتیجہ صریح ۱۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ق، قَ واقع ہیں اُس خطی ناقص میں تحویل ہوتا ہے جو ماسکوں کو ملاتا ہے، تب مسئلہ بالا ہو جاتا ہے: وہ خطوط جو ایک مخروطی کے ماسکوں کو منحنی کے کسی نقطہ ف سے ملاتے ہیں ف پر کے مماس کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں۔

نتیجہ صریح ۲۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ف، فَ واقع ہیں خطی ناقص میں تحویل ہوتا ہے، تب ایک مخروطی کے دو مماس ایک ماسکہ پر مساوی زاوئے بناتے ہیں۔

نتیجہ صریح ۳۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ف، فَ واقع ہیں ت میں سے گذرتا ہے، تب وہ دو مماس جو کسی نقطہ ت سے ایک مخروطی کے کھینچے جائیں ت پر کے اُس مماس کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں جو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے جو ت میں سے گذریں کسی ایک کا کھینچا گیا ہو۔

نتیجہ صریح ۴۔ خطوط مستقیم فَ قَ، ف قَ، فَ ق، ف قَ ایک ہی ہم ماسکی کو مس کرتے ہیں۔

۴۳۲۔ اگر ایک دئے ہوئے مخروطی کا کوئی وتر ق قَ ہو جو ایک ثابت ہم ماسکی مخروطی کو مس کرتا ہے تو ق قَ ایسے بدلیگا جیسے متوازی قطر کا مربع۔ نیز اگر ج ع کو مرکز میں سے ق پر کے مماس کے

متوازی کھینچا جائے اور وہ ق قَ سے ع پر ملے تو ق ع مستقل طول کا ہوگا۔

فرض کرو کہ ناقص

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱ = ۰$$

پر نقطے ق اور قَ، طہ اور طہَ ہیں اور فرض کرو کہ ق قَ مخروطی

$$\frac{لا^2}{ا^2 + لہ} + \frac{ما^2}{ب^2 + لہ} = ۱$$

کو مس کرتا ہے۔ تب

$$ق قَ^2 = ا^2 (جم طہ - جم طہَ)^2 + ب^2 (جب طہ - جب طہَ)^2$$

$$= ۴ جب^2 \tfrac{۱}{۲} (طہ - طہَ) \{ ا^2 جب^2 \tfrac{۱}{۲} (طہ + طہَ)$$

$$+ ب^2 جم^2 \tfrac{۱}{۲} (طہ + طہَ) \}$$

$$ج د^2 = ا^2 جب^2 \tfrac{۱}{۲} (طہ + طہَ) + ب^2 جم^2 \tfrac{۱}{۲} (طہ + طہَ)$$

لیکن چونکہ ق قَ دوسرے مخروطی کو مس کرتا ہے اسلیے

$$\frac{ا^2 + لہ}{ا^2} جم^2 \tfrac{۱}{۲} (طہ + طہَ) + \frac{ب^2 + لہ}{ب^2} جب^2 \tfrac{۱}{۲} (طہ + طہَ)$$

$$= جم^2 \tfrac{۱}{۲} (طہ - طہَ)،$$

$$\therefore ا^2 ب^2 جب^2 \tfrac{۱}{۲} (طہ - طہَ) = لہ \{ ا^2 جب^2 \tfrac{۱}{۲} (طہ + طہَ)$$

$$+ ب^2 جم^2 \tfrac{۱}{۲} (طہ + طہَ) \}، \quad \ldots\ldots (۱)$$

پس $ا^۲ ب^۲ ق ق'^۲ = ۴ ل ج د^۲$ ، ...... (۲)

پھر چونکہ ع ، خطوط

$$\frac{لا}{ا} جم \frac{۱}{۲} (ط + طَ) + \frac{ما}{ب} جب \frac{۱}{۲} (ط + طَ) - جم \frac{۱}{۲} (ط - طَ) = ۰$$

اور $\frac{لا}{ا} جم ط + \frac{ما}{ب} جب ط = ۰$

کا نقطۂ تقاطع ہے اِس لیے

$$\frac{لا}{ا جب ط} = \frac{- ما}{ب جم ط} = \frac{جم \frac{۱}{۲} (ط - طَ)}{جب \frac{۱}{۲} (ط - طَ)}$$

پس $ق ع^۲ جب^۲ \frac{۱}{۲} (ط - طَ)$

$$= ا^۲ \{ جب ط جم \frac{۱}{۲} (ط - طَ) - جم ط جب \frac{۱}{۲} (ط - طَ) \}^۲$$

$$+ ب^۲ \{ جم ط جم \frac{۱}{۲} (ط - طَ) + جب ط جب \frac{۱}{۲} (ط - طَ) \}^۲$$

$$= ا^۲ جب^۲ \frac{۱}{۲} (ط + طَ) + ب^۲ جم^۲ \frac{۱}{۲} (ط + طَ)$$

∴ $ق ع^۲ = \frac{ا^۲ ب^۲}{ل}$ ، (۱)

مثال ۔ دو ثابت ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ایک کا مماس ت ف اور دوسرے کا ت ق ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو خط ف ق ہمیشہ ایک تیسرے ہم ماسکی مخروطی کو مس کرے گا۔

اگر مشترک مرکز ج ہو تو مماسوں کے علی القوائم ہونے کی وجہ سے ج ت،
ف ق کی تنصیف کرے گا [مثال ۳ دفعہ ۲۲۸] ۔ اس لیے ج ت اور
ق ف، ق پر کے مماس کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں ۔ پس اگر ج ع
ق پر کے مماس کے متوازی ہو اور ق ف سے ع پر ملے تو ق ع = ج ت ۔
لیکن ج ت مستقل ہے [دفعہ ۲۲۸ ۲] ۔ اس لیے ق ع مستقل
ہے اور اس لیے ق ع ف ایک ثابت ہم ماسکی کو مس کرتا ہے ۔

ثبوت دیگر ۔ $\frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}-1=0$ کے وہ مماس جن کا وترِ تماس
خط ل لا + م ما − ۱ = ۰ ہے بحسب دفعہ ۱۸۹

$$\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}-1\right)\left(\text{و}^2\text{ل}^2+\text{ب}^2\text{م}^2-1\right)-\left(\text{ل لا}+\text{م ما}-1\right)^2=0$$

ہیں ۔ یہ مماس،

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2}\left(\text{ب}^2\text{م}^2-1\right)-2\,\text{ل م لا ما}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}\left(\text{و}^2\text{ل}^2-1\right)=0,\quad\ldots\ldots(1)$$

کے متوازی ہیں ۔

$\frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2+\text{لہ}}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2+\text{لہ}}-1=0$ کے وہ مماس جن کا وترِ تماس بھی یہی ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2+\text{لہ}}\left\{\left(\text{ب}^2+\text{لہ}\right)\text{م}^2-1\right\}-2\,\text{ل م لا ما}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2+\text{لہ}}\left\{\left(\text{و}^2+\text{لہ}\right)\text{ل}^2-1\right\}=0$$

کے متوازی ہیں ۔ وہ خطوط جو ان مماسوں پر عمود ہیں اور نقطہ (۰، ۰) میں سے
گذرتے ہیں

$$\frac{\text{ما}^2}{\text{و}^2+\text{لہ}}\left\{\left(\text{ب}^2+\text{لہ}\right)\text{م}^2-1\right\}+2\,\text{ل م لا ما}+\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2+\text{لہ}}\left\{\left(\text{و}^2+\text{لہ}\right)\text{ل}^2-1\right\}=0,$$

(۲) ....

ہیں ۔

خطوط (۱) میں سے ایک وہی ہے جو خطوط (۲) میں سے ایک ہے یہ خط خطوط

$$\left\{\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2(\text{ب}^2+\text{لہ})}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2(\text{ا}^2+\text{لہ})}\right\}\left\{\text{ا}^2(\text{ا}^2+\text{لہ})\text{ل}^2+\text{ب}^2(\text{ب}^2+\text{لہ})\text{م}^2\right\}$$

$$= \text{ا}^2-\text{ب}^2-\text{لہ}$$

میں سے جو (۱) اور (۲) کے بائیں ارکان کو جمع کرنے سے حاصل کئے گئے ہیں ایک ہے۔

لیکن مساوات کی سمتیں، ل اور م پر غیر منحصر نہیں ہو سکتیں، اس لیے حاصل ہونا چاہیے

$$\text{ا}^2(\text{ا}^2+\text{لہ})\text{ل}^2+\text{ب}^2(\text{ب}^2+\text{لہ})\text{م}^2-\text{ا}^2-\text{ب}^2-\text{لہ}=۰$$

خط ل لا + م ما − ۱ = ۰ کا لفافہ اس شرط کے ساتھ

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2(\text{ا}^2+\text{لہ})}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2(\text{ب}^2+\text{لہ})}=\frac{1}{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{لہ}}$$

ہے جو ایک ہم ماسکی مخروطی ہے کیونکہ

$$\frac{\text{ا}^2(\text{ا}^2+\text{لہ})}{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{لہ}}-\frac{\text{ب}^2(\text{ب}^2+\text{لہ})}{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{لہ}}=\text{ا}^2-\text{ب}^2$$

۲۳۲ — جب کسی دو منحنیوں کے نقاطِ تقاطع میں سے دو منطبق ہوتے ہیں یعنے جب دو منحنی مس کرتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ منحنی زیر بحث نقطہ پر پہلے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں۔ جب تین نقاطِ تقاطع منطبق ہوتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ منحنی دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں، علیٰ ہذا القیاس وہ منحنی جو ایک دئے ہوئے منحنی کے ساتھ زیادہ سے زیادہ ممکن رتبہ کا تماس رکھے لثمی منحنی کہلاتا ہے۔

ایک دائرہ کو صرف تین دئے ہوئے نقطوں میں سے گذارا جا سکتا ہے،

پس وہ دائرے جو کسی منحنی کے لئمی دائرے ہوتے ہیں اس کے ساتھ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں۔

وہ دائرہ جو ایک دئے ہوئے منحنی کے ساتھ دئے ہوئے نقطہ پر دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے اس نقطہ پر کا دائرہ انحنا کہلاتا ہے اور اس دائرہ کا نصف قطر نصف قطر انحنا کہلاتا ہے۔

دو مخروطی چار نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں۔ اس لیے دو مخروطی ایک دوسرے کے ساتھ تیسرے رتبہ سے بڑے رتبہ کا تماس نہیں رکھ سکتے۔ اگر وہ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہوں تو ان میں ایک اور نقطہ مشترک ہونا چاہئے۔

(۳۱۳) **۲۳۳ — ایک مخروطی کسی دئے ہوئے مخروطی کے ساتھ ایک دئے ہوئے نقطہ پر دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔ مخروطی کی عام مساوات معلوم کرو۔**

فرض کرو کہ دئے ہوئے مخروطی کی مساوات س = ۰ ہے اور فرض کرو کہ س = ۰ کے دئے ہوئے نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات ت = ۰ ہے۔

(لاَ، ماَ) میں سے گذرنے والے کسی خطِ مستقیم کی مساوات

$$ما - ماَ - م (لا - لاَ) = ۰$$

ہے۔ پس مساوات

$$س - ل ت \{(ما - ماَ) - م (لا - لاَ)\} = ۰، \quad ......(۱)$$

ایک ایسے مخروطی کی مساوات ہے جو ان نقطوں میں سے گذرتا ہے جہاں خطوطِ مستقیم ت = ۰ اور ما - ماَ - م (لا - لاَ) = ۰ مخروطی س = ۰ کو قطع کرتے ہیں۔

پس (۱) ، س = ۰ کو تین منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔
چونکہ دو مستقل لہ اور م اختیاری ہیں اس لئے مخروطی (۱) سے دوسری شرطیں پوری ہوسکتی ہیں۔ چنانچہ ان کا انتخاب اس طرح عمل میں آسکتا ہے کہ مساوات (۱) ایک دائرہ کو تعبیر کرے۔
اگر خط ما - مَا - م (لا - لَا) = ۰ مماس پر منطبق ہو تو چاروں نقاط تقاطع منطبق ہوتے ہیں۔ اس لیے مخروطی س - لہ ت^۲ = ۰ ، س = ۰ کے ساتھ تیسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے یعنے وہ ایک نسمی مخروطی ہے۔

مثال ۱۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی ا لا^۲ + ۲ ب لا ما + ج ما^۲ + ۲ د لا = ۰ کو مبداء پہ لثم کرے۔
مساوات

ا لا^۲ + ۲ ب لا ما + ج ما^۲ + ۲ د لا - لہ لا (ما - م لا) = ۰

میں جتنے مخروطی شامل ہیں سب کے سب دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں:
دائرہ کے لیے شرطیں ۲ ب - لہ = ۰ ، اور ا + لہ م = ج ہیں۔
اِس لیے مطلوبہ دائرہ ج لا^۲ + ج ما^۲ + ۲ د لا = ۰ ہے۔

مثال ۲۔ اُس مکافی کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی ا لا^۲ + ۲ ب لا ما + ج ما^۲ + ۲ د لا = ۰ کے ساتھ تیسرے رتبہ کا تماس رکھے۔
مخروطی ا لا^۲ + ۲ ب لا ما + ج ما^۲ + ۲ د لا - لہ لا^۲ = ۰ دئے ہوئے مخروطی کو چار منطبق نقطوں پہ قطع کرتا ہے۔
یہ منحنی مکافی ہے اگر (ا - لہ) ج = ب^۲ ۔ اِسلئے مطلوبہ مکافی کی مساوات حسب ذیل ہے: (۲۱۴)

ب^۲ لا^۲ + ۲ ب ج لا ما + ج^۲ ما^۲ + ۲ د ج لا = ۰

۲۳۴ — $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - 1 = 0$ پر کے نقطہ عہ پر دائرہ انحناء کی مساوات معلوم کرنا۔

اُس دائرہ کا مرکز جو نقطوں (عہ ، بہ ، جہ) میں سے گذرتا ہے

$$\frac{\text{۴ گ ا}}{\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}} = \text{جم ع} + \text{جم ب} + \text{جم ج} + \text{جم}\,(\text{ع} + \text{ب} + \text{ج})\text{،}$$

$$\frac{\text{۴ ف ب}}{\text{ب}^{2} - \text{ا}^{2}} = \text{جب ع} + \text{جب ب} + \text{جب ج} - \text{جب}\,(\text{ع} + \text{ب} + \text{ج}) \quad \text{(دفعہ ۱۳۶)}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

پس اگر ع = ب = ج تو

$$\frac{\text{۴ گ ا}}{\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}} = \text{۳ جم ع} + \text{جم ۳ ع} = \text{۴ جم}^{3}\,\text{ع}\text{،}$$

اور

$$\frac{\text{۴ ف ب}}{\text{ب}^{2} - \text{ا}^{2}} = \text{۳ جب ع} - \text{جب ۳ ع} = \text{۴ جب}^{3}\,\text{ع}$$

پس نقطہ ع پر کے دائرہ انحناء کا مرکز

$$\text{ا لا} = (\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2})\,\text{جم}^{3}\,\text{ع}\text{،} \quad \text{ب ما} = (\text{ب}^{2} - \text{ا}^{2})\,\text{جب}^{3}\,\text{ع}$$

سے حاصل ہوگا۔

اس دائرہ کے نصف قطر کا مربع

$$\left(\frac{\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{ا}}\,\text{جم}^{3}\,\text{ع} - \text{ا جم ع}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{ب}}\,\text{جب}^{3}\,\text{ع} + \text{ب جب ع}\right)^{2}$$

$$= \frac{\text{جم}^{2}\,\text{ع}}{\text{ا}^{2}}\left(\text{ا}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{ع} + \text{ب}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{ع}\right)^{2} + \frac{\text{جب}^{2}\,\text{ع}}{\text{ب}^{2}}\left(\text{ا}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{ع} + \text{ب}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{ع}\right)^{2}$$

$$= \frac{\left(\text{ا}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{ع} + \text{ب}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{ع}\right)^{3}}{\text{ا}^{2}\,\text{ب}^{2}}$$

ہے۔ اس لیے مطلوبہ مساوات ہے

$$\left(\text{لا} - \frac{\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{ا}}\,\text{جم}^{3}\,\text{ع}\right)^{2} + \left(\text{ما} - \frac{\text{ب}^{2} - \text{ا}^{2}}{\text{ب}}\,\text{جب}^{3}\,\text{ع}\right)^{2}$$

$$= \left(\text{ا}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{ع} + \text{ب}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{ع}\right)^{3} \Big/ \text{ا}^{2}\,\text{ب}^{2}$$

مرکز انحناء کا طریق صریحاً $(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$ ہے۔

۲۳۵ — اگر ایک ناقص پر چار نقطوں کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ، جہ، ضہ (۲۱۵) ہوں تو ان چار نقطوں میں سے ایک دائرہ گزرے گا اگر

$$\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} = 2 \text{ن} \pi \qquad [\text{دفعہ } 136]$$

پس نقطہ عہ پر کا دائرہ انحناء، ناقص کو مکرر نقطہ ضہ پر قطع کرے گا جہاں

$$3\,\text{عہ} + \text{ضہ} = 2\text{ن}\pi, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

(۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی مخصوص نقطہ ضہ میں سے انحناء کے تین دائرے گذرینگے یعنے نقطوں $\frac{1}{3}(2\pi - \text{ضہ})$، $\frac{1}{3}(4\pi - \text{ضہ})$ اور $\frac{1}{3}(6\pi - \text{ضہ})$ پر کے انحناء کے دائرے۔ یہ تین نقطے اس اعظم مثلث کے راس ہیں جو ناقص میں کھینچا جا سکتا ہے [دفعہ ۱۳۹ مثال ۱]۔ نیز چونکہ ضہ + $\frac{1}{3}(2\pi - \text{ضہ})$ + $\frac{1}{3}(4\pi - \text{ضہ}) + \frac{1}{3}(6\pi - \text{ضہ}) = 4\pi$، اس لیے نقطہ ضہ اور وہ تین نقطے جن پر کے انحناء کے دائرے ضہ میں سے گذرتے ہیں ایک دائرہ پر واقع ہیں۔

مثال ۱ — اگر دو مخروطیوں میں سے ہر ایک، ایک تیسرے مخروطی کے ساتھ دوہرا تماس رکھے تو اس مخروطی کے ساتھ اِن کے وتر تماس، اور ان کے مشترک نقطوں میں سے گذرنے والے خطوں میں سے دو خط، ایک نقطہ پر ملیں گے اور ایک موسیقی پنسل بنائیں گے۔

فرض کرو کہ تیسرے مخروطی کی مساوات س = ۰ ہے اور فرض کرو کہ دو وتر تماس کی مساواتیں عہ = ۰، بہ = ۰ ہیں تب۔ [دفعہ ۱۸۷] مخروطیوں کی مساواتیں

$$\text{س} - \text{ل}^2 \times \text{عہ}^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{س} - \text{م}^2 \times \text{بہ}^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

ہیں۔ اب خطوط مستقیم

$$\text{لہ}^2\,\text{عہ}^2 - \text{مہ}^2\,\text{بہ}^2 = ۰، \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

(۱) اور (۲) کے مشترک نقطوں میں سے گذرتے ہیں ۔ نیز خطوط (۳) عہ = ۰ اور بہ = ۰ کے نقطۂ تقاطع میں سے بھی گذرتے ہیں، اور [دفعہ ۵۶] چار خطوط عہ = ۰، بہ = ۰، لہ عہ − مہ بہ = ۰ اور لہ عہ + مہ بہ = ۰ ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں ۔

مثال ۲ — دئے ہوئے نصف قطر کا ایک دائرہ ایک ناقص کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ مشترک وتروں کے متوازی ناقص کے جو قطر ہیں اُن کا مسلسل حاصل ضرب مستقل ہے ۔

فرض کرو کہ ناقص کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ ہے اور دائرہ کی مساوات $(\text{لا} - \text{عہ})^2 + (\text{ما} - \text{بہ})^2 - \text{ک}^2 = ۰$ ہے ۔ تب مشترک وتروں کے کسی زوج کی مساوات

$$(\text{لا} - \text{عہ})^2 + (\text{ما} - \text{بہ})^2 - \text{ک}^2 - \text{لہ}\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - ۱\right) = ۰، \ldots (۱)$$

ہے جہاں لہ، مساوات (۳۱۶)

$$\begin{vmatrix} ۱ - \frac{\text{لہ}}{\text{ا}^2}، & ۰ & -\text{عہ} \\ ۰ & ۱ - \frac{\text{لہ}}{\text{ب}^2} & -\text{بہ} \\ -\text{عہ} & -\text{بہ} & \text{لہ} + \text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 - \text{ک}^2 \end{vmatrix} = ۰، \ldots (۲)$$

سے حاصل ہوتا ہے ۔ ناقص کے اُن قطروں کی مساوات جو خطوط (۱) کے متوازی ہیں

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{لہ}\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}\right) = ۰، \quad \ldots\ldots \quad (۳)$$

ہے ۔ (۳) سے حاصل شدہ دو نیم قطر صریحاً محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں اور ان میں سے ایک کے طول کا مربع لہ کے مساوی ہے ۔

پس چھ نیم قطروں کا مسلسل حاصل ضرب لہ کی اُن تین قیمتوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جو (۳) سے حاصل ہوتی ہیں اور یہ صریحاً $\frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ں}^2}$ ہے۔

مثال ۲ ۔ اگر ایک مخروطی کا مرکز چار دئے ہوئے نقطوں میں سے کوئی ایک ہو اور وہ مثلث جو دوسرے تین نقطوں کو ملانے سے بنے خود قطبی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ مخروطی کے متقارب اُن دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہوں گے جو اِن چار نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

فرض کرو کہ چار نقطے خطوطِ مستقیم

$$\text{لا ما} = ۰ \quad \text{اور} \quad (\text{ل لا} + \text{م ما} - ۱)(\text{لَ لا} + \text{مَ ما} - ۱) = ۰$$

کے نقاطِ تقاطع ہیں۔

وہ خط جو مخروطی کے مرکز کو خود قطبی مثلث کے کسی ایک راس سے ملاتا ہے اُس خط کا مزدوج ہے جو دوسرے دو راسوں کو ملاتا ہے۔ اس لیے چاروں مخروطیوں کے لیے خطوں کے وہ تین زوج جو چار دئے ہوئے نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مخروطی کی مساوات

$$\text{ا لا}^2 + ۲\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + ۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج} = ۰ \quad \ldots (۱)$$

ہے۔

خطوط $(\text{ل لا} + \text{م ما} - ۱)(\text{لَ لا} + \text{مَ ما} - ۱) = ۰$ مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ اس لیے خطوط

$$\text{ل لَ لا}^2 + (\text{ل مَ} + \text{لَ م})\,\text{لا ما} + \text{م مَ ما}^2 = ۰$$

بھی مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ پس [دفعہ ۱۸۴]

ا م مَ + ب ل لَ = ھ (ل مَ + لَ م)

خطوط لا ما = ۰، مزدوج قطروں سے کے متوازی ہیں، اس لیے ھ = ۰ اور حاصل ہوتا ہے

ا م مَ + ب ل لَ = ۰، .... (۲)

(۱) کے متقارب خطوط ا لا^2 + ب ما^2 = ۰ کے متوازی ہیں یا (۲) کی رُو سے خطوط

ل لَ − م مَ ما^2 = ۰

کے متوازی ہیں اور اس سے مسئلہ ثابت ہے [دفعہ ۲۰۹]

(۳۱۷)

مثال ۴ ـ کسی ایسے مثلث کا حائط دائرہ جو ایک مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہو مخروطی کے مرتب دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات ا لا^2 + ب ما^2 = ۱ ہے اور فرض کرو کہ مثلث کے راس (لاَ، ماَ)، (لاً، ماً) اور (لاٌ، ماٌ) ہیں۔

چونکہ ان میں سے ہر نقطہ دوسرے کے قطبی پر ہے اس لیے

ا لاً لاٌ + ب ماً ماٌ = ۱، .... (۱)

ا لاٌ لاَ + ب ماٌ ماَ = ۱، .... (۲)

اور ا لاَ لاً + ب ماَ ماً = ۱، .... (۳)

مثلث کے حائط دائرہ کی مساوات

$$\begin{vmatrix} لا^2 + ما^2 & لا & ما & ۱ \\ لاَ^2 + ماَ^2 & لاَ & ماَ & ۱ \\ لاً^2 + ماً^2 & لاً & ماً & ۱ \\ لاٌ^2 + ماٌ^2 & لاٌ & ماٌ & ۱ \end{vmatrix} = ۰، \quad .... (۴)$$

ہے ۔

اب اگر ایک دائرہ کی مساوات

ا لا² + ا ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

ہو تو اُس مماس کا مربع جو مبدا سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو نسبت ج/ا کے مساوی

ہے ۔

اِس لیے دائرہ (۴) کے مماس کا مربع اُس نسبت کے مساوی ہے جو

لاَ² + ماَ²	لاَ	ماَ	:	لاَ	ماَ	۱
لاً² + ماً²	لاً	ماً		لاً	ماً	۱
لاً ً² + ماً ً²	لاً ً	ماً ً		لاً ً	ماً ً	۱

ہے ۔ ۔

پہلا مقطع

لاَ² (لاً ماً ً ـ ماً لاً ً) + لاً² (لاً ً ماَ ـ ماً ً لاَ) + لاً ً² (لاَ ماً ـ ماَ لاً)

+ ماَ² (لاً ماً ً ـ ماً لاً ً) + ماً² (لاً ً ماَ ـ ماً ً لاَ) + ماً ً² (لاَ ماً ـ ماَ لاً) ۔ ۔ ۔ (۵)

کے مساوی ہے ۔

اب مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے حاصل ہوتا ہے

ا لاَ / (ماً ـ ماً ً) = ب ماَ / (لاً ً ـ لاً) = ـ۱ / (لاً ماً ً ـ ماً لاً ً) ،

ا لاً / (ماً ً ـ ماَ) = ب ماً / (لاَ ـ لاً ً) = ـ۱ / (لاً ً ماَ ـ ماً ً لاَ) ،

اور ا لاً ً / (ماَ ـ ماً) = ب ماً ً / (لاً ـ لاَ) = ـ۱ / (لاَ ماً ـ ماَ لاً)

اِن مساواتوں کے ذریعہ (عہ) ہو جاتا ہے

(۳۱۸)
$$\frac{لَ}{د}(اً-اً) + \frac{لً}{د}(اَ-اً) + \frac{لً}{د}(اً-اَ)$$
$$+ \frac{اَ}{ب}(لً-لً) + \frac{اً}{ب}(لً-لَ) + \frac{اً}{ب}(لَ-لً)$$

یا
$$-\left(\frac{1}{د}+\frac{1}{ب}\right)\begin{vmatrix} لَ & اَ & 1 \\ لً & اً & 1 \\ لً & اً & 1 \end{vmatrix}$$

پس مخروطی کے مرکز سے حائط دائرہ کا مماس $\sqrt{\frac{1}{د}+\frac{1}{ب}}$ کے مساوی ہے یعنے مرتب دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے - اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

نویں باب پر مثالیں

۱ — دئے ہوئے طول کے دو خطوط مستقیم کو دو دئے ہوئے خطوط مستقیم پر اس طرح متحرک کیا گیا ہے کہ اِن کے چار سروں میں سے ایک دائرہ گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس دائرہ کے مرکز کا طریق ایک قائم زائد ہے -

۲ — ایک مخروطی کے دو وتر و ف فَ، و ق قَ ہیں اور و میں سے گذرنے والا کوئی خط مخروطی کو ر، رَ پر اور خطوط ف ق، فَ قَ کو س، سَ پر قطع کرتا ہے - ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ور} + \frac{1}{ورَ} = \frac{1}{وس} + \frac{1}{وسَ}$$

۳ — مخروطیوں کا ایک نظام اُن ہی چار نقطوں میں سے گذرتا ہے اور اِن میں سے ایک مخروطی کے ایک دئے ہوئے نقطہ و پر کا مماس

مخروطیوں میں سے کسی دوسرے مخروطی کو ف، فَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{وف} + \frac{1}{وفَ}$ مستقل ہے۔

۴ — ایک دائرہ اور ایک قائم زائد چار نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں اور ان کے مشترک وتروں میں سے ایک، زائد کا قطر ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرا وتر دائرہ کا قطر ہے۔

۵ — ان تمام مخروطیوں میں سے جو چار دیئے ہوئے نقطوں میں سے گذرتے ہیں کم سے کم خروج المرکز والے مخروطی کے مساوی مزدوج قطر ان دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں جو ان نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

(۳۱۹) ۶ — ان تمام مخروطیوں میں سے جو دو دیئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو دیئے ہوئے نقطوں پر مس کرتے ہیں کم سے کم خروج المرکز کا مخروطی وہ ہوگا جس میں مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک، دیئے ہوئے خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرے گا۔

۷ — ایک مخروطی کے دو ثابت مماس و ا، و ب ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مماسوں کے درمیان مخروطی کے ایک متغیر مماس کے مقطوعہ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے جو ایک خطِ مستقیم میں تحویل ہوتا ہے اگر ابتدائی مخروطی مکافی ہو۔

۸ — ایک مخروطی کے دو مماس و ا، و ب کھینچے گئے ہیں، یہ مماس ایک متغیر مماس سے نقطوں ف اور ق پر منقطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث و ف ق کے محائط دائرہ کا مرکز ایک زائد مرتسم کرتا ہے۔

۹ — ایک مخروطی کھینچا گیا ہے جو محددوں کے محوروں و لا، و ما کو ا، ب پر مس کرتا ہے اور نقطہ د میں سے گذرتا ہے جہاں و ا د ب ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مثلث و ا ب کا

رقبہ مستقل ہو تو مخروطی کے مرکز کا طریق ایک زائد ہے۔

۱۰ — ایک ثابت نقطہ سے مخروطیوں کے ایک نظام کے مماس کھینچے گئے ہیں جو دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کو دئے ہوئے نقطوں پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطہ تماس کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۱۱ — ثابت کرو کہ ایک ہی ذو اربعۃ الاضلاع میں مرتسمہ مخروطیوں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے قطب کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۱۲ — ایک ناقص کھینچا گیا ہے جو ایک زائد کے متقاربوں کو مس کرتا ہے اور زائد سے چار نقطوں پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مشترک وتروں میں سے دو، اُس خط کے متوازی ہیں جو متقاربوں اور ناقص کے نقاطِ تماس کو ملاتا ہے اور یہ وتر اس خط سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔

۱۳ — مخروطیوں کے ایک نظام میں مرکز کا محل، محاور کی سمت، اور محاور کا مجموعہ دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے قطب کا طریق ایک مکافی ہے جو محوروں کو مس کرتا ہے۔

۱۴ — ایک مکافی کھینچا گیا ہے جو تین دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ نقاطِ تماس کو ملانے والے وتروں میں سے ہر ایک، ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۵ — اگر ایک مکافی دو دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرے اور نقاط تماس کو ملانے والا خط ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۴۲۰) ۱۶ — اگر مکافی √(ا لا) + √(ب ما) = ۱ کا محور ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے تو ماسکہ کا طریق ایک قائم زائد ہوگا۔

۱۷ — ایک ثابت نقطہ و سے قاطعوں کا ایک زوج کھینچا گیا ہے جو ایک دئے ہوئے مخروطی سے چار نقطوں پر ملتے ہیں جو ایک دائرہ پر واقع

ہیں ۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق وہ عمود ہے جو و سے و کے قطبی پر کھینچا گیا ہے ۔

۱۸ ۔ ت ف اور ت ق ایک مخروطی کے مماس ہیں اور منحنی پر کوئی دوسرا نقطہ س ہے ۔ ت میں سے گذرتا ہوا کوئی خط کھینچا گیا ہے جو س ق اور س ف سے علی الترتیب ک اور ل پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ق ل اور ف ق منحنی پر متقاطع ہوتے ہیں ۔

۱۹ ۔ ایک ثابت خط مستقیم کے کسی نقطہ ف کو ایک مخروطی کے دو ثابت نقطوں ق ، س سے ملایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ب ق اور ا س کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے ۔

۲۰ ۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کے اس نقطہ میں سے گذرنے والا ہم ماسکی زائد جس کا خارج المرکز زاویہ عہ ہے حسب ذیل ہے :-

$$\frac{لا^2}{جم^2 عہ} - \frac{ما^2}{جب^2 عہ} = ا^2 - ب^2$$

۲۱ ۔ ایک دیے ہوئے نقطہ سے ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک سلسلہ کے مماس کھینچے گئے ہیں جہاں دیا ہوا نقطہ محور اعظم میں ہے ۔ نقاطِ تماس کے طریق کی مساوات معلوم کرو ۔

۲۲ ۔ اگر لہ ، مہ ، ان ہم ماسکیوں کے مبدل ہوں جو ایک دیے ہوئے ناقص کے دو نقطوں ف ، ق میں سے گذرتے ہیں تو ثابت کرو کہ (۱) اگر ف ، ق مزدوج قطروں کے سرے ہوں تو لہ + مہ مستقل ہوگا اور (۲) اگر ف اور ق پر کے مماس علی القوائم ہوں تو $\frac{1}{لہ} + \frac{1}{مہ}$ مستقل ہوگا ۔

۲۳ ۔ ثابت کرو کہ ہم ماسکی ناقصوں کے ایک سلسلہ کے مساوی مزدوج قطروں کے سرے ایک ہم ماسکی قائم زائد پر واقع ہوتے ہیں ۔

۲۴ ۔ کسی نقطہ سے ایک ناقص کے دو مماس کھینچے گئے ہیں ۔

اِن کا درمیانی زاویہ اُن ہم ماسکیوں کے مبدلوں کی رقوم میں معلوم کرو جو اس نقطہ میں سے گذرتے ہیں اور ثابت کرو کہ اِن دو مماسوں کی مساوات، ہم ماسکیوں کے عمادوں کو محاور قرار دینے سے

$$\frac{لا^2}{ل_1} + \frac{ما^2}{ل_2} = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔

(۱۳۲۱) ۲۵ — خطوطِ مستقیم و ف فَ، و ق قَ، ایک ناقص کو علی الترتیب ف، فَ اور ق، قَ پر قطع کرتے ہیں اور نیز ایک ہم ماسکی ناقص کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

و ف × و فَ × ق قَ = و ق × و قَ × ف فَ

۲۶ — ایک دئے ہوئے نقطہ سے ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک نظام کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاطِ تماس کا طریق ایک کعبی منحنی ہے جو دئے ہوئے نقطہ میں سے اور نیز ماسکوں میں سے گذرتا ہے۔

۲۷ — ثابت کرو کہ اگر ہم ماسکیوں کے ایک نظام کے متوازی مماس کھینچے جائیں تو نقاطِ تماس کا طریق ایک قائم زائد ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اِن مماس کی تمام ممکن سمتوں کے لیے اِن زائدوں کے راسوں کا طریق وہ منحنی ہے جس کی مساوات

$$ر^2 = (ا^2 - ب^2) \text{ جم } 2 \text{ طہ}$$

ہے۔

۲۸ — اگر ایک ناقص میں ایک مثلث کھینچا جائے اور وہ ایک ہم ماسکی ناقص کو لف کرے تو نقاطِ تماس مثلث کے جانبی دائروں پر واقع ہوں گے۔

۲۹ — اگر ایک ناقص، دو ہم ماسکیوں میں سے ہر ایک کے ساتھ دوہرا تماس رکھے تو نقاطِ تماس پر کے مماس ایک مستطیل بنائیں گے۔

۳۰ — اگر ایک ثابت نقطہ سے ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ایک کے مماس کھینچے جائیں اور نقاطِ تماس پر کے عماد نقطہ ق پر ملیں تو ثابت کرو کہ ق

کا طریقی ایک خط مستقیم ہے۔

۳۱ — ایک ناقص کے گرد ایک مثلث کھینچا گیا ہے جس کے دو راس ایک ہم ماسکی ناقص پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا راس دوسرے ہم ماسکی ناقص پر واقع ہے۔

۳۲ — ایک ناقص اور ایک زائد ہم ماسکی ہیں اور زائد کے متقاربین ناقص کے مساوی مزدوج قطروں پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ زائد ان تمام مخروطیوں کو علی القوائم قطع کرے گا جو ناقص کے محوروں کے سروں میں سے گذرتے ہیں۔

۳۳ — ایک نقطہ ف سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کا حاصل ضرب

$$\frac{ل_1 ل_2 (ل_1 - ل_2)^2}{ا^2 - ب^2}$$

ہے جہاں ل۱، ل۲ ان ہم ماسکیوں کے مبدل ہیں جو دئے ہوئے ناقص کے ہم ماسکہ ہیں اور ف میں سے گذرتے ہیں اور دئے ہوئے ناقص کے نیم محاور ا، ب ہیں۔

۲۲۱، ۳۴ — ثابت کرو کہ ایک مثلث کے عمودوں کے پائین کسی مساوی الجانب زائد کے لحاظ سے جو مثلث کو حائط کرتا ہے ایک مزدوج ثلاثیہ ہوتے ہیں۔

۳۵ — ایک نقطہ ت سے ایک مخروطی کے مماس ت ف، ت ق ہیں اور زاویہ ف ت ق کا ناصف، ف ق سے و پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر و میں سے گذرنے والا کوئی اور وتر س و سَ ہو تو زاویہ س ت سَ، و ت سے تنصیف ہوگا۔

۳۶ — اگر دو مکافی کھینچے جائیں جن میں سے ہر ایک ایک دائرہ کے تین نقطوں میں سے گذرتا ہے اور ان میں سے ایک دائرہ سے مکرر د پر ملتا ہے اور دوسرا ع پر تو ثابت کرو کہ ان کے محوروں کا درمیانی زاویہ اس زاویہ کا ایک چوتھائی ہے جو د ع کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔

۳۷ــــ اگر ا ب ج وہ اعظم مثلث ہو جو ایک ناقص میں کھینچا گیا ہے اور ا ب ج کا حائط دائرہ ناقص کو مکرر د پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ان دو مکافیوں کے محوروں کے نقطۂ تقاطع کا طریق جو ا ، ب ، ج ، د میں سے گذرتے ہیں ایک مخروطی ہے جو ابتدائی مخروطی کے مشابہ ہے۔

۳۸ــــ اگر نصف قطر لا کے دائرہ پر کوئی نقطہ محددوں لا جم ط ، لا جب ط سے حاصل ہو تو ثابت کرو کہ چار نقطوں ع ، ب ، ج ، ض میں سے گذرنے والے دو مکافیوں کے محوروں کی مساواتیں

$$لا جم س + ما جب س = \frac{1}{4}\{جم(س - ع) + جم(س - ب) + جم(س - ج) + جم(س - ض)\}$$

اور

$$لا جب س - ما جب س = \frac{1}{4}\{جب(س - ع) + جب(س - ب) + جب(س - ج) + جب(س - ض)\}$$

ہیں جہاں

$$4س = ع + ب + ج + ض$$

۳۹ــــ ایک مخروطی کے اندرونی ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع ا ، ب ، ج ، د ہیں۔ مخروطی کے کسی نقطہ ف سے اِن اضلاع پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا اور ج پر کے عمودوں کے حاصل ضرب اور ب اور د پر کے عمودوں کے حاصل ضرب میں نسبت مستقل ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر مخروطی کے اندرونی کثیر الاضلاع کے اضلاع ا ، ب ، ج ، د ، ع ، ف... ہوں اور اضلاع کی تعداد جفت ہو تو مخروطی کے کسی نقطہ سے اضلاع ا ، ج ، ع پر کے عمودوں کا مسلسل حاصل ضرب اضلاع ب ، د ، ف .... پر کے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ مستقل نسبت میں ہوگا

۴۰ــــ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کے کسی نقطہ پر کا عمر کنا مخنا دوہے۔

و سے ناقص کے دوسرے دو عمادوں کے پائین ق، س ہیں ۔ اگر ق اور س پر کے مماس ت پر ملیں تو ثابت کرو کہ ت کے طریق کی مساوات

$\frac{ا^2}{لا^2} + \frac{ب^2}{ما^2} = ۱$ ہے ۔

۴۱ ـــ ثابت کرو کہ ایک دائرہ ایک مکافی کو چار حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کر سکتا اگر اس کے مرکز کا فصلہ نیم وتر خاص سے کم ہو ۔

ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک مکافی کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے ۔ مکافی کے راس میں سے خطوط ان چھ خطوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو نقاطِ تقاطع کے زوجوں کو ملاتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ ان نقطوں کے فصلوں کا مجموعہ جہاں یہ خطوط مکافی کو قطع کرتے ہیں مستقل ہے اگر دائرہ کے مرکز کا فصلہ مستقل ہو ۔

۴۲ ـــ تین خطوطِ مستقیم ایک قائم زائد کے لحاظ سے ایک خود قطبی مثلث بناتے ہیں ۔ اگر منحنی کو متغیر کیا جائے لیکن خطوط ثابت رہیں تو مرکز کا طریق معلوم کرو ۔

۴۳ ـــ اگر ایک ناقص کے ہم مرکز ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ناقص میں مثلثوں کی لا انتہا تعداد کھینچی جا سکتی ہے اور دائرہ کے گرد مثلثوں کی لا انتہا تعداد کھینچی جا سکتی ہے اگر $\frac{۱}{ج} = \frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب}$ جہاں ج دائرہ کا نصف قطر ہے اور ا، ب، ناقص کے نیم محاور ۔

۴۴ ـــ ایک ناقص پر ایسے نقطے معلوم کرو کہ ف پر کا لثمی دائرہ ق میں سے گزرے اور ق پر کا لثمی دائرہ ف میں سے گزرے ۔

۴۵ ـــ قائم زائد ایک دیے ہوئے مکافی کے ساتھ تیسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ ان زائدوں کے مرکزوں کا طریق ایک مساوی مکافی ہے ۔

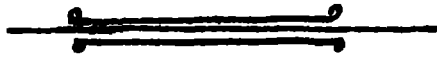
۴۶ ـــ ایک ناقص پر دو نقطے ف، ق ہیں ۔ ثابت کرو کہ اگر ف پر کا عماد اس زاویہ کی تنصیف کرے جو ق پر کے عماد کے محاذی ف پر

بنتا ہے تو ق پر کا عماد اُس زاویہ کی تنصیف کرے گا جو ف پر کے عماد کے محاذی ق پر بنتا ہے۔

۴۷ ۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص کے کسی نقطہ ف پر کا مرکز انحناء ف پر کے مماس کا قطب بلحاظ اُس ہم ماسکی زائد کے ہے جو ف میں سے گذرتا ہے۔ (۳۲۴)

۴۸ ۔ ا ب ج ایک مثلث ہے جو ایک ناقص میں کھینچا گیا ہے۔ ایک ہم ماسکی ناقص ضلعوں کو اَ، بَ، جَ پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا میں سے گذرتا ہوا ہم ماسکی زائد اندرونی ناقص سے اَ پر ملتا ہے۔

۴۹ ۔ دو قائم زائدوں میں سے ایک کے متقارب دوسرے کے محوروں کے متوازی ہیں اور ہر ایک کا مرکز دوسرے پر واقع ہے۔ ثابت کرو ایک مخروطی کے مرکز میں سے دائروں کی لاانتہا تعداد کھینچی جا سکتی ہے جو دوسرے کو دیگر ایسے تین نقطوں ف، ق، ر میں قطع کریں کہ مثلث ف ق ر پہلے مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہو۔

۵۰ ۔ ایک قائم زائد کے مرکز میں سے گذرتا ہوا ایک دائرہ منحنی کو نقطوں ا، ب، ج، د میں قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا حائط دائرہ جو ا، ب، ج پر کے مماسوں سے بنتا ہے زائد کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور اس کا مرکز زائد کے اُس نقطہ پر ہے جو د کا متقاطر ہے۔

بارہواں باب

لفاف اور مماسی مساواتیں

۲۳۶ — ہم ایک متحرک خط کا لفاف بعض سادہ صورتوں میں معلوم کر چکے ہیں [دفعہ ۱۰۸]۔

اب ہم خط

ل لا + م ما − ۱ = ۰

کا لفاف معلوم کرینگے جہاں ل اور م درجہ دوم کی کسی مساوات سے مربوط ہیں۔

۲۳۷ — خط ل لا + م ما − ۱ = ۰ کا لفاف معلوم کرنا جہاں

ا ل^2 + ۲ ھ ل م + ب م^2 + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰

اگر خط کسی مخصوص نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرے تو ل لاَ + م ماَ − ۱ = ۰۔ دی ہوئی شرط کو ل اور م میں متجانس بنانے کے لیے اگر اسے استعمال کیا جائے تو

ا ل^2 + ۲ ھ ل م + ب م^2 − ۲ (گ ل + م ف) (ل لاَ + م ماَ)

+ ج (ل لاَ + م ماَ)^2 = ۰

نسبت $\frac{ل}{م}$ کی دو قیمتوں سے ان دو خطوط کی سمتیں حاصل

ہونگی جو نقطہ (لاَ ، ماَ) میں سے گذرتے ہیں۔

اگر (لاَ ، ماَ) اُس منحنی پر کا نقطہ ہو جس کو متحرک خط مس کرتا ہے تو اِس سے کھینچے ہوئے مماس منطبق ہونے چاہئیں اور اِس لیے اوپر کی مساوات کی اصلیں مساوی ہونی چاہئیں۔ اس کے لیے شرط ہے

(ا - ۲گ لاَ + ج لاَ^۲) (ب - ۲ف ماَ + ج ماَ^۲) = (ھ - گ ماَ - ف لاَ + ج لاَ ماَ)^۲

جو لاَ^۲ (ب ج - ف^۲) + ۲ لاَ ماَ (ف گ - ج ھ) + ماَ^۲ (ج ا - گ^۲) (۳۲۶)

+ ۲ لاَ (ف ھ - گ ب) + ۲ ماَ (گ ھ - ف ا) + ا ب - ھ^۲ = ۰

میں تحویل ہوتی ہے۔

اِس لیے مطلوبہ لفاف مخروطی

ا لاَ^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہے جہاں ا ، ب ، ج ، ف ، گ ، ھ کے وہی معنے ہیں جو دفعہ ۱۷۹ میں لئے گئے ہیں۔

وہ شرط کہ خط ل لا + م ما - ۱ = ۰ منحنی

ا لاَ^۲ + ۲ ھ لا ما + ب اَ^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

کو مس کرے یہ ہے کہ

ا ل^۲ + ۲ ھ ل م + ب م^۲ + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰

پس دفعہ ۱۷۹ میں حاصل شدہ شرط کے ساتھ مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ا ، ب ، ج ، وغیرہ متعلقِ

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

میں ا، ب، ج، وغیرہ کے صغیروں کے متناسب ہونے چاہئیں۔
اس کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو جاتی ہے کیونکہ ا کا صغیرہ
ب ج ـ ف^2 ہے یا
(ج ا ـ گ^2) (ا ب ـ ھ^2) ـ (گ ھ ـ ا ف)^2 یعنے ا ∆
اور اسی طرح دوسروں کے لیے۔

یہ بھی مشاہدہ طلب ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا & ھ & گ \\ ھ & ب & ف \\ گ & ف & ج \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا & ھ & گ \\ ھ & ب & ف \\ گ & ف & ج \end{vmatrix}^2$$

کیونکہ پہلا مقطع ا ا ∆ + ھ ھ ∆ + گ گ ∆ = ∆^{2} ہے۔

مخروطی فہ (ل، م) = ۰ کا مرکز معلوم کرنا۔

وہ دو مماس جو محور ما کے متوازی ہیں مساوات

$$ا ل^2 + ۲ گ ل + ج = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔
اب اگر ما = ۰ کے متوازی مماس ل$_۱$ لا + ۱ = ۰ اور ل$_۲$ لا + ۱ = ۰ ہوں تو

$$\frac{۱}{ل_۱} + \frac{۱}{ل_۲} = -۲ \frac{گ}{ج}$$ ۔

لیکن کسی مخروطی کا مرکز ایسے خط پر ہوتا ہے جو متوازی مماسوں کے کسی زوج کے درمیان وسط میں ہوتا ہے۔
اس لیے مرکز خط

$$۲ لا + \frac{۱}{ل_۱} + \frac{۱}{ل_۲} = ۰$$ یعنے ج لا ـ گ = ۰ پر ہے۔

اسی طرح مرکز خط ج ما ـ ف = ۰ پر ہے۔

اِس لیے مخروطی کا مرکز ہے

(گ/ج ، ف/ج)

(۳۲۷) مثال ۱ - خط ل لا + م ما + ۱ = ۰ کا لفاف معلوم کرنا اس شرط کے ساتھ کہ

ف/ل + گ/م + ھ = ۰

اُن دو خطوں کی سمتیں جو (لا ، ما) میں سے گذرتے ہیں

ھ ل م - (ف م + گ ل) (ل لا + م ما) = ۰

سے حاصل ہوتی ہیں - یہ خطوط منطبق ہونگے اگر

۴ گ ف لا ما = (ف لا + گ ما - ھ)^{۲}

یہ √(ف لا) + √(گ ما) + √ھ = ۰

کے معادل ہے -

مثال ۲ - مخروطی سَ = لا^{۲}/اَ^{۲} + ما^{۲}/بَ^{۲} - ۱ = ۰ میں مثلث کھینچے گئے ہیں اور اضلاع میں سے دو مخروطی س = لا^{۲}/ا^{۲} + ما^{۲}/ب^{۲} - ۱ = ۰ کو مس کرتے ہیں - تیسرے ضلع کا لفاف معلوم کرو -

سَ کے نقطہ (لاَ ، ماَ) سے مخروطی س = ۰ کے مماسوں کی مساوات

(لا^{۲}/ا^{۲} + ما^{۲}/ب^{۲} - ۱) (لاَ^{۲}/ا^{۲} + ماَ^{۲}/ب^{۲} - ۱) - (لا لاَ/ا^{۲} + ما ماَ/ب^{۲} - ۱)^{۲} = ۰ ... (۱)

ہے -

اب اگر ب ≠ ج، ل لا + م ما + ن = ۰ ہو تو

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - ۱ - \text{ر}\left(\frac{\text{لا لاَ}}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} - ۱\right)(\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن}) = ۰،$$

(۲) ....

ر کی کسی خاص قیمت کے لیے وہی خطوط ہوں گے جو (۱) سے حاصل ہوتے ہیں۔

پس $\frac{\text{ل ماَ}}{\text{ب}^2} + \frac{\text{م لاَ}}{\text{و}^2} = \text{ر}\frac{\text{لاَ ماَ}}{\text{و}^2\text{ب}^2}$

$\text{ل} - \text{ن}\frac{\text{لاَ}}{\text{و}^2} = \text{ر}\frac{\text{لاَ}}{\text{و}^2}$

اور $\text{م} - \text{ن}\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^2} = \text{ر}\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^2}$

۱، $\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^2}$، $\frac{\text{لاَ}}{\text{و}^2}$ سے ترتیب وار ضرب دو تو

$$\frac{۲\text{ل}}{\text{ب}^2} = \text{ر لاَ}\left(\frac{۱}{\text{و}^2\text{ب}^2} + \frac{۱}{\text{و}^2\text{ب}^2} - \frac{۱}{\text{و}^2\text{ب}^2}\right) = \text{ر لاَ ل}،$$

$$\frac{۲\text{م}}{\text{و}^2} = \text{ر ماَ}\left(\frac{۱}{\text{و}^2\text{ب}^2} - \frac{۱}{\text{و}^2\text{ب}^2} + \frac{۱}{\text{و}^2\text{ب}^2}\right) = \text{ر ماَ م}،$$

اور $\frac{-۲\text{ن}}{\text{و}^2\text{ب}^2} = \text{ر}\left(-\frac{۱}{\text{و}^2\text{ب}^2} + \frac{۱}{\text{و}^2\text{ب}^2} + \frac{۱}{\text{و}^2\text{ب}^2}\right) = \text{ر ن}،$

لیکن $\frac{\text{لاَ}^2}{\text{و}^2} + \frac{\text{ماَ}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ — اس لیے (۳۲۸)

$$\frac{\text{ل}^2}{\text{و}^2\text{ب}^2\text{ل}^2} + \frac{\text{م}^2}{\text{و}^2\text{ب}^2\text{م}^2} = \frac{\text{ن}^2}{\text{و}^2\text{ب}^2\text{ن}^2}،\ \ldots\ldots (۳)$$

اس لیے ل لا + م ما + ن = ۰ کا لفاف شرط (۳) کے ساتھ

$$\frac{ل^2}{ا^2} لا + \frac{م^2}{ب^2} ما = ن^2$$

ہے۔

یہ لفاف خود مخروطی میں ہوگا اگر

$$\frac{ا^2 ل^2}{ا^2} = \frac{ب^2 م^2}{ب^2} = ن^2$$

اور یہ $\pm \frac{ا}{و} \pm \frac{ب}{ب} = ا$ میں تحویل ہوتا ہے [حسب دفعہ ۲۰۵]

۲۲۸ — اگر ایک خطِ مستقیم کی مساوات

$$ل لا + م ما + ا = ۰$$

ہو تو خط کا محل متعین ہوگا اگر ل، م معلوم ہوں ۔ اور ل اور م کی قیمتوں کو بدلنے سے یہ مساوات کسی خطِ مستقیم کو تعبیر کر سکتی ہے۔ مقداروں ل اور م کو جو اس طرح ایک خط کے محل کو متعین کرتی ہیں خط کے **محدد** کہتے ہیں۔

خط ل لا + م ما + ا = ۰ ثابت نقطہ (ا، ب) میں سے گذریگا اگر ل ا + م ب + ا = ۰، اس لیے اس کو **نقطہ کی مساوات** کہتے ہیں۔

اگر ایک خطِ مستقیم کے محدد کسی رشتہ میں مربوط ہوں تو خط ایک منحنی کو لف کرے گا۔ اور وہ مساوات جو رشتہ کو بیان کرتی ہے منحنی کی مماسی مساوات کہلاتی ہے۔

اگر منحنی کی مساوات ن ویں درجہ کی ہو تو منحنی کے ن مماس کسی نقطہ سے کھینچے جا سکتے ہیں۔

تعریف — منحنی کو ن ویں جماعت کا منحنی کہتے ہیں جبکہ اس کے ن مماس کسی نقطہ سے کھینچے جا سکیں۔

ہم دیکھ چکے ہیں [دفعہ ۲۳۷] کہ دوسرے درجہ کی ہر مماسی مساوات

ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے، نیز [۱۷۹] کسی مخروطی کی مماسی مساوات دوسرے درجہ کی ہوتی ہے۔

(۳۲۹) اگر ایک خطِ مستقیم کی مساوات ل لا + م ما + ن = ۰ ہو تو ہم ل، م، ن کو خط کے محدد کہہ سکتے ہیں، اور اگر خط کے محدد کسی متجانس مساوات کو پورا کریں تو خط ایک منحنی کو لف کرے گا اور مساوات کو اس منحنی کی مماسی مساوات کہینگے۔

اگر مخروطی کی مماسی مساوات فہ (ل، م) = ۰ ہو اور مخروطی کے مماس کی مساوات ل۱ لا + م۱ ما + ۱ = ۰ تو نقطہ تماس کی مساوات کو حسب ذیل طریقہ پر معلوم کیا جا سکتا ہے۔ [دیکھو دفعہ ۱۰۸]۔

مساوات

ا(ل - ل۱)(ل - ل۲) + ھ{(ل - ل۱)(م - م۲) + (ل - ل۲)(م - م۱)}

+ ب(م - م۱)(م - م۲) = ال² + ۲ھ ل م + ب م² + ۲گ ل + ۲ف م + ج
. . . . . (۱)

کو جب مختصر کیا جائے تو پہلے درجہ کی ہے اور اس لیے وہ کسی نقطہ کی مساوات ہے۔ اگر ہم ل = ل۱ اور م = م۱ رکھیں تو دائیں جانبی رکن متماثلاً معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن معدوم ہوتا ہے کیونکہ خط (ل۱، م۱) مخروطی کو مس کرتا ہے۔ اس لیے خط (ل۱، م۱) نقطہ (۱) میں سے گذرتا ہے۔ اسی طرح خط (ل۲، م۲) بھی (۱) میں سے گذرتا ہے۔

اس لیے نقطہ (۱) خطوط (ل۱، م۱) اور (ل۲، م۲) کا نقطۂ تقاطع ہے۔

اگر اب مساوات (۱) میں ل۲ = ل۱ اور م۲ = م۱ رکھا جائے تو مماس ل۱ لا + م۱ ما + ۱ = ۰ کے نقطہ تماس کی مساوات حاصل ہوگی۔ یہ مساوات تحویل کے بعد حسب ذیل ہے:

ل(ال۱ + ھ م۱ + گ) + م(ھ ل۱ + ب م۱ + ف) + گ ل۱ + ف م۱ + ج = ۰

اب فرض کرو کہ ل لا + م ما + ا = ۰ مماس نہیں ہے۔
فرض کرو کہ وتر ل لا + م ما + ا = ۰ کے سروں پر کے مماس (ل، م)
(ل، م) ہیں۔
ان مماسوں کے نقاطِ تماس کی مساواتیں

ل (ا ل + ھ م + گ) + م (ھ ل + ب م + ف) + گ ل
+ ف م + ج = ۰، وغیرہ ہیں۔ وہ شرطیں کہ یہ دو نقطے خط ل لا + م ما + ا = ۰
پر ہوں۔

ل (ا ل + ھ م + گ) + م (ھ ل + ب م + ف) + گ ل + ف م
+ ج = ۰ وغیرہ
یعنی
ل (ا ل + ھ م + گ) + م (ھ ل + ب م + ف) + گ ل + ف م
+ ج = ۰ وغیرہ ہیں۔ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خطوط (ل، م) اور
(ل، م) اس نقطہ میں سے گذرتے ہیں جس کی مساوات

ل (ا ل + ھ م + گ) + م (ھ ل + ب م + ف) + گ ل + ف م + ج = ۰

ہے۔ اس لیے وہ خط ل لا + م ما + ا = ۰ کے قطب کی مساوات ہے۔

(۳۳۰) مثال ۔ مخروطی کا مرکز لامتناہی پر کے خط کا قطب ہوتا ہے یعنے خط (۰، ۰)
کا قطب۔

اس لیے مرکز کی مماسی مساوات گ ل + ف م + ج = ۰ ہے۔

۲۳۹ ۔ مخروطی کا مرتب دائرہ معلوم کرنا جبکہ مخروطی کی مماسی مساوات دی گئی ہو۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مماسی مساوات

ا ل^2 + ۲ ھ ل م + ب م^2 + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰

ہے -

حسب دفعہ ۲۳۷، مساوات

و ل^2 + ۲ ھ ل م + ب م^2 - ۲ (گ ل + ف م) (ل لا + م ما)

+ ج (ل لا + م ما)^2 = ۰

سے اُن دو مماسوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو مخصوص نقطہ (لا، ما) سے گزرتے ہیں۔ یہ مماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں گے اگر

$\frac{ل_1}{م_1} \cdot \frac{ل_2}{م_2}$ + ۱ = ۰۔ یعنے اگر ل^2 اور م^2 کے سروں کا مجموعہ صفر ہو۔

پس اگر (لا، ما) مخروطی کے مرتب دائرہ پر ہو تو حاصل ہونا چاہئے

و - ۲ گ لا + ج لا^2 + ب - ۲ ف ما + ج ما^2 = ۰، ..... (۱)

مخروطی کا مرکز جو مرتب دائرہ کے مرکز پر منطبق ہے نقطہ ($\frac{گ}{ج}$، $\frac{ف}{ج}$) ہے۔

اگر ج = ۰ تو مساوات (۱) ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

منحنی اِس صورت میں ایک مکافی ہے اور اِس کے مرتب کی مساوات

۲ گ لا + ۲ ف ما - و - ب = ۰، ..... (۲)

ہے -

اوپر ہم نے محوروں کو قائم فرض کیا ہے، لیکن اگر محددوں کے محاور ایک دوسرے سے زاویہ سہ پر مائل ہوں تو وہ شرط کہ خطوطِ مستقیم علی القوائم ہوں

و - ۲ گ لا + ج لا^2 + ب - ۲ ف ما + ج ما^2 + ۲ جم سہ (ھ - گ ما

- ف لا + ج لا ما) = ۰

ہے -

اِس دائرہ کا مرکز ($\frac{گ}{ج}$، $\frac{ف}{ج}$) ہے۔

(۴۳۱)

پس خواہ محاور قائم ہوں یا مائل، مخروطی کا مرکز جو مرتب دائرہ کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے $\left(\frac{-\text{گ}}{\text{ج}}، \frac{-\text{ف}}{\text{ج}}\right)$ ہے حسب دفعہ ۱۲۷۔

۲۴۰۔ مخروطی کے ماسکے معلوم کرنا جبکہ مخروطی کی مماسی مساوات دی گئی ہو۔

فرض کرو کہ ماسکوں کا زوج $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ ہے خواہ یہ دونوں حقیقی ہوں یا دونوں خیالی۔ تب کسی مماس $\text{ل لا} + \text{م ما} + 1 = 0$ پر کے عمودوں کا حاصل ضرب ایک نیم محور کے مربع کے مساوی ہونا چاہئے۔ پس

$$(\text{ل لا}_1 + \text{م ما}_1 + 1)(\text{ل لا}_2 + \text{م ما}_2 + 1) - \text{ر}^2(\text{ل}^2 + \text{م}^2) = 0، \quad \ldots\ldots (1)$$

چونکہ یہ ل اور م کی ان تمام قیمتوں کے لیے درست ہے جو دی گئی مماسی مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لیے مساوات (۱) مساوات

$$\text{ا ل}^2 + 2\text{ھ ل م} + \text{ب م}^2 + 2\text{گ ل} + 2\text{ف م} + \text{ج} = 0، \quad \ldots\ldots (2)$$

کے معادل ہونی چاہئے۔ اس لیے

$$\frac{\text{لا}_1\text{لا}_2 - \text{ر}^2}{\text{ا}} = \frac{\text{لا}_1\text{ما}_2 + \text{لا}_2\text{ما}_1}{2\text{ھ}} = \frac{\text{ما}_1\text{ما}_2 - \text{ر}^2}{\text{ب}} = \frac{\text{لا}_1 + \text{لا}_2}{2\text{گ}}$$

$$= \frac{\text{ما}_1 + \text{ما}_2}{2\text{ف}} = \frac{1}{\text{ج}}$$

اس لیے $\text{ج لا}_1\text{لا}_2 - \text{ج ما}_1\text{ما}_2 = \text{ا} - \text{ب}$ اور $\text{ج لا}_1\text{ما}_2 + \text{ج لا}_2\text{ما}_1 = 2\text{ھ}$

نیز $\text{ج لا}_2 = 2\text{گ} - \text{ج لا}_1$ اور $\text{ج ما}_2 = 2\text{ف} - \text{ج ما}_1$

اوپر کی مساواتوں سے $لا_۱$ اور $ما_۱$ کو ساقط کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ
ماسکہ ($لا$ ، $ما$) ، دو مخروطیوں

$$ع لا^۲ - ج ما^۲ - ۲ گ لا + ۲ ف ما + ا - ب = ۰$$
اور
$$ع لا ما - ف لا - گ ما + ھ = ۰$$

پر ہے ۔
اوپر محوروں کو قائم فرض کیا گیا ہے ۔ اگر محاور زاویہ سے پر مائل ہوں تو
مساوات (۱) میں $ل^۲ + م^۲$ کی بجائے $ل^۲ + م^۲ - ۲ ل م جم$ سے رکھنا چاہیے۔

۲۰۱ — اُس مخروطی کے محوروں کے طول معلوم کرنا جس کی ماسی مساوات دی گئی ہو ۔ (۳۰۳۲)

دفعہ ماسبق کے بموجب ، اگر ($لا_۱$ ، $ما_۱$) ، ($لا_۲$ ، $ما_۲$) ماسکوں کا زوج ہو تو

$$ج (ل لا_۱ + م ما_۱ + ۱) (ل لا_۲ + م ما_۲ + ۱) - ج ر^۲ (ل^۲ + م^۲)$$
$$= ا ل^۲ + ۲ ھ ل م + ب م^۲ + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج$$

$$(ا + ج ر^۲) ل^۲ + ۲ ھ ل م + (ب + ج ر^۲) م^۲ + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج$$

دو خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے ، اس کے لیے شرط

$$\begin{vmatrix} ا + ج ر^۲ & ھ & گ \\ ھ & ب + ج ر^۲ & ف \\ گ & ف & ج \end{vmatrix} = ۰$$

یہ وہ مساوات جس سے نیم محوروں کے مربع حاصل ہوتے ہیں
ہے :-

$$ج^۲ ر^۴ + ج ر^۲ (ب ج - ف^۲ + ج ا - گ^۲) + \Delta = ۰$$

۲۴۲ — ہم ماسکی مخروطی ۔ اگر (لا₁، ما₁)، (لا₂، ما₂) ایک مخروطی کے ماسکے ہوں تو اس کی مماسی مساوات

(ل لا₁ + م ما₁ + ۱) (ل لا₂ + م ما₂ + ۱) − ر² (ل² + م²) = ۰

کے معادل ہے۔ پس اگر

ا ل² + ۲ ھ ل م + ب م² + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰

ایک مخروطی کی مماسی مساوات ہو تو کسی ہم ماسکی مخروطی کی مماسی مساوات

ا ل² + ۲ ھ ل م + ب م² + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج + لہ (ل² + م²) = ۰

ہو گی۔

پس فہ (لا، ما) = ۰ کے ہم ماسکی مخروطیوں کی عام مساوات معلوم کرنے کے لیے ہم حسب ذیل طریقہ اختیار کرتے ہیں:

فہ (لا، ما) = ۰ کی مماسی مساوات

ا ل² + ۲ ھ ل م + ب م² + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰

ہے۔ اس لیے کسی ہم ماسکی مخروطی کی مماسی مساوات

(ا + لہ) ل² + ۲ ھ ل م + (ب + لہ) م² + ۲ گ لا + ۲ ف م + ج = ۰

ہے۔ اس لیے متناظر کارتیزی مساوات

اَ لا² + ۲ ھَ لا ما + بَ ما² + ۲ گَ لا + ۲ فَ ما + جَ = ۰

ہے جہاں اَ وغیرہ (۲۴۳)

ا + لہ	ھ	گ
ھ	ب + لہ	ف
گ	ف	ج

سے معلوم کرنے ہونگے۔

پس اَ = ب ج ـ فَ۲ + لہ ج ، ہَ = ف گ ـ ج ہ = ہ د ،
بَ = ب ∆ + لہ ج ، گَ = گ ∆ ـ لہ گ ، دَ = ف ∆ ـ لہ ف ،
اور جَ = ج ∆ + (ا + ب) لہ + لہ۲

اِس لیے فہ (لا ، ما) =۰ کے ہم ماسکی مخروطی کی عام مساوات

∆ فہ (لا ، ما) + لہ د + لہ۲ =۰

ہے جہاں د = ج (لا۲ + ما۲) ـ ۲ گ لا ـ ۲ ف ما + ا + ب

اِسی طرح مرتب دائرہ کی مساوات د =۰ ہے۔

۴۴۳ ۔ اگر دو مخروطیوں کی مماسی مساواتیں س =۰ اور سَ =۰ ہوں تو س ـ لہ سَ =۰ اُس مخروطی کی عام مماسی مساوات ہوگی جو س =۰ اور سَ =۰ کے مشترک مماسوں کو مس کرتا ہے۔

اگر س =۰ ، مساوات ا ل۲ + ۲ ہ ل م + ب م۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج =۰ کو اور سَ =۰ ، مساوات اَ ل۲ + ۲ ہَ ل م + بَ م۲ + ۲ گَ لا + ۲ فَ ما + جَ =۰ کو تعبیر کرے تو س ـ لہ س =۰ ایک مخروطی کی مماسی مساوات ہے اور ل ، م کی کوئی قیمتیں جو س =۰ اور سَ =۰ دونوں کو پورا کریں س ـ لہ سَ =۰ کو بھی پورا کرینگی خواہ لہ کی قیمت کچھ ہی ہو۔

اِس لیے مخروطی س ـ لہ سَ =۰ ، مخروطیوں س =۰ اور سَ =۰ کے مشترک مماسوں کو مس کرتا ہے۔

۴۴۴ ۔ اُن مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرنا جو چار ثابت خطوطِ مستقیم کو مس کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ س۱ = ۰ اور س۲ = ۰ کسی دو مخروطیوں کی مماسی مساواتیں ہیں جو چار خطوں کو مس کرتے ہیں۔ تب س۱ ۔ لہ س۲ = ۰ اُس مخروطی کی عام مماسی مساوات ہے جو اِن خطوں کو مس کرتا ہے۔

اب س۱ ۔ لہ س۲ = ۰ کا مرکز مساواتوں

(ج۱ ۔ لہ ج۲) لا ۔ (گ۱ ۔ لہ گ۲) = ۰، اور (ج۱ ۔ لہ ج۲) ما ۔ (ف۱ ۔ لہ ف۲) = ۰

سے حاصل ہوتا ہے۔

لہ کو ساقط کرنے پر مطلوبہ مساوات

لا (ج۱ ف۲ ۔ ج۲ ف۱) + ما (ج۲ گ۱ ۔ ج۱ گ۲) + ف۱ گ۲ ۔ ف۲ گ۱ = ۰

(۳۴۴) حاصل ہوتی ہے۔

مثال۔ مخروطیوں کا ایک نظام ہے جن میں سے ہر مخروطی چار دئے ہوئے خطوں کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اِن مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

مساوات س۱ + لہ س۲ = ۰ اُس مخروطی کی عام مساوات ہے جو اُن دو مخروطیوں کے مشترک مماسوں کو مس کرتا ہے جن کی مساواتیں س۱ = ۰ اور س۲ = ۰ ہیں۔

اِس خط کے قطب کی مساوات جس کے محدد مخروطی س۱ + لہ س۲ = ۰ کے لحاظ سے لَ، مَ (دفعہ ۲۴۹) ہیں

ل (ا۱ لَ + ہ۱ مَ + گ۱) + م (ہ۱ لَ + ب۱ مَ + ف۱) + گ۱ لَ + ف۱ مَ + ج۱

+ لہ {ل (ا۲ لَ + ہ۲ مَ + گ۲) + م (ہ۲ لَ + ب۲ مَ + ف۲)

$+ گ_۲ لَ + ف_۲ مَ + ج_۲ \} = ۰$

۲ -

اوپر کی مساوات سے ظاہر ہے کہ مخروطی $س_۱ + لہ س_۲ = ۰$ کے لحاظ سے خط (لَ ، مَ) کا قطب اُن نقطوں کو ملانے والے خط پر ہے جن کی مساواتیں

$ل (ا_۱ لَ + ہ_۱ مَ + گ_۱) + م (ہ_۱ لَ + ب_۱ مَ + ف_۱)$

$+ گ_۱ لَ + ف_۱ مَ + ج_۱ = ۰ ،$

اور $ل (ا_۲ لَ + ہ_۲ مَ + گ_۲) + م (ہ_۲ لَ + ب_۲ مَ + ف_۲)$

$+ گ_۲ لَ + ف_۲ مَ + ج_۲ = ۰$

ہیں - پس مسئلہ ثابت ہو چکا -

۲۴۵ - اُن تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو چار دیئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کریں ہم محور ہوتے ہیں -

چار دیئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرنے والے مخروطی کی عام مساوات

$س_۱ - لہ س_۲ = ۰$ ہے جہاں $س_۱ = ۰$ اور $س_۲ = ۰$ نظام کے کسی دو مخروطیوں کی مماسی مساواتیں ہیں -

اب $س_۱ - لہ س_۲ = ۰$ کا مرتب دائرہ

$ا_۱ + ب_۱ - ۲ گ_۱ لا - ۲ ف_۱ ما + ج_۱ (لا^۲ + ما^۲)$

$- لہ \{ ا_۲ + ب_۲ - ۲ گ_۲ لا - ۲ ف_۲ ما + ج_۲ (لا^۲ + ما^۲) \} = ۰$

ہے جو صریحاً ہم محور دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتا ہے جسکا بنیادی محور

$$۲\left(\frac{گ_۱}{ج_۱} - \frac{گ_۲}{ج_۲}\right) لا + ۲\left(\frac{ف_۱}{ج_۱} - \frac{ف_۲}{ج_۲}\right) ما - \frac{ا_۱ + ب_۱}{ج_۱} + \frac{ا_۲ + ب_۲}{ج_۲} = ۰$$

ہے۔

نظام کے مخروطیوں میں سے ایک، مکافی ہے اور اِس مکافی کا مرتب ہم محور نظام کا بنیادی محور ہے۔

۲۴۶ ۔ اُن تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو تین دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کریں ایک ہی دائرہ سے علی القوائم منقطع ہوتے ہیں۔

اُس مخروطی کی عام مساوات جو تین دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرتا ہے

$$ل_۱ س_۱ + ل_۲ س_۲ + ل_۳ س_۳ = ۰ \quad ...(۱)$$

(۳۴۵ ہے جہاں $ل_۱$، $ل_۲$، $ل_۳$ کی کوئی قیمتیں ہو سکتی ہیں اور $س_۱ = ۰$، $س_۲ = ۰$، $س_۳ = ۰$ کوئی تین مخروطی ہیں جو خطوں کو مس کرتے ہیں۔

اب دفعہ ۲۳۹ سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی مخروطی کے مرتب دائرہ کی مساوات، ا، ھ، ب وغیرہ کی رقوم میں، درجۂ اول کی ہوتی ہے۔ اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر $ج_۱ = ۰$، $ج_۲ = ۰$، $ج_۳ = ۰$ علی الترتیب $س_۱ = ۰$، $س_۲ = ۰$، $س_۳ = ۰$ کے مرتب دائرے ہوں تو $ل_۱ س_۱ + ل_۲ س_۲ + ل_۳ س_۳ = ۰$ کے مرتب دائرہ کی مساوات

$$ل_۱ ج_۱ + ل_۲ ج_۲ + ل_۳ ج_۳ = ۰$$

ہوگی۔

اب ایک دائرہ ایسا ہوگا جو کسی تین دائروں $ج_۱ = ۰$، $ج_۲ = ۰$، $ج_۳ = ۰$ کو علی القوائم قطع کرے گا اور دفعہ ۱۸۰ میں معلوم شدہ شرط سے یہ ظاہر ہے کہ اگر ایک دائرہ تین دائروں $ج_۱ = ۰$، $ج_۲ = ۰$، $ج_۳ = ۰$ کو علی القوائم قطع کرے تو وہ نظام

$$ل_۱ ج_۱ + ل_۲ ج_۲ + ل_۳ ج_۳ = ۰$$

کے تمام دائروں کو علی القوائم قطع کرے گا۔

بارھویں باب پر مثالیں

۱ — ایک ناقص کے مُعین مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سِروں پہ ف ن، د م ہیں۔ ف د کا لفاف معلوم کرو۔ نیز اُس خط کا لفاف معلوم کرو جو ن ف اور م د کے وسطی نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

۲ — ا ب، اَ بَ دو دئے ہوئے محدود خطوطِ مستقیم ہیں۔ ایک خط ف فَ اِن خطوں کو اِس طرح قطع کرتا ہے کہ نسبت ا ف : ف ب = اَ فَ : فَ بَ۔ ثابت کرو کہ ف فَ اُس مکافی کو لف کرتا ہے جو دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرتا ہے۔

۳ — و ا ف، و ب ق دو ثابت خطوطِ مستقیم ہیں۔ ا، ب ثابت نقطے ہیں اور ف، ق ایسے ہیں کہ مستطیل ا ف × ب ق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔

۴ — دئے ہوئے نصف قطر کے دائرے ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ دائروں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے

قطبی ایک مکافی کو لف کرتے ہیں۔

۵۔ مستقل نصف قطر کے دائروں کے مرکز ایک دئے ہوئے دائرہ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا لفاف ایک مخروطی ہے۔

(۳۳۶) ۶۔ ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم پر کے کسی نقطہ ف میں سے ایک خط ف ق کھینچا گیا ہے جو ف کے قطبی کے متوازی ہے جہاں یہ قطبی ایک دئے ہوئے مخروطی کے لحاظ سے لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان خطوطِ مستقیم کا لفاف ایک مکافی ہے۔

۷۔ اگر کتاب کے ایک ورق کو اس طرح موڑا جائے کہ اس کا ایک کونہ مقابل کے ضلع پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ سل کا خط ایک مکافی کو مس کرے گا۔

۸۔ ایک ناقص اپنے مرکز کے گرد گردش کرتا ہے۔ ابتدائی محل کے ساتھ تقاطع کے وتروں کا لفاف معلوم کرو۔

۹۔ مستقل مقدار کا ایک زاویہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ساق ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتی ہے اور اس کا سرا ایک ثابت خطِ مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک مکافی کو لف کرتی ہے۔

۱۰۔ ناقص کے ایک وتر ف ق کا وسطی نقطہ ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم پر ہے۔ ثابت کرو کہ وتر ف ق ایک مکافی کو لف کرتا ہے۔

۱۱۔ ایک ناقص کے مزدوج قطروں کا کوئی زوج ایک ثابت دائرہ سے جو ناقص کے ہم مرکز ہے نقطوں ف، ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق ایک متشابہ اور متشابہاً واقع ناقص کو لف کرے گا۔

۱۲۔ اگر ایک خطِ مستقیم پر متعدد ثابت نقطوں سے عمود کھینچے جائیں اور ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۱۳ — ایک مثلث کے ضلع (ممدودہ بضرورت) ایک خط مستقیم سے نقطوں ل، م، ن پر منقطع ہوتے ہیں ۔ اگر ل م : م ن مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط ایک مکافی کو لف کرے گا ۔

۱۴ — ایک ثابت نقطہ میں سے جو ایک مکافی کے محور پر ہے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو منحنی کو ف، ق پر قطع کرتا ہے، اور وہ دائرہ جو ف، ق اور راسکہ س میں سے گذرتا ہے مکافی کو مکرر فَ، قَ پر قطع کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ فَ قَ دوسرے مکافی کو لف کرتا ہے جس کا راسکہ س ہے ۔

۱۵ — اگر کسی مثلث ف ق ر کا مرکز ہندسی جس کو قائم زائد لا ما = ا² میں کھینچا گیا ہو ثابت نقطہ (ع، ہ) پر ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کے ضلع اس مخروطی کو لف کریں گے جس کی مساوات

۴ا² (لا − ۳ع) (ما − ۳ہ) = (۳ہ لا + ۳ع ما − ۹ع ہ − ا²)²

ہے ۔

۱۶ — لا²/ا² + ما²/ب² = ۱ کا کوئی وتر ف ق، ایک ثابت نقطہ (ف، گ) میں سے کھینچا گیا ہے ۔ اگر ف، ق اور ناقص کے مرکز میں سے گذرنے والا دائرہ ناقص کو مکرر ر، س پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ر س مکافی

(ف² + گ²) (لا² + ما²) − {لا ف − ما گ + ۲ا²ب²/(ا² − ب²)}² = ۰

کو مس کرے گا ۔

۱۷ — ما² − ۴ ا لا = ۰ میں مثلث کھینچے گئے ہیں جن کے دو ضلع (لا − ۳ا)² + ما² = ج² کو مس کرتے ہیں ۔ تیسرے ضلع کا لفاف معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ لفاف خود دائرہ ہے اگر ج = ۲ا ۔

۱۸ ــــ اُن تمام مخروطیوں کے متقارب جو دو دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو دئے ہوئے نقطوں پر مس کریں ایک مکافی کو لف کرتے ہیں ۔

۱۹ ــــ ایک مکافی دو ثابت خطوطِ مستقیم کو مس کرتا ہے اور ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس کا مرتب ایک مخروطی کو لف کرتا ہے ۔

۲۰ ــــ ایک ناقص کے نقطوں ف، ق، ر، س پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ اگر وتر ف ق ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے تو وتر ر س ایک مکافی کو لف کرے گا ۔

۲۱ ــــ ایک قائم زائد کسی نصف قطر کے ایک دائرہ سے منقطع ہوتا ہے اور اس دائرہ کا مرکز زائد کے محوروں میں سے ایک پر ایک ثابت نقطہ ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو نقاطِ تقاطع کو ملاتے ہیں یا تو زائد کے ایک محور کے متوازی ہیں یا ایک ثابت مکافی کے مماس ہیں ــــ

۲۲ ــــ ناقصوں کا ایک نظام ہے جن کے محور مقدار اور سمت میں دئے گئے ہیں اور مرکز ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم پر واقع ہیں ۔ ثابت کرو کہ اس نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبی کا لفاف ایک مکافی ہے ــــ

۲۳ ــــ دو مساوی دائروں میں سے ایک ثابت ہے اور دوسرا ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ان کا بنیادی محور ایک مخروطی کو جس کا ماسکہ ثابت نقطہ ہے لف کرتا ہے ۔

۲۴ ــــ اگر ایک ناقص کے مرکز سے سمتی نصف قطروں کے زوج محورِ اعظم کے ساتھ ایسے زاوئے بناتے ہوئے کھینچے جائیں جن کا مجموعہ ایک قائمہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ ان وتروں کے قطبیوں کا طریق جو ان کے سروں کو ملاتے ہیں ایک ہم مرکز زائد ہے اور وتروں کا لفاف ایک قائم زائد ہے ۔

۲۵ ــــ ایک مخروطی کے مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے کسی نقطہ سے ایک محور کے سروں تک خطوط کھینچے گئے ہیں اور یہ خطوط

منحنی کو مکرر نقطوں ف، ق پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف ق کا لفاف ایک قائم زائد ہے۔

۲۶ — ایک ناقص کا دوہرا معین ف ن فَ ہے جو مرکز ج اور ایک راس سے مساوی فاصلہ پر ہے۔ اگر ف، فَ، ج میں سے مکافی کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ مکافی اور ناقص کے دیگر نقاطِ تقاطع کو ملانے والے وتر ایک دوسرے ناقص کو مس کرینگے جو ہر طرح دئے ہوئے ناقص کے مساوی ہوگا۔ (۳۴۸)

۲۷ — دو دئے ہوئے متوازی خطوطِ مستقیم ایک خط سے جو ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے نقطوں ف، ق پر منقطع ہوتا ہے۔ اُس دائرہ کا لفاف معلوم کرو جو ف ق کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو۔

۲۸ — ایک مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام پر انہیں قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن دائروں کا لفاف دوسرا مخروطی ہے۔

۲۹ — ایک مکافی کا ایک وتر ایسا ہے کہ وہ دائرہ جو اِس وتر کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو منحنی کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر ایک دوسرے مکافی کو لف کرتا ہے۔

۳۰ — ایسے مکافی کھینچے گئے ہیں جن میں راس ا مشترک ہے اور جو ایک ثابت نقطہ ف میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن تمام مکافیوں کے مرتبوں کا لفاف ایک مکافی ہے جس کے وترِ خاص کا طول ا ف ہے۔

۳۱ — ایک مکافی کے دو مماس کھینچے گئے ہیں، اگر اِن مماسوں کے درمیانی داخلی اور خارجی زاویوں کے ناصف مخروطی کے دو دئے ہوئے قطروں کے متوازی ہوں تو وترِ تماس ایک زائد کو لف کرے گا جس کے متقارب قطروں کے مزدوج ہوں گے۔

۳۲ — ایک دئے ہوئے مخروطی س کے لحاظ سے ایک نقطہ

ف کا قطبی، دو ثابت خطوطِ مستقیم ا ب، ا ج کو ق، قَ پر قطع کرتا ہے۔ اگر ا ف، ق قَ کی تنصیف کرے تو ثابت کرو کہ ف کا طریق ایک مخروطی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ق قَ کا لفاف دوسرا مخروطی ہے۔

۳۳ — اگر ایک مخروطی پر دو نقطے ایسے لیے جائیں کہ ایک ماسکہ س سے ان کے فاصلوں کا اوسط موسیقی مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ان کو ملانے والا وتر ہمیشہ ایک مخروطی کو مس کرے گا جس کا ایک ماسکہ س ہوگا۔

۳۴ — ایک مکافی کے اُس وتر کا لفاف جس کے محاذی ماسکہ پر ایک قائمہ زاویہ بنے ناقص

$$(\text{لا} - ۳\,\text{ا})^2 + ۲\,\text{ما}^2 = ۸\,\text{ا}^2$$

ہوگا اگر مکافی کی مساوات $\text{ما}^2 - ۴\,\text{ا}\,\text{لا} = ۰$ ہو۔

۳۵ — مخروطی کا ایک وتر منحنی کے ایک دئے ہوئے نقطہ پر مستقل زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر ایک مخروطی کو جو دئے ہوئے مخروطی کے ساتھ دوہرا تماس رکھتا ہے لف کرتا ہے۔ (۳۴۹)

۳۶ — ایک ثابت نقطہ میں سے ایک دائرہ کے دو وتر ایک دوسرے کے علی القوائم کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس چار ضلعی کا ہر ضلع جو ان وتروں کے سروں کو ملانے سے بنتا ہے ایک مخروطی کو لف کرتا ہے جس کے ماسکے ثابت نقطہ اور دائرہ کا مرکز ہیں۔

۳۷ — ایک نقطہ س سے اِس کے قطبی (بلحاظ ایک مکافی کے) پر عمود کھینچا گیا ہے جو مکافی کے محور سے ج پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مکافی کے وہ وتر جن کے محاذی س پر قائمہ زاویہ بنے سب کے سب ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں جس کا مرکز ج ہے۔

۳۸ — ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے وتر جن کے محاذی ایک ثابت نقطہ و پر قائمہ زاویہ بنے دوسرے مخروطی کو لف کرتے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ و لفاف کا ماسکہ ہے اور و کے متناظر مرتب، و کا قطبی (بلحاظ ابتدائی مخروطی) ہے۔

ثابت کرو کہ متشابہ اور متشابہاً واقع ہم مرکز مخروطیوں کے متناظر لفاف ہم ماسکی ہوتے ہیں۔

۳۹ — ایک ثابت خطِ مستقیم ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک نظام کے ایک مخروطی سے نقطوں ف، ق پر ملتا ہے۔ ف اور ق پر عماد کھینچے گئے ہیں۔ اِن کے نقطۂ تقاطع سے کھینچے ہوئے دو دوسرے عمادوں کو ملانے والا خط ر س ہے۔ ثابت کرو کہ ر س کا لفاف ایک مکافی ہے جو محوروں کو مس کرتا ہے۔

۴۰ — ایک خط دو دئے ہوئے دائروں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ خط کے وہ حصے جو دائروں سے منقطع ہوتے ہیں مستقل نسبت میں ہیں تو ثابت کرو کہ خط ایک مخروطی کو لف کرے گا جو ایک مکافی ہوگا اگر نسبت ایک کے مساوی ہو۔

۴۱ — ایک قائم زائد کے وتر جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں ایک ثابت نقطہ و پر اپنے محاذی قائمہ زاوئے بناتے ہیں — ثابت کرو کہ وہ و کے قطبی پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۴۲ — مکافی $ما^{۲} = ۴ ا لا$ کے دو وتر ا ف، ا ق، ا میں سے گذرتے ہوئے کھینچے گئے ہیں اور یہ وتر ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{۴}$ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط ف ق ہمیشہ ناقص

$$(لا - ۱۲ ا)^{۲} + ۸ ما^{۲} = ۱۲۸ ا^{۲}$$

کو مس کرے گا۔

(۴۴۰) ۴۳ — ایک مخروطی پر نقطوں کے ایسے زوج لیے گیے ہیں کہ وہ خطوط جو اِن نقطوں کو ایک دئے ہوئے نقطہ سے ملاتے ہیں ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ وتر جو نقطوں کے کسی ایسے زوج کو ملاتا ہے ایک مخروطی کو لف کرتا ہے جس کا مرتب دائرہ ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۴۴ ــــ مخروطی س کے وتر جو ایک ثابت نقطہ پر اپنے محاذی قائمہ زاویہ بناتے ہیں مخروطی سَ کو لف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر س چار ثابت نقطوں میں سے گذرے تو سَ چار ثابت خطوطِ مستقیم کو مس کریگا۔

۴۵ ــــ ایک مخروطی چار ثابت نقطوں ا، ب، ج، د میں سے گذرتا ہے اور ب اور ج پر اِس کے مماس ج ا اور ج ب (محدودہ) سے نقطوں ف، ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف ق ایک مخروطی کو لف کرتا ہے جو ب ا، ج ا کو مس کرتا ہے۔

۴۶ ــــ اگر ایک وتر ایک دائرہ کو دو ایسے نقطوں ا، ب پر قطع کرے کہ مستطیل و ا × و ب مستقل ہو جہاں و ایک ثابت نقطہ ہے تو ثابت کرو کہ وتر کا لفاف ایک مخروطی ہے جس کا ماسکہ و ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر و ا۲ + و ب۲ مستقل ہو تو وتر ایک مکافی کو لف کریگا۔

۴۷ ــــ ایک دائرہ کے ایک قطر پر دو نقطے ا، اَ مرکز سے مساوی فاصلہ پر لیے گئے ہیں اور وہ خطوط جو اِن نقطوں کو دائرہ کے کسی نقطہ ف سے ملاتے ہیں دائرہ کو مکرر قَ، رَ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ قَ رَ ایک مخروطی کو لف کرتا ہے جس کا امدادی دائرہ دیا ہوا دائرہ ہے۔

۴۸ ــــ $\text{ا}لا^۲ + \text{ب} ما^۲ - ۱ = ۰$ کے وتر جو نقطہ (ء، بہ) پر اپنے محاذی قائمہ زاویہ بناتے ہیں ایک مخروطی کو لف کرتے ہیں جس کے اعظم امدادی دائرے کی مساوات

$$(\text{ا} + \text{ب})(لا^۲ + ما^۲) - ۲\,\text{ب}\,ء\,لا - ۲\,\text{ا}\,بہ\,ما + \text{ب}\,ء^۲ + \text{ا}\,بہ^۲ - ۱ = ۰$$

ہے۔

۴۹ ــــ دو دئے ہوئے دائروں میں سے ایک پر نقطہ ف اور دوسرے پر نقطہ ق لیے گئے ہیں ایسے کہ ف اور ق پر کے مماس عمود وار ہیں۔ ثابت کرو کہ ف ق ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔

۵۰ ــــ ایک مخروطی کو ایک دئے ہوئے مثلث میں کھینچا گیا ہے اور مخروطی کے محوروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

تیرھواں باب

سہ خطی محدد

۲۴۷ — فرض کرو کہ کوئی تین خطوطِ مستقیم لیے گئے ہیں جو ایک نقطہ پر نہیں ملتے اور فرض کرو کہ ان خطوطِ مستقیم سے مثلث ا ب ج بنتا ہے۔ فرض کرو کہ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب سے کسی نقطہ ف کے عمودی فاصلے علی الترتیب عہ، بہ، جہ ہیں، تب عہ، بہ، جہ کو مثلث ا ب ج کے حوالے سے نقطہ ف کے سہ خطی محدد کہا جاتا ہے۔ ہم عہ، بہ، جہ کو مثبت سمجھیں گے جبکہ وہ اسی سمت میں کھینچے گئے ہوں جس میں حوالے کے مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کے عمود کھینچے جاتے ہیں۔

ان عمودی فاصلوں میں سے دو کسی نقطہ کے محل کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں، اس لیے ان تین فاصلوں میں کوئی رشتہ موجود ہونا چاہیے۔ یہ رشتہ

ا عہ + ب بہ + ج جہ = ۲ Δ

ہے جہاں Δ مثلث ا ب ج کا رقبہ ہے۔ یہ رشتہ مثلث کے اندر کسی نقطہ کے لیے صریحاً درست ہے کیونکہ مثلث ب ف ج، ج ف ا، اور ا ف ب باہم ملکر مثلث ا ب ج کے مساوی ہیں۔ اگر عمودوں کی علامتوں کا لحاظ کیا جائے تو یہ بھی آسانی

معلوم ہوسکتا ہے کہ رشتہ بالا مثلث کے باہر یا ضلعوں کے اوپر کسی نقطہ کے لیے درست ہے اگر مختلف صورتوں کے لیے مختلف شکلیں کھینچ لی جائیں۔ پس ثابت ہوا کہ رشتہ ا ع + ب ب + ج ج = ۲ ∆ عام طور پر درست ہے۔

۲۴۸ — رشتہ ا ع + ب ب + ج ج = ۲ ∆ کے ذریعہ کسی مساوات کو ع، ب، ج میں متجانس بنایا جا سکتا ہے، اور جب یہ ہو جائے تو ہم نقطہ کے اصلی محددوں کو استعمال کرنے کی بجائے اِن کے متناسب کوئی مقداریں استعمال کر سکتے ہیں کیونکہ اگر کوئی قیمتیں ع، ب، ج، ایک متجانس مساوات کو پورا کریں تو قیمتیں ک ع، ک ب، ک ج بھی اُس مساوات کو پورا کرینگی۔

(۴۴۲) **۲۴۹** — اگر مثلث کے اندر کسی مبدا کو لیا جائے تو اس نقطہ میں سے گذرنے والے کسی قائم محوروں کے حوالے سے مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں شکل

- لاجم ط$_{۱}$ - ماجب ط$_{۱}$ + ع$_{۱}$ = ۰،

- لاجم ط$_{۲}$ - ماجب ط$_{۲}$ + ع$_{۲}$ = ۰،

- لاجم ط$_{۳}$ - ماجب ط$_{۳}$ + ع$_{۳}$ = ۰،

میں لکھی جا سکتی ہیں جہاں جم(ط$_{۲}$ - ط$_{۳}$) = - جم ا، جم(ط$_{۳}$ - ط$_{۱}$) = - جم ب،

اور جم(ط$_{۱}$ - ط$_{۲}$) = - جم ج

[ہم نے اِن مساواتوں کو اِس طرح لکھا ہے کہ مستقل رقمیں مثبت ہیں، اِس کی وجہ یہ ہے کہ مثلث کے اندر کسی نقطہ سے مقابل کے ضلعوں پر عمود سب کے سب مثبت ہوتے ہیں]۔

پس [دفعہ ۱] حاصل ہوتا ہے

عہ = ع₁ - لا جم ط₁ - ما جب ط₁ ،

بہ = ع₂ - لا جم ط₂ - ما جب ط₂ ،

جہ = ع₃ - لا جم ط₃ - ما جب ط₃ ،

اِن مساواتوں کی مدد سے ہم کسی مساوات کو جو سہ خطی محددوں میں ہو کارٹیزی محددوں کی مساوات میں تحویل کر سکتے ہیں۔

۲۵۰ ۔ درجۂ اول کی ہر مساوات ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰

ہے۔

اگر ہم عہ، بہ، جہ کی بجائے اُن قیمتوں کو درج کریں جو دفعہ ماسبق میں حاصل ہوئی ہیں تو کارٹیزی محددوں کی مساوات جو اِس طرح حاصل ہو گی صریحاً درجہ اول کی ہو گی۔ اِس لیے طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۲۵۱ ۔ ہر خطِ مستقیم کو درجۂ اول کی ایک مساوات سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔

یہ ثابت کرنا کافی ہو گا کہ ل، م، ن کی ایسی قیمتیں ہمیشہ معلوم ہو سکتی ہیں کہ مساوات ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰ جو ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے کسی دو نقطوں کے محددوں سے پوری ہو۔

اگر نقطوں کے محدد (عہ َ، بہ َ، جہ َ) اور (عہ ً، بہ ً، جہ ً) ہوں تو

ل عَہ + م بَہ + ن جَہ = ۰
ل عًہ + م بًہ + ن جًہ = ۰
حاصل ہونا چاہئے اور صریحاً ل، م، ن کی قیمتیں ہمیشہ معلوم کیجاسکتی ہیں جو اِن دو مساواتوں کو پورا کریں۔

۲۵۲ ۔ دو دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرنیوالے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دئے ہوئے نقطوں کے محدد (عَہ، بَہ، جَہ) اور (عًہ، بًہ، جًہ) ہیں۔
کسی خطِ مستقیم کی مساوات
ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰
ہے۔ نقطے (عَہ، بَہ، جَہ) اور (عًہ، بًہ، جًہ) اِس خط پر ہوں گے اگر
ل عَہ + م بَہ + ن جَہ = ۰،
ل عًہ + م بًہ + ن جًہ = ۰،
اِن مساواتوں سے ل، م، ن کو ساقط کرنے پر مطلوبہ مساوات

$$\begin{vmatrix} عہ & بہ & جہ \\ عَہ & بَہ & جَہ \\ عًہ & بًہ & جًہ \end{vmatrix} = ۰$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۳ ۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ تین دئے ہوئے نقطے ایک خطِ مستقیم میں ہوں۔

فرض کرو کہ تین دئے ہوئے نقطے (عَہ، بَہ، جَہ)، (عًہ، بًہ، جًہ) اور

(عہ″، بہ″، جہ″) ہیں۔ اگر یہ نقطے خطِ مستقیم

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰

پر ہیں تو

ل عہَ + م بہَ + ن جہَ = ۰ ،

ل عہ′ + م بہ′ + ن جہ′ = ۰ ،

ل عہ″ + م بہ″ + ن جہ″ = ۰ ،

پس ل، م، ن کو ساقط کرنے پر مطلوبہ شرط

$$\begin{vmatrix} \text{عہَ} & \text{بہَ} & \text{جہَ} \\ \text{عہ′} & \text{بہ′} & \text{جہ′} \\ \text{عہ″} & \text{بہ″} & \text{جہ″} \end{vmatrix} = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۴ ــ دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کا نقطہ تقاطع معلوم کرنا۔ (۴۴)

فرض کرو کہ دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰ ،

اور ل′ عہ + م′ بہ + ن′ جہ = ۰ ،

ہیں۔

اُس نقطہ پر جو دونوں خطوں میں مشترک ہے

$$\frac{\text{عہ}}{\text{م ن′} - \text{م′ ن}} = \frac{\text{بہ}}{\text{ن ل′} - \text{ن′ ل}} = \frac{\text{جہ}}{\text{ل م′} - \text{ل′ م}} ، \ldots\ldots (۱)$$

ان مساواتوں سے محددوں کی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں۔

اگر اصلی قیمتیں مطلوب ہوں تو کسروں (۱) کے نسب نماؤں اور شمار کنندوں کو علی الترتیب ا، ب، ج سے ضرب دیکر جمع کرو، تب ہر کسر

$$\frac{\text{ا عہ} + \text{ب بہ} + \text{ج جہ}}{\text{ا}(\text{م نَ} - \text{مَ ن}) + \text{ب}(\text{ن لَ} - \text{نَ ل}) + \text{ج}(\text{ل مَ} - \text{لَ م})} = \frac{\text{۲}\,\Delta}{\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{لَ} & \text{مَ} & \text{نَ} \\ \text{لً} & \text{مً} & \text{نً} \end{vmatrix}}$$

کے مساوی ہے۔

یہ خطوط حوالے کے مثلث سے محدود فاصلہ پر ایک نقطہ میں نہیں ملیں گے یعنے وہ متوازی ہونگے اگر

$$\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{لَ} & \text{مَ} & \text{نَ} \\ \text{لً} & \text{مً} & \text{نً} \end{vmatrix} = \text{۰}$$

۲۵۵ - وہ شرط معلوم کرنا کہ تین خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر ملیں۔

فرض کرو کہ خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

$$\text{ل}_{\text{۱}}\,\text{عہ} + \text{م}_{\text{۱}}\,\text{بہ} + \text{ن}_{\text{۱}}\,\text{جہ} = \text{۰}،$$

$$\text{ل}_{\text{۲}}\,\text{عہ} + \text{م}_{\text{۲}}\,\text{بہ} + \text{ن}_{\text{۲}}\,\text{جہ} = \text{۰}،$$

$$\text{ل}_{\text{۳}}\,\text{عہ} + \text{م}_{\text{۳}}\,\text{بہ} + \text{ن}_{\text{۳}}\,\text{جہ} = \text{۰}،$$

ہیں۔ یہ خطوط ایک نقطہ پر ملیں گے اگر اوپر کی مساواتیں سب کی سب عہ، بہ، جہ کی اُن ہی قیمتوں سے پوری ہوں۔ پس عہ، بہ، جہ کو ساقط کرنے سے مطلوبہ شرط

$$\begin{vmatrix} \text{ل}_{\text{۱}} & \text{م}_{\text{۱}} & \text{ن}_{\text{۱}} \\ \text{ل}_{\text{۲}} & \text{م}_{\text{۲}} & \text{ن}_{\text{۲}} \\ \text{ل}_{\text{۳}} & \text{م}_{\text{۳}} & \text{ن}_{\text{۳}} \end{vmatrix} = \text{۰}$$

حاصل ہوتی ہے ۔

(۲۴۵) **۲۵۶** ۔ اگر کارٹیزی محددوں میں ایک خطِ مستقیم کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ ہو تو وہ مقطوعے جو خط محوروں پر قطع کرتا ہے علی الترتیب $-\frac{ج}{ا}$ ، $-\frac{ج}{ب}$ ہیں ۔ پس اگر ا اور ب بہت چھوٹے ہوں تو خط مبدا سے بہت دور فاصلہ پر واقع ہوگا ۔ انتہا میں خط کی مساوات شکل

$$۰ \times لا + ۰ \times ما + ج = ۰$$

اختیار کریگی ۔ پس لا انتہا دور اُس خطِ مستقیم کی مساوات جس کو بالعموم لا تناہی پر کا خط کہتے ہیں

$$۰ \times لا + ۰ \times ما + ج = ۰$$

ہے ۔

جب لا تناہی پر کے خط کو دوسرے جملوں کے ساتھ جن میں لا اور ما ہوں استعمال کرنا پڑتا ہے تو اِس کو صرف ج = ۰ لکھتے ہیں ۔

سہ خطی محددوں میں لا تناہی پر کے خط کی مساوات

$$ا عہ + ب بہ + ج جہ = ۰$$

ہے ۔ کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدد ک عہ ، ک بہ ، ک جہ ہوں تو غیر متغیر رشتہ سے ک (ا عہ + ب بہ + ج جہ) = ۲ Δ حاصل ہوتا ہے یا

$$ا عہ + ب بہ + ج جہ = \frac{۲ \Delta}{ک}$$

پس اگر ک لا انتہا بڑا ہو جائے تو انتہا میں رشتہ ا عہ + ب بہ + ج جہ = ۰ حاصل ہوتا ہے ۔ یہ ایک خطی رشتہ ہے جو محدود مقداروں سے جو کسی لا انتہا دور نقطہ کے محددوں کے متناسب ہوں پورا ہوتا ہے لیکن وہ اُن محددوں یا مقداروں سے پورا نہیں ہوتا جو حوالے کے مثلث سے محدود فاصلہ پر کے کسی نقطہ کے محددوں کے متناسب ہوں ۔

۲۵۷ ۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو دئے ہوئے خطوطِ مستقیم متوازی ہوں ۔

فرض کرو کہ خطوط کی مساواتیں

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰،

لَ عہ + مَ بہ + نَ جہ = ۰،

ہیں۔ اگر یہ خطوط متوازی ہیں تو اِن کا نقطۂ تقاطع مبدا سے لامتناہی فاصلہ پر ہوگا اور اِس لیے اِس کے محدد رشتہ

ا عہ + ب بہ + ج جہ = ۰

کو پورا کرینگے ۔

اوپر کی تین مساواتوں سے عہ، بہ، جہ کو ساقط کرنے پر مطلوبہ مساوات (۳۴۶)

ل	م	ن
لَ	مَ	نَ
ا	ب	ج

= ۰

حاصل ہوتی ہے ۔

۲۵۸ ۔ اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے گذرے اور ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی ہو ۔

فرض کرو کہ دئے ہوئے خط کی مساوات

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰

ہے ۔ مطلوبہ خط اِس خط سے وہاں ملتا ہے جہاں

ا عہ + ب بہ + ج جہ = ۰

اِس لیے مطلوبہ مساوات کی شکل

ل عہ + م بہ + ن جہ + لہ (ا عہ + ب بہ + ج جہ) = ۰

ہے - اگر دئے ہوئے نقطہ کے محدد ف، گ، ھ ہوں تو

ل ف + م گ + ن ھ + لہ (ا ف + ب گ + ج ھ) = ۰

بھی حاصل ہونا چاہئے - اِس لیے

ل عہ + م بہ + ن جہ / ل ف + م گ + ن ھ = ا عہ + ب بہ + ج جہ / ا ف + ب گ + ج ھ

اِس کی ایک مخصوص اور مفید صورت اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا ہے جو حوالے کے مثلث کے ایک راس میں سے گذرے اور ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی ہو -

اگر ا راس ہے تو اِس کے محدد (ث، ۰، ۰) ہیں اور مساوات

(م ا - ل ب) بہ + (ن ا - ل ج) جہ = ۰

ہو جاتی ہے -

۲۵۹ - وہ شرط معلوم کرنا کہ دو دئے ہوئے خطوطِ مستقیم ایک دوسرے پر عمود ہوں -

فرض کرو کہ خطوط کی مساواتیں

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰،

لَ عہ + مَ بہ + نَ جہ = ۰،

ہیں - اگر اِن مساواتوں کو دفعہ ۲۴۹ میں حاصل شدہ مساواتوں کے ذریعہ کارٹیزی محددوں میں بیان کیا جائے تو وہ

لا (ل جم طہ۱ + م جم طہ۲ + ن جم طہ۳) + ما (ل جب طہ۱ + م جب طہ۲ + ن جب طہ۳)

- ل ع۱ - م ع۲ - ن ع۳ = ۰،

(۲۴م) اور لا(ل َجم طہ۱ + م َجم طہ۲ + ن َجم طہ۳) + ما(ل َجب طہ۱ + م َجب طہ۲ + ن َجب طہ۳)

- ل َع۱ - م َع۲ - ن َع۳ = ۰

ہو جاتی ہیں۔ اِس لیے یہ خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوں گے اگر

(ل جم طہ۱ + م جم طہ۲ + ن جم طہ۳)(ل َجم طہ۱ + م َجم طہ۲ + ن َجم طہ۳)

+ (ل جب طہ۱ + م جب طہ۲ + ن جب طہ۳)(ل َجب طہ۱ + م َجب طہ۲

+ ن َجب طہ۳) = ۰

یعنے اگر

ل ل َ + م م َ + ن ن َ + (ل م َ + ل َم) جم (طہ۱ ~ طہ۲) + (م ن َ

+ م َن) جم (طہ۲ ~ طہ۳) + (ن ل َ + ن َل) جم (طہ۳ ~ طہ۱) = ۰

لیکن جم (طہ۲ - طہ۳) = - جم ا ، جم (طہ۳ - طہ۱) = - جم ب

اور جم (طہ۱ - طہ۲) = - جم ج

اِس لیے مطلوبہ شرط

ل ل َ + م م َ + ن ن َ - (م ن َ + م َن) جم ا - (ن ل َ + ن َل) جم ب

- (ل م َ + ل َم) جم ج = ۰

ہے۔

اگر خطوط مستقیم مساوات

ءعہ۲ + و بہ۲ + ط جہ۲ + ۲ ءَ بہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ بہ = ۰

سے معلوم ہوں تو اوپر کی شرط سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عمود وار ہونیکی شرط

ء + و + ط - ۲ ءَ جم ا - ۲ وَ جم ب - ۲ طَ جم ج = ۰

ہے۔

۲۶۰ ۔ ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم سے ایک دئے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا ۔

فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات

ل ع + م ب + ن ج = ۰

ہے ۔ اِس مساوات کو کارٹیزی محددوں میں بیان کرنے سے مساوات

لا (ل جم طہ۱ + م جم طہ۲ + ن جم طہ۳) + ما (ل جب طہ۱ + م جب طہ۲ + ن جب طہ۳)

- ل ع۱ - م ع۲ - ن ع۳ = ۰

حاصل ہوتی ہے ۔

اِس خط سے کسی نقطہ کا عمودی فاصلہ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ اِس نقطہ کے محددوں کو مساوات کی دائیں جانب کے جمائیں درج کرکے لا اور ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر المربع سے تقسیم کیا جائے ۔ اِس کے بعد اگر اِس کو پھر سہ خطی محددوں میں بیان کیا جائے تو نقطہ (ف، گ، ھ) سے دئے ہوئے خط پر عمود کا طول (۳۴۸)

$$\frac{\text{ل ف + م گ + ن ھ}}{\sqrt{(\text{ل جم طہ}_1\text{ + م جم طہ}_2\text{ + ن جم طہ}_3)^2 + (\text{ل جب طہ}_1\text{ + م جب طہ}_2\text{ + ن جب طہ}_3)^2}}$$

حاصل ہوگا ۔ اِس کسر کا نسب نما

ل۲ + م۲ + ن۲ + ۲ م ن جم (طہ۲ - طہ۳) + ۲ ن ل جم (طہ۳ - طہ۱) + ۲ ل م جم (طہ۱ - طہ۲)

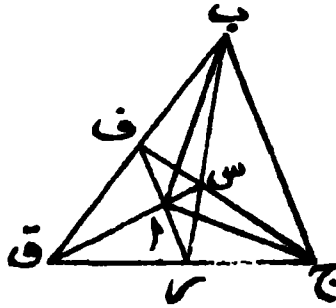
یا ل۲ + م۲ + ن۲ - ۲ م ن جم ا - ۲ ن ل جم ب - ۲ ل م جم ج

کا جذر المربع ہے۔

پس عمود کا طول

$$= \frac{\text{ل ف + م گ + ن ﮪ}}{\sqrt{\text{ل}^2 + \text{م}^2 + \text{ن}^2 - 2\text{م ن جم ا} - 2\text{ن ل جم ب} - 2\text{ل م جم ج}}}$$

۲۶۱ ۔ ثابت کرو کہ کسی چار نقطوں کے محدد شکل ± ف ± گ ± ﮪ میں بیان کئے جا سکتے ہیں ۔

فرض کرو کہ چار نقطے ف، ق، ر، س ہیں ۔

اِن چار نقطوں میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط اور دوسرے دو نقطوں کو ملانے والے خط کے نقطۂ تقاطع کو چار زاوئی کا وتری نقطہ کہتے ہیں ۔ اِس طرح تین وتری نقطے ہوتے ہیں، یعنے ا، ب، ج (شکل)۔
فرض کرو کہ ا ب ج کو حوالہ کا مثلث قرار دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ ف کے محدد ف، گ، ﮪ ہیں ۔

تب ا ف کی مساوات $\frac{\text{ب}}{\text{گ}} = \frac{\text{ج}}{\text{ﮪ}}$ ہوگی ۔

پنسل ا ب، ا س، ا ج، ا ف موسیقی ہے [دفعہ ۵۹] اور ا ب، ا ج کی مساواتیں ج = ۰، ب = ۰ ہیں اور ا ف کی مساوات $\frac{\text{ب}}{\text{گ}} = \frac{\text{ج}}{\text{ﮪ}}$ معلوم

ہوئی ہے۔ اسلیے اس کی مساوات $\frac{ب}{گ} = \frac{جہ}{ہ}$ ہوگی۔ [دفعہ ۵۶]

ج ف کی مساوات $\frac{عہ}{ف} = \frac{ب}{گ}$

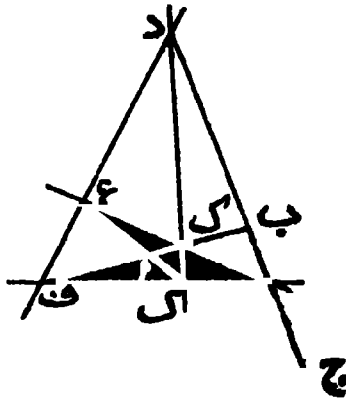
اِس لیے اس اور ج ف جس نقطہ پر متقاطع ہوتے ہیں وہاں یعنے س پر

$$\frac{عہ}{ف} = \frac{ب}{گ} = \frac{جہ}{ہ}$$

اس لیے س کے محدد ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔
اسی طرح ر کے محدد – ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔
اسی طرح ق کے محدد ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔

۲۶۲ ـ ثابت کرو کہ کسی چار خطوطِ مستقیم کی مساواتیں شکل ل عہ ± م بہ ± ن جہ = ۰ میں بیان ہوسکتی ہیں۔

فرض کرو کہ د ع ف، د ک گ، ع ک ہ، ف گ ہ چار خطوط ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب ج وہ مثلث ہے جو چار ضلعی کے وتروں ف ک، ع گ، اور د ہ سے بنا ہے۔ مثلث ا ب ج کو حوالے کا مثلث قرار دو۔

فرض کرو کہ د ع ف کی مساوات ل عہ+م بہ+ن جہ=۰ ہے۔
تب ا د کی مساوات م بہ+ن جہ=۰ ہے۔ (۴۵۰)

چونکہ پنسل ا د، اب، اھ، اج موسیقی ہے [دفعہ ۵۹] اور

ا د، اب، اج کی مساواتیں علی الترتیب م بہ+ن جہ=۰، جہ=۰،

بہ=۰ ہیں اس لیے اھ کی مساوات [دفعہ ۵۶] م بہ-ن جہ=۰ ہے۔

چونکہ ع وہ نقطہ ہے جو بہ=۰، ل عہ+ن جہ=۰ سے حاصل

ہوتا ہے اور ھ وہ نقطہ ہے جو عہ=۰، م بہ-ن جہ=۰ سے حاصل ہوتا

ہے اسلیے ھ ع کی مساوات

ل عہ-م بہ+ن جہ=۰

ہے۔ اسی طرح ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ د ک کی مساوات

-ل عہ+م بہ+ن جہ=۰

ہے اور ف ھ کی مساوات

ل عہ+م بہ-ن جہ=۰

ہے۔

مثالیں

۱۔ حوالے کے مثلث کے تین زاویوں کے ناصفوں کی مساواتیں

بہ-جہ=۰، جہ-عہ=۰، اور عہ-بہ=۰ ہوتی ہیں۔

۲۔ حوالے کے مثلث کے خطوط وسطی کی مساواتیں ب بہ-ج جہ=۰،

ج جہ-ا عہ=۰، ا عہ-ب بہ=۰ ہوتی ہیں۔

۳۔ اگر حوالے کے مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی اَ، بَ، جَ ہوں تو

بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ کی مساواتیں ب بہ+ج جہ-ا عہ=۰، ج جہ

+ا عہ-ب بہ=۰، اور ا عہ+ب بہ-ج جہ=۰ ہونگی۔

۴۔ اُس خط کی مساوات جو ایک مثلث کے اندرونی اور بیرونی دائرو کے

مرکزوں کو ملاتا ہے

ء(جم ب - جم ج) + ب(جم ج - جم ا) + جہ(جم ا - جم ب) = ۰

ہوتی ہے۔

۵ — اُن چار دائروں کے مرکزوں کے محدد معلوم کرو جو حوالے کے مثلث کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔ نیز اُن چھ خطوں کے نقاط وسطی کے محدد معلوم کرو جو اِن چار مرکزوں کو ملاتے ہیں اور ثابت کرو کہ یہ چھ نقطے ،ب کے سب مساوات

ا ب جہ + ب جہ ء + ج ء ب = ۰

کو پورا کرتے ہیں۔

(۳۵۱) ۶ — اگر ا و، ب و، ج و، مثلث ا ب ج کے ضلعوں سے اَ، بَ، جَ پر ملیں اور اگر بَ جَ، ب ج سے ف پر ملے، جَ اَ، ج ا سے ق پر ملے، اور اَ بَ، ا ب سے ر پر ملے تو ثابت کرو کہ ف، ق، ر ایک خطِ مستقیم پر ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ ب ق، ج ر، ا اَ ایک نقطہ فَ پر ملتے ہیں، ج ر، ا ف، ب بَ ایک نقطہ قَ پر ملتے ہیں، اور ا ف، ب ق، ج جَ ایک نقطہ رَ پر ملتے ہیں۔

۷ — اگر ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے نقاط وسطی اَ، بَ، جَ میں سے خطوط اَ ف، بَ ق، جَ ر ایسے کھینچے جائیں کہ وہ ضلعوں پر عمود اور اِن کے مساوی ہیں تو ثابت کرو کہ ا ف، ب ق، ج ر ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۸ — اگر حوالے کے مثلث کے راسوں سے کسی خطِ مستقیم پر عمود ف، ق، ر ہوں تو ثابت کرو کہ اِس خطِ مستقیم کی مساوات ا ف ء + ب ق ب + ج ر جہ = ۰ ہے۔

۹ — اگر دو مثلث ایسے ہوں کہ متناظر راسوں کو ملانے والے خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ متناظر ضلعوں کے تین نقاطِ تقاطع ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوں گے۔

[فرض کرو کہ مثلثوں میں سے ایک مثلث ا ب ج کے حوالے سے نقطہ کے محدد ف، گ، ھ ہیں۔ تب دوسرے مثلث اَ بَ جَ کے راسوں کے محدد علی الترتیب (ف، گ، ھ)، (ف، گَ، ھ) اور (ف، گَ، ھَ) لیے جا سکتے ہیں۔ بَ جَ، ب ج کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں عہ = ۰ اور $\frac{بہ}{گ - گَ}$

$+ \frac{جہ}{ھ - ھَ} = ۰$ اِس لیے متناظر ضلعوں کے نقاطِ تقاطع خط $\frac{عہ}{ف - فَ} + \frac{بہ}{گ - گَ}$

$+ \frac{جہ}{ھ - ھَ} = ۰$ پر واقع ہیں۔]

۱۰۔ مساواتوں عہ جم ا + بہ جم ب + جہ جم ج = ۰، اور $عہ ا^3 +$ $بہ ب^3 + جہ ج^3 = ۰$ سے جو خطوط حاصل ہوتے ہیں متوازی ہوتے ہیں۔

۱۱۔ ایک مثلث کے زاویوں کے تین بیرونی ناصف مقابل کے ضلعوں سے تین ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو ایک خطِ مستقیم میں ہوتے ہیں اور یہ خط حائط مرکز اور اندرونی مرکز کو ملانے والے خط پر عمود ہوتا ہے۔

۱۲۔ خطوط ل عہ ± م بہ ± ن جہ = ۰ سے جو چار ضلعی بنتا ہے اِسکے تین وتروں کے نقاط وسطی میں سے گذرنیوالے خط کی مساوات $\frac{ل^2 عہ}{ا} + \frac{م^2 بہ}{ب}$

$+ \frac{ن^2 جہ}{ج} = ۰$ ہوتی ہے۔

۱۳۔ اگر مثلث ا ب ج کا حائط مرکز س، مرکز عمودی و، نو نقطی مرکز ن، اور مرکز ہندسی ث ہو تو ثابت کرو کہ خط س و ن گ کی مساوات

عہ جب ۲ ا جب (ب - ج) + بہ جب ۲ ب جب (ج - ا)

+ جہ جب ۲ ج جب (ا - ب) = ۰

ہے۔

۲۶۳ ۔ سہ خطی محددوں میں درجۂ دوم کی عام مساوات

۳۵

۶ عہ^2 + و بہ^2 + ط جہ^2 + ۲ ۶َ بہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ بہ = ۰

ایک مخروطی کی مساوات ہوگی کیونکہ اگر اس کو کارتیزی محددوں میں بیان کیا جائے تو درجہ دوم کی مساوات حاصل ہوگی ۔

نیز چونکہ مساوات میں پانچ غیر تابع مستقل ہیں اس لیے ان کو اس طرح متعین کیا جا سکتا ہے کہ مساوات سے تعبیر شدہ منحنی پانچ دیئے ہوئے نقطوں میں سے گذرے اور اس لیے وہ کسی دیئے ہوئے مخروطی پر منطبق ہوگا ۔

۲۶۴ ۔ مخروطی کے کسی نقطہ پر مماس کی مساوات معلوم کرنا ۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

فہ (عہ، بہ، جہ) ≡ ۶ عہ^2 + و بہ^2 + ط جہ^2 + ۲ ۶َ بہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ بہ = ۰

ہے اور فرض کرو کہ اس پر دو نقطوں کے محدد (عہَ، بہَ، جہَ) اور (عہً، بہً، جہً) ہیں ۔

مساوات

۶ (عہ - عہَ)(عہ - عہً) + و (بہ - بہَ)(بہ - بہً) + ط (جہ - جہَ)(جہ - جہً)
+ ۲ ۶َ (بہ - بہَ)(جہ - جہً) + ۲ وَ (جہ - جہَ)(عہ - عہً)
+ ۲ طَ (عہ - عہَ)(بہ - بہً) = فہ (عہ، بہ، جہ)

عہ، بہ، جہ میں فی الحقیقت درجہ اول کی مساوات ہے اور اس لیے وہ کسی خاص خط مستقیم کی مساوات ہے ۔

یہ مساوات قیمتوں عہ = عہَ، بہ = بہَ، جہ = جہَ اور نیز قیمتوں عہ = عہً، بہ = بہً، جہ = جہً سے پوری ہوتی ہے ۔ اس لیے وہ اس خط کی مساوات ہے جو نقطوں (عہَ، بہَ، جہَ)، (عہً، بہً، جہً) کو ملاتا ہے ۔

اب فرض کرو کہ نقطہ (عہً، بہً، جہً)، نقطہ (عہَ، بہَ، جہَ) کی جانب حرکت کرکے بالآخر اس پر منطبق ہوتا ہے تو (عہَ، بہَ، جہَ) پر کے مماس

کی مساوات

۶ عہ عہَ + و بہ بہَ + ط جہ جہَ + ۶َ (بہ جہَ + جہ بہَ)
+ وَ (جہ عہَ + عہ جہَ) + طَ (عہ بہَ + بہ عہَ) = ۰

حاصل ہوتی ہے۔

تفرقی احصاء کی ترقیم استعمال کر کے نقطہ (عہَ، بہَ، جہَ) پر کے مماس کی مساوات کو حسب ذیل شکلوں میں سے کسی ایک میں لکھا جا سکتا ہے: (۲۵۳)

عہ (فر فہ / فر عہَ) + بہ (فر فہ / فر بہَ) + جہ (فر فہ / فر جہَ) = ۰

یا عہَ (فر فہ / فر عہ) + بہَ (فر فہ / فر بہ) + جہَ (فر فہ / فر جہ) = ۰

۲۶۵ — وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خطِ مستقیم ایک مخروطی کو مس کرے۔

فرض کرو کہ دئے ہوئے خط کی مساوات

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰، .... (۱)

ہے۔ اِس خط اور مخروطی کے نقاطِ تقاطع کو راس ۱ سے ملانے والے خطوط مساوات

۶ (م بہ + ن جہ)۲ + و ل۲ بہ۲ + ط ل۲ جہ۲ + ۲ ۶َ ل۲ بہ جہ - ۲ (وَ ل جہ + طَ ل بہ) (م بہ + ن جہ) = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر خط (۱) مماس ہے تو اوپر کی مساوات سے حاصل شدہ خطوط منطبق ہونے چاہئیں جس کے لیے شرط

(۶ م۲ + و ل۲ - ۲ طَ ل م) (۶ ن۲ + ط ل۲ - ۲ وَ ل ن)
- (۶ م ن + ۶َ ل۲ - وَ ل م - طَ ن ل)۲ = ۰

یا $ل^2 (و ط - غ'^2) + م^2 (ط غ - و'^2) + ن^2 (غ و - ط'^2) + ۲ م ن (و' ط' - غ غ')$
$+ ۲ ن ل (ط' غ' - و و') + ۲ ل م (غ' و' - ط ط') = ۰$

یا $غ' ل^2 + و' م^2 + ط' ن^2 + ۲ غ' م ن + ۲ و' ن ل + ۲ ط' ل م = ۰$

ہے جہاں غ' ، و' ، ط' ، غ' ، و' ، ط' مقطع

$$\begin{vmatrix} غ & ط' & و' \\ ط' & و & غ' \\ و' & غ' & ط \end{vmatrix}$$

میں غ ، و ، ط ، غ' ، و' ، ط' کے ہم جزو ضربی ہیں ۔

۲۶۶ ۔ ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبی کی مساوات معلوم کرنا ۔

دفعہ ۷۶ ، ۱۰۰ ، یا ۱۱۹ کے ٹھیک مطابق یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ایک مخروطی کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی کی مساوات اسی شکل کی ہے جو دفعہ ۲۶۴ میں مماس کی مساوات کی ہے ۔ (۳۵۴)

وہ شرط کہ دو نقطے $(عہ_1 ، بہ_1 ، جہ_1)$ ، $(عہ_2 ، بہ_2 ، جہ_2)$ مخروطی کے لحاظ سے مزدوج ہوں اسی طریقہ پر معلوم کی جاسکتی ہے جو دفعہ ۱۸۱ میں ان کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا گیا ہے چنانچہ یہ شرط

$$غ عہ_1 عہ_2 + و بہ_1 بہ_2 + ط جہ_1 جہ_2 + غ' (بہ_1 جہ_2 + بہ_2 جہ_1) + و' (جہ_1 عہ_2 + جہ_2 عہ_1)$$
$$+ ط' (عہ_1 بہ_2 + عہ_2 بہ_1) = ۰$$

ہے ۔

اسی طرح خطوط $ل_1 عہ + م_1 بہ + ن_1 جہ = ۰$ اور $ل_2 عہ + م_2 بہ + ن_2 جہ = ۰$ کے مزدوج ہونے کی شرط

$$غ ل_1 ل_2 + و م_1 م_2 + ط ن_1 ن_2 + غ' (م_1 ن_2 + م_2 ن_1)$$
$$+ و' (ن_1 ل_2 + ن_2 ل_1) + ط' (ل_1 م_2 + ل_2 م_1) = ۰$$

ہے ۔

۲۶۷ — مخروطی کے مرکز کے محدد معلوم کرنا۔

چونکہ مخروطی کے مرکز کا قطبی لا متناہی فاصلہ پر ہوتا ہے اس لیے اس کی مساوات

$$\text{ا عہ.} + \text{ب بہ.} + \text{ج جہ.} = ۰، \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے۔ لیکن [دفعہ ۲۶۶] مرکز کے قطبی کی مساوات

$$\text{عہ}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرعہ.}} + \text{بہ}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فربہ.}} + \text{جہ}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرجہ.}} = ۰$$

ہے جہاں عہ.، بہ.، جہ.، مرکز کے محدد ہیں۔

اِس لیے مرکز کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں

$$\frac{\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرعہ.}}}{\text{ا}} = \frac{\frac{\text{فرفہ}}{\text{فربہ.}}}{\text{ب}} = \frac{\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرجہ.}}}{\text{ج}}$$

حاصل ہوتی ہیں۔

۲۶۸ — وہ شرط معلوم کرنا کہ درجۂ دوم کی عام مساوات سے تعبیر شدہ منحنی مکافی ہو۔

منحنی کے مرکز کے محدد مساواتوں

$$\frac{\text{۶ عہ.} + \text{طَ بہ.} + \text{وَ جہ.}}{\text{ا}} = \frac{\text{طَ عہ.} + \text{و بہ.} + \text{۶َ جہ.}}{\text{ب}} = \frac{\text{وَ عہ.} + \text{۶َ بہ.} + \text{ط جہ.}}{\text{ج}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اِن میں سے ہر کسر کو ــ لہ کے مساوی رکھو تو

$$\text{۶ عہ.} + \text{طَ بہ.} + \text{وَ جہ.} + \text{لہ ا} = ۰،$$

$$\text{طَ عہ.} + \text{و بہ.} + \text{۶َ جہ.} + \text{لہ ب} = ۰،$$

$$\text{وَ عہ.} + \text{۶َ بہ.} + \text{ط جہ.} + \text{لہ ج} = ۰.$$

(۳۵۵) نیز چونکہ مکافی کا مرکز لا تناہی پر ہے اس لیے

ا عہ + ب بہ + ج جہ = ۰

اِن چار مساواتوں سے عہ، بہ، جہ، لہ کو ساقط کرو تو مطلوبہ شرط

ء	طَ	وَ	ا
طَ	و	ءَ	ب
وَ	ءَ	ط	ج
ا	ب	ج	۰

= ۰

حاصل ہوتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ مکافی لا تناہی پر کے خط کو مس کرتا ہے (دفعہ ۲۶۵)۔

۲۶۹ ۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات سے تعبیر شدہ منحنی دو خطوطِ مستقیم ہو سکے۔

مطلوبہ شرط کو حسب دفعہ ۲۷ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ یہ شرط

ء و ط + ۲ ءَ وَ طَ ۔ ء ءَ^۲ ۔ ط طَ^۲ ۔ و وَ^۲ = ۰

ہے یا مقطع کی شکل میں

ء	طَ	وَ
طَ	و	ءَ
وَ	ءَ	ط

= ۰

۲۷۰ ۔ مخروطی کے متقارب معلوم کرنا۔

منحنی کی مساوات اور متقاربوں کی مساوات میں صرف ایک مستقل مقدار کا فرق ہوتا ہے۔

پس اگر منحنی کی مساوات

ء عہ^۲ + و بہ^۲ + ط جہ^۲ + ۲ ءَ بہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ بہ = ۰

ہے تو متقاربوں کی مساوات

ءعہ۲ + و بہ۲ + ط جہ۲ + ۲ ءَ بہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ بہ + لہ (ا عہ + ب بہ + ج جہ)۲ = ۰

ہے۔

لہ کی قیمت کو خطوطِ مستقیم کی شرط

ء + لہ ا۲	طَ + لہ ا ب	وَ + لہ ا ج
طَ + لہ ا ب	و + لہ ب۲	ءَ + لہ ب ج
وَ + لہ ا ج	ءَ + لہ ب ج	ط + لہ ج۲

= ۰

سے متعین کرنا ہوگا۔

وہ رقم جس میں لہ شامل نہیں ہے (۴۵۶)

ء	طَ	وَ
طَ	و	ءَ
وَ	ءَ	ط

ہے۔

لہ کا سر

ا۲	اب	اج
طَ	و	ءَ
وَ	ءَ	ط

+

ء	طَ	وَ
اب	ب۲	بج
وَ	ءَ	ط

+

ء	طَ	وَ
طَ	و	ءَ
اج	بج	ج۲

ہے اور یہ

= −

ء	طَ	وَ	ا
طَ	و	ءَ	ب
وَ	ءَ	ط	ج
ا	ب	ج	۰

لہ۲ اور لہ۳ کے سر دونوں صفر ہیں۔

پس مساوات لہ میں مفرد ہے اور اس لیے (۱) سے متقاربوں کی مساوات

$$\text{ف(عہ، بہ، جہ)}\begin{vmatrix} \text{ع} & \bar{\text{ط}} & \bar{\text{و}} & \text{ا} \\ \bar{\text{ط}} & \text{و} & \bar{\text{ع}} & \text{ب} \\ \bar{\text{و}} & \bar{\text{ع}} & \text{ط} & \text{ج} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & ٠ \end{vmatrix} + (\text{ا عہ} + \text{ب بہ} + \text{ج جہ})^{۲} \begin{vmatrix} \text{ع} & \bar{\text{ط}} & \bar{\text{و}} \\ \bar{\text{ط}} & \text{و} & \bar{\text{ع}} \\ \bar{\text{و}} & \bar{\text{ع}} & \text{ط} \end{vmatrix} = ٠$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۷۱ — وہ شرط معلوم کرنا کہ مخروطی قائم زائد ہو سکے۔

کارٹیزی محددوں میں تبدیل کرو۔ تب مخروطی ایک قائم زائد یا دو عمود وار خطوطِ مستقیم ہوگا اگر لاَ اور ماَ کے سروں کا مجموعہ صفر ہو۔ پس شرط

$$\text{ع} + \text{و} + \text{ط} - ۲\,\bar{\text{ع}}\ \text{جم ا} - ۲\,\bar{\text{و}}\ \text{جم ب} - ۲\,\bar{\text{ط}}\ \text{جم ج} = ٠$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۷۲ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جو حوالے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

اگر مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کے کسی نقطہ ف سے مثلث کے ضلعوں پر تین عمود ف ل، ف م، ف ن کھینچے جائیں جو اِن ضلعوں سے علی الترتیب ل، م، ن پر ملیں تو یہ معلوم ہے کہ یہ تین نقطے ل، م، ن ایک خطِ مستقیم میں ہوتے ہیں۔ (۲۵۷)

فرض کرو کہ مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ ف کے محدد عہ، بہ، جہ ہیں۔

مثلثوں م ف ن، ن ف ل، ل ف م کے رقبے

علی الترتیب $\frac{۱}{۲}$ بہ جہ جب ا، $\frac{۱}{۲}$ جہ عہ جب ب، $\frac{۱}{۲}$ عہ بہ جب ج ہیں۔

چونکہ ل، م، ن، ایک خطِ مستقیم میں ہیں اس لیے ان میں سے ایک مثلث دوسرے دو مثلثوں کے مجموعہ کے مساوی ہے - اسلیے علامت کا لحاظ کرتے ہوئے

به جه جب أ + جه عه جب ب + عه به جب ج = ۰

یا ا ب جه + ب جه عه + ج عه به = ۰

جو مطلوبہ مساوات ہے -

مثال - و سے ایک مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں جو ضلعوں سے د، ع، ف پر ملتے ہیں -

ثابت کرو کہ اگر مثلث د ع ف کا رقبہ مستقل ہو تو و کا طریق ایک دائرہ ہے جو حائط دائرہ کے ہم مرکز ہے -

۲۷۳ - چونکہ درجہ دوم کی رقمیں تمام دائروں کی مساواتوں میں وہی ہوتی ہیں اس لیے اگر کسی ایک دائرہ کی مساوات س = ۰ ہو تو کسی دوسرے دائرہ کی مساوات کو شکل

س + لہ عہ + مہ بہ + نہ جہ = ۰

میں لکھا جا سکتا ہے، یا متجانس شکل

س + (ل عہ + م بہ + ن جہ) (ا عہ + ب بہ + ج جہ) = ۰

میں لکھا جا سکتا ہے -

دائرہ کی عام مساوات کی اس شکل سے یہ واضح ہے کہ لاتناہی پر کا خط تمام دائروں کو ان ہی دو نقطوں (خیالی) پر قطع کرتا ہے جیسا کہ ہم قبل ازیں دیکھ چکے ہیں [دفعہ ۱۹۴] -

۲۷۴ - وہ شرطیں معلوم کرنا کہ درجۂ دوم کی عام مساوات سے تعبیر شدہ منحنی ایک دائرہ ہو سکے -

حوالے کے مثلث کے حائط دائرہ کی مساوات [دفعہ ۲۷۲]

ا به جه + ب جه عه + ج عه به = ۰

ہے۔ اس لیے کسی دوسرے دائرہ کی مساوات [دفعہ ۲۰۲] کی شکل

ا یہ جہ + ب جہ عہ + ج عہ یہ + (ل عہ + م یہ + ن جہ) (ا عہ + ب یہ + ج جہ) = ۰

ہے۔

اگر یہ وہی منحنی ہو جو

ء عہ² + و یہ² + ط جہ² + ۲ ءَ یہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ یہ = ۰ (۵۸)

سے تعبیر ہوا ہے تو لہ کی کسی خاص قیمت کے لیے

لہ ء = ل ا، لہ و = م ب، لہ ط = ن ج،

۲ لہ ءَ = ا + ج م + ب ن، ۲ لہ وَ = ب + ا ن + ج ل، اور ۲ لہ طَ = ج + ب ل + ا م

حاصل ہونا چاہیے۔

پس

۲ ب ج ءَ − ج² و − ب² ط = ۲ ج ا وَ − ا² ط − ج² ء = ۲ ا ب طَ − ب² ء − ا² و

کیونکہ ان میں سے ہر مقدار، ا ب ج / لہ کے مساوی ہے۔

۲۷۵ — وہ شرط معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات سے تعبیر شدہ منحنی ناقص، مکافی، یا زائد ہو سکے۔

اُن خطوں کی مساوات جو راس ج سے منحنی کے لاتناہی پر کے نقطوں تک کھینچے گئے ہوں منحنی کی مساوات اور مساوات ا عہ + ب یہ + ج جہ = ۰ سے جہ کو ساقط کرنے سے معلوم ہو گی۔ اِس لیے مخروطی کے متقاربوں کے متوازی نقطہ ج میں سے گزرنے والے خطوں کی مساوات

ء ج² عہ² + و ج² یہ² + ط (ا عہ + ب یہ)² − ۲ ءَ ج یہ (ا عہ + ب یہ)

$$-۲ وَ ج عہ (ا عہ + ب بہ) + ۲ طَ ج^۲ عہ بہ = ۰$$

ہوگی۔

مخروطی ناقص، مکافی، یا زائد ہوگا بموجب اس کے کہ یہ خطوط خیالی، منطبق، یا حقیقی ہوں، اور یہ خطوط خیالی، منطبق، یا حقیقی ہونگے بموجب اس کے کہ

$$(ط ا ب - غَ ا ج - وَ ب ج + طَ ج^۲)^۲ - (غ ج^۲ + ط ا^۲ - ۲ وَ ا ج)$$
$$\times (و ج^۲ + ط ب^۲ - ۲ غ ب ج)$$

منفی، صفر، یا مثبت ہو۔ یعنے بموجب اس کے کہ

$$ع ا^۲ + و ب^۲ + ط ج^۲ + ۲ غ ب ج + ۲ وَ ج ا + ۲ طَ ا ب$$

مثبت، صفر، یا منفی ہو۔

۲۷۶۔ مماسوں کے اس زوج کی مساوات جو کسی نقطہ سے مخروطی کے کھینچے گئے ہوں دفعہ ۱۸۰ کے طریقہ سے معلوم کیجا سکتی ہے، اور کسی وتر کے سروں پر کے مماسوں کی مساوات دفعہ ۱۸۹ کے طریقہ سے معلوم کیجا سکتی ہے۔

مخروطی کے مرتب دائرہ کی مساوات کو دفعہ ۱۹۰ کے طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

وہ مساواتیں جن سے ماسکے اور مرتب حاصل ہو سکتے ہیں دفعہ ۱۹۴ کے طریقہ سے معلوم کیجا سکتی ہیں۔ (۳۵۹)

ماسکوں کے لیے مساواتیں حسب ذیل حاصل ہونگی:

$$۴ (ب^۲ ط + ج^۲ و - ۲ ب ج غ) فہ (عہ، بہ، جہ) - (ب \frac{فرفہ}{فرجہ} - ج \frac{فرفہ}{فربہ})^۲$$

$$= ۴ (ج^۲ غ + ا^۲ ط - ۲ ج ا وَ) فہ (عہ، بہ، جہ) - (ج \frac{فرفہ}{فرعہ} - ا \frac{فرفہ}{فرجہ})^۲$$

= ۴ (او + ب۲ ع - ۲ ا ب طَ) ف (عہ، بہ، جہ) - (ا فرفہ/فرا - ب فرفہ/فرا)۲

اِن سے ف (عہ، بہ، جہ) کو ساقط کیا جائے تو مخروطی کے محوروں کی مساوات حاصل ہوگی۔

۲۷۷ — مخروطی ع عہ۲ + و بہ۲ + ط جہ۲ + ۲ عَ بہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ بہ = ۰ کے محوروں کے طول معلوم کرنا۔

مخروطی کی مماسی مساوات

ع ل۲ + و م۲ + ط ن۲ + ۲ عَ م ن + ۲ وَ ن ل + ۲ طَ ل م = ۰ ...... (۱)

ہے۔

اب فرض کرو کہ ماسکوں کا زوج (عہ۱، بہ۱، جہ۱) (عہ۲، بہ۲، جہ۲) ہے اور عمود و ا ر محور کا طول ۲ ر ہے۔ پس اگر ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰ مخروطی کا کوئی مماس ہو تو

ر۲ = (ل عہ۱ + م بہ۱ + ن جہ۱) (ل عہ۲ + م بہ۲ + ن جہ۲) / (ل۲ + م۲ + ن۲ - ۲ م ن جم ا - ۲ ن ل جم ب - ۲ ل م جم ج)

پس (ل عہ۱ + م بہ۱ + ن جہ۱) (ل عہ۲ + م بہ۲ + ن جہ۲) - ر۲ (ل۲ + م۲ + ن۲ - ۲ م ن جم ا - ۲ ن ل جم ب - ۲ ل م جم ج)

≡ ل (ع ل۲ + و م۲ + ط ن۲ + ۲ عَ م ن + ۲ وَ ن ل + ۲ طَ ل م)

اس متماثلہ میں ل، م، ن کی بجائے علی الترتیب ا، ب، ج رکھو، تب

۴ Δ۲ = ل (ع ا۲ + و ب۲ + ط ج۲ + ۲ عَ ب ج + ۲ وَ ج ا + ۲ طَ ا ب)

(۲) ....

اور چونکہ

$$ل(ع ل^2 + و م^2 + \cdots) + ر^2 (ل^2 + م^2 + \cdots)$$

خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے اس لیے (۲۶۰)

$$\begin{vmatrix} ل ع + ر^2 & ل ط - ر^2 جم ج & ل و - ر^2 جم ب \\ ل ط - ر^2 جم ج & ل و + ر^2 & ل ع - ر^2 جم ا \\ ل و - ر^2 جم ب & ل ع - ر^2 جم ا & ل ط + ر^2 \end{vmatrix} = ۰$$

جہاں ل (۲) سے معلوم ہوتا ہے۔ اوپر کی مساوات دو درجی ہے کیونکہ $ر^6$ کا سر صریحاً صفر ہے۔ اس سے مخروطی کے محوروں کے مربع معلوم ہوں گے۔

رقبئی محدد

۲۷۸ ـــ کسی نقطہ ف کا محل متعین ہو جائے گا اگر وہ نسبتیں معلوم ہوں جو مثلث ف ب ج، ف ج ا، اور ف ا ب حوالے کے مثلث ا ب ج کے ساتھ رکھتے ہیں۔ اِن نسبتوں کو علی الترتیب لا، ما، ی سے تعبیر کیا جاتا ہے اور اِن کو نقطہ ف کے رقبئی محدد کہا جاتا ہے۔

کسی نقطہ کے رقبئی محدد رشتہ

$$لا + ما + ی = ۱$$

میں مربوط ہوتے ہیں۔

چونکہ $لا = \frac{ا عہ}{۲ \Delta}$، $ما = \frac{ب بہ}{۲ \Delta}$ اور $ی = \frac{ج جہ}{۲ \Delta}$ اس لیے اگر کوئی متجانس مساوات سہ خطی محددوں میں دی گئی ہو تو ہم اس مساوات کو عہ، بہ، جہ کی بجائے علی الترتیب $\frac{لا}{ا}$، $\frac{ما}{ب}$، $\frac{ی}{ج}$ رکھ کر رقبئی محدد میں

مساوات میں فوراً تبدیل کر سکتے ہیں۔ مثالاً لا متناہی پر کے خط کی مساوات رقبتی محددوں میں لا + ما + ی = ۰ ہے۔ لیکن ہم حافظ دائرہ کی رقبتی مساوات کو اس استحالہ کے بغیر ہی معلوم کریں گے۔

۲۷۹ ۔ اس دائرہ کی مساوات رقبتی محددوں میں معلوم کرنا جو حوالے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

اگر ف اس دائرہ پر کوئی نقطہ ہو جو مثلث ا ب ج کے گرد کھینچا گیا ہے تو ٹولمی کے مسئلہ (اقلیدس ششم) کی رو سے

ف ا × ف ب ± ف ب × ف ج ± ف ج × ا ب = ۰ ......(۱)

لیکن چونکہ زاویے ب ف ج، ب ا ج یا تو مساوی ہیں یا متمم اسلئے (۳۶۱)

$$لا = \frac{ف ب × ف ج}{ا ب × ا ج}$$

اسی طرح ما اور ی کے لیے۔ پس لا، ما، ی کی علامتوں کا لحاظ رکھنے سے (۱) سے

$$ا × \frac{ف ا × ف ب × ف ج}{ب ج لا} + ب × \frac{ف ا × ف ب × ف ج}{ج ا ما} + ج \frac{ف ا × ف ب × ف ج}{ا ب ی} = ۰$$

حاصل ہوتا ہے یعنے

$$\frac{ا^۲}{لا} + \frac{ب^۲}{ما} + \frac{ج^۲}{ی} = ۰$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

۲۸۰ ۔ اگر وہ مخروطی جو سہ خطی محددوں میں درجہ دوم کی عام مساوات

$$۶ ع^۲ + و ب^۲ + ط ج^۲ + ۲ ع َ ب ج + ۲ وَ ج ع + ۲ طَ ع ب = ۰$$

سے تعبیر ہوتا ہے وہی ہو جو رقبئی محددوں میں مساوات

$$\text{ل}\,\text{لا}^2 + \text{مہ}\,\text{ما}^2 + \text{نہ}\,\text{ی}^2 + 2\,\text{لَہ}\,\text{ما}\,\text{ی} + 2\,\text{مہَ}\,\text{ی}\,\text{لا} + 2\,\text{نہَ}\,\text{لا}\,\text{ما} = 0$$

سے تعبیر ہوتا ہے تو چونکہ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}\,\text{عہ}} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}\,\text{بہ}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}\,\text{جہ}}$ اِس لیے ہمیں

حاصل ہونا چاہئے

$$\frac{\text{ع}}{\text{ل}\,\text{ا}^2} = \frac{\text{و}}{\text{مہ}\,\text{ب}^2} = \frac{\text{ط}}{\text{نہ}\,\text{ج}^2} = \frac{\text{عَ}}{\text{لَہ}\,\text{ب}\,\text{ج}} = \frac{\text{وَ}}{\text{مہَ}\,\text{ج}\,\text{ا}} = \frac{\text{طَ}}{\text{نہَ}\,\text{ا}\,\text{ب}}$$

پس اگر سہ خطی مساوات کے سروں میں کوئی رشتہ دیا گیا ہو تو اِس کے جواب میں ہم وہ رشتہ معلوم کر سکتے ہیں جو رقبئی مساوات کے سروں کے درمیان موجود ہوتا ہے۔

بہت سی صورتوں میں یہ بات کوئی اہمیت نہیں رکھتی کہ آیا مستعملہ محدد رقبئی ہیں یا سہ خطی لیکن بعض ضابطے اِن دو قسم کے محددوں میں مختلف ہوتے ہیں۔ سب سے زیادہ اہم ضابطے جو رقبئی محددوں میں قابلِ یادداشت ہیں حسبِ ذیل ہیں، اِن ضابطوں کا سہ خطی محددوں کے متناظر ضابطوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے یا انہیں بلاواسطہ بھی معلوم کیا جا سکتا ہے:

۱۔ دو خطوطِ مستقیم

$$\text{ل}_1\,\text{لا} + \text{م}_1\,\text{ما} + \text{ن}_1\,\text{ی} = 0 \quad \text{اور} \quad \text{ل}_2\,\text{لا} + \text{م}_2\,\text{ما} + \text{ن}_2\,\text{ی} = 0$$

علی القوائم ہوں گے اگر

$$\text{ل}_1\text{ل}_2\,\text{ا}^2 + \text{م}_1\text{م}_2\,\text{ب}^2 + \text{ن}_1\text{ن}_2\,\text{ج}^2 - (\text{م}_1\text{ن}_2 + \text{م}_2\text{ن}_1)\,\text{جم}\,\text{ا} - (\text{ن}_1\text{ل}_2 + \text{ن}_2\text{ل}_1)\,\text{جم}\,\text{ب} - (\text{ل}_1\text{م}_2 + \text{ل}_2\text{م}_1)\,\text{جم}\,\text{ج} = 0$$

۲۔ وہ خطوطِ مستقیم جو (۳۶)

$$\text{ع}\,\text{لا}^2 + \text{و}\,\text{ما}^2 + \text{ط}\,\text{ی}^2 + 2\,\text{عَ}\,\text{ما}\,\text{ی} + 2\,\text{وَ}\,\text{ی}\,\text{لا} + 2\,\text{طَ}\,\text{لا}\,\text{ما} = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں علی القوائم ہوں گے اگر

ع ا۲ + و ب۲ + ط ج۲ - ۲ ف ب ج جم ا - ۲ و ج ا جم ب - ۲ ط ا ب جم ج = ۰

۳ - نقطہ (لا، ما، ی) کا عمودی فاصلہ خط ل لا + م ما + ن ی = ۰ سے

$$\frac{(ل لا_1 + م ما_1 + ن ی_1) ۲ \Delta}{\sqrt{\Sigma ل^2 ا^2 - ۲ \Sigma م ن ب ن جم ا}}$$

ہے۔

۴ - مخروطی ع لا۲ + و ما۲ + ط ی۲ + ۲ ف ما ی + ۲ و ی لا + ۲ ط لا ما = ۰ قائم زائد ہوگا (بشمول دو عمودی خطوں کی خاص صورت کے) اگر

$$\Sigma ع ا^2 - ۲ \Sigma ف ب ن جم ا = ۰$$

۵ - دائرہ کے لیے شرطیں ہیں

$$\frac{و + ط - ۲ ف}{ا^2} = \frac{ط + ع - ۲ و}{ب^2} = \frac{ع + و - ۲ ط}{ج^2}$$

۶ - مخروطی کے مرکز کے محدد

$$\frac{فرفہ}{فرلا} = \frac{فرفہ}{فرما} = \frac{فرفہ}{فری}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

حائط مخروطی

۲۸۱ - اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو حوالے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

مخروطی کی عام مساوات

ع عہ۲ + و بہ۲ + ط جہ۲ + ۲ ف بہ جہ + ۲ و جہ عہ + ۲ ط عہ بہ = ۰

ہے۔ مثلث کے راسوں کے محدد

$$\left(\frac{۲\Delta}{ا}، ۰، ۰\right)، \left(۰، \frac{۲\Delta}{ب}، ۰\right) \text{ اور } \left(۰، ۰، \frac{۲\Delta}{ج}\right)$$

ہیں۔ اگر یہ نقطے منحنی پر ہیں تو ع = ۰، و = ۰، اور ط = ۰ حاصل ہونے چاہئیں اور یہ اندراج کرنے سے ظاہر ہے۔

پس حوالے کے مثلث کے حائط مخروطی کی مساوات

$$عَ\,بہ\,جہ + وَ\,جہ\,عہ + طَ\,عہ\,بہ = ۰$$

ہے۔ اس مساوات کو ہم بالعموم

$$لہ\,بہ\,جہ + مہ\,جہ\,عہ + نہ\,عہ\,بہ = ۰$$

لکھیں گے۔

(۳۹۳) **۲۸۲** — اس خط کی مساوات جو دو نقطوں $(عہ_۱، بہ_۱، جہ_۱)$، $(عہ_۲، بہ_۲، جہ_۲)$ کو ملاتا ہے

$$عہ(بہ_۱جہ_۲ - بہ_۲جہ_۱) + بہ(جہ_۱عہ_۲ - جہ_۲عہ_۱) + جہ(عہ_۱بہ_۲ - عہ_۲بہ_۱) = ۰، \quad .... (۱)$$

ہے۔ لیکن اگر یہ دو نقطے مخروطی

$$\frac{لہ}{عہ} + \frac{مہ}{بہ} + \frac{نہ}{جہ} = ۰$$

پر ہوں تو

$$\frac{لہ}{عہ_۱} + \frac{مہ}{بہ_۱} + \frac{نہ}{جہ_۱} = ۰، \text{ اور } \frac{لہ}{عہ_۲} + \frac{مہ}{بہ_۲} + \frac{نہ}{جہ_۲} = ۰$$

اور اس لیے

$$\frac{لہ}{جہ_۱جہ_۲(عہ_۱بہ_۲ - عہ_۲بہ_۱)} = \frac{مہ}{بہ_۱بہ_۲(جہ_۱عہ_۲ - جہ_۲عہ_۱)} = \frac{نہ}{عہ_۱عہ_۲(بہ_۱جہ_۲ - بہ_۲جہ_۱)}$$

پس اس وتر کی مساوات جو مخروطی کے دو نقطوں $(عہ_۱، بہ_۱، جہ_۱)$

(عہ۲، بہ۲، جہ۲) کو ملاتا ہے (۱) سے

$$\frac{\text{ل عہ}}{\text{عہ}_1\text{عہ}_2} + \frac{\text{مہ بہ}}{\text{بہ}_1\text{بہ}_2} + \frac{\text{نہ جہ}}{\text{جہ}_1\text{جہ}_2} = ۰، \quad \ldots\ldots (۲)$$

ہے۔

[بلاشبہ یہ واضح ہے کہ خط (۲) دئے ہوئے دو نقطوں میں سے گذرے گا بشرطیکہ یہ نقطے مخروطی پر ہوں]

(۲) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ (عہ۱، بہ۱، جہ۱) پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{ل عہ}}{\text{عہ}_1^2} + \frac{\text{مہ بہ}}{\text{بہ}_1^2} + \frac{\text{نہ جہ}}{\text{جہ}_1^2} = ۰، \quad \ldots\ldots (۳)$$

ہے۔

اب ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ خط ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰، مخروطی کو مس کرے۔ کیونکہ اگر یہ خط نقطہ (عہ۱، بہ۱، جہ۱) پہ مماس ہو تو (۳) سے

$$\frac{\text{ل عہ}_1^2}{\text{ل}} = \frac{\text{م بہ}_1^2}{\text{مہ}} = \frac{\text{ن جہ}_1^2}{\text{نہ}}$$

لیکن $\frac{\text{ل}}{\text{عہ}_1} + \frac{\text{مہ}}{\text{بہ}_1} + \frac{\text{نہ}}{\text{جہ}_1} = ۰،$ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\sqrt{\text{ل لہ}} + \sqrt{\text{م مہ}} + \sqrt{\text{ن نہ}} = ۰، \quad \ldots\ldots (۴)$$

اندرونی مخروطی

۲۸۳ ـــ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو حوالے کے مثلث کے ضلعوں کو مس کرے۔

مخروطی کی عام مساوات

ع عہ² + و بہ² + ط جہ² + ۲ عَ بہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ بہ = ۰

(۳۶) ہے۔ یہ مخروطی عہ = ۰ کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں

و بہ² + ط جہ² + ۲ عَ بہ جہ = ۰

پس اگر مخروطی عہ = ۰ کو دو منطبق نقطوں پر قطع کرے تو

و ط = عَ² یا عَ = √(وط)

اسی طرح اگر مخروطی مثلث کے دوسرے ضلعوں کو بھی مس کرے تو

وَ = √(ط ع) ، اور طَ = √(ع و)

پس ع، و، ط کی بجائے علی الترتیب ل²، مہ²، نہ² رکھنے سے

ایسی مساوات

ل² عہ² + مہ² بہ² + نہ² جہ² ∓ ۲ مہ نہ بہ جہ ∓ ۲ نہ ل جہ عہ
∓ ۲ ل مہ عہ بہ = ۰

حاصل ہوتی ہے۔

اس مساوات میں مبہم علامتوں میں سے یا تو ایک منفی ہونی چاہیے یا تینوں منفی ہونی چاہئیں، کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو مساوات کا دائیں جانبی رکن ایک کامل مربع ہوگا اور اس صورت میں مخروطی دو منطبق خطوطِ مستقیم ہوگا۔

مساوات کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:۔

√(ل عہ) + √(مہ بہ) + √(نہ جہ) = ۰

۲۸۴ — نقطوں (عہ۱، بہ۱، جہ۱) اور (عہ۲، بہ۲، جہ۲) کو ملانیوالے خط کی مساوات

$$\text{عہ}(\text{بہ}_1\text{جہ}_2 - \text{بہ}_2\text{جہ}_1) + \text{بہ}(\text{جہ}_1\text{عہ}_2 - \text{جہ}_2\text{عہ}_1) + \text{جہ}(\text{عہ}_1\text{بہ}_2 - \text{عہ}_2\text{بہ}_1) = 0 \quad (1)$$

ہے۔ لیکن اگر یہ دو نقطے مخروطی پر ہوں جس کی مساوات

$$\sqrt{\text{ل عہ}} + \sqrt{\text{م بہ}} + \sqrt{\text{ن جہ}} = 0$$

ہے تو

$$\sqrt{\text{ل عہ}_1} + \sqrt{\text{م بہ}_1} + \sqrt{\text{ن جہ}_1} = 0، \quad \sqrt{\text{ل عہ}_2} + \sqrt{\text{م بہ}_2} + \sqrt{\text{ن جہ}_2} = 0$$

اس لیے

$$\frac{\sqrt{\text{ل}}}{\sqrt{\text{بہ}_1\text{جہ}_2} - \sqrt{\text{بہ}_2\text{جہ}_1}} = \frac{\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{جہ}_1\text{عہ}_2} - \sqrt{\text{جہ}_2\text{عہ}_1}} = \frac{\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{عہ}_1\text{بہ}_2} - \sqrt{\text{عہ}_2\text{بہ}_1}}$$

پس (۱) سے اُس وتر کی مساوات جو مخروطی کے نقطوں (عہ۱، بہ۱، جہ۱)، (عہ۲، بہ۲، جہ۲) کو ملاتا ہے

$$\text{عہ}\sqrt{\text{ل}}\left(\sqrt{\text{بہ}_1\text{جہ}_2} + \sqrt{\text{بہ}_2\text{جہ}_1}\right) + \text{بہ}\sqrt{\text{م}}\left(\sqrt{\text{جہ}_1\text{عہ}_2} + \sqrt{\text{جہ}_2\text{عہ}_1}\right)$$
$$+ \text{جہ}\sqrt{\text{ن}}\left(\sqrt{\text{عہ}_1\text{بہ}_2} + \sqrt{\text{عہ}_2\text{بہ}_1}\right) = 0 \quad \ldots (2)$$

ہے۔

(۲) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ (عہ۱، بہ۱، جہ۱) پر مماس کی مساوات (۳۶۵)

$$\text{عہ}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{عہ}_1}} + \text{بہ}\sqrt{\frac{\text{م}}{\text{بہ}_1}} + \text{جہ}\sqrt{\frac{\text{ن}}{\text{جہ}_1}} = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

ہے۔

اب ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ خط ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰
مخروطی کو مس کر سکے۔ کیونکہ اگر وہ نقطہ (عہ۱، بہ۱، جہ۱) پر مماس ہے تو
(۳) سے

$$\text{ل}\sqrt{\frac{\text{عہ}_1}{\text{لہ}}} = \text{م}\sqrt{\frac{\text{بہ}_1}{\text{مہ}}} = \text{ن}\sqrt{\frac{\text{جہ}_1}{\text{نہ}}}$$

لیکن

$$\sqrt{\text{لہ عہ}_1} + \sqrt{\text{مہ بہ}_1} + \sqrt{\text{نہ جہ}_1} = 0$$

اس لیے مطلوبہ شرط

$$\frac{\text{لہ}}{\text{ل}} + \frac{\text{مہ}}{\text{م}} + \frac{\text{نہ}}{\text{ن}} = 0, \quad \ldots\ldots (۴)$$

ہے۔

دفعہ ۲۸۲ اور دفعہ ۲۸۴ سے یہ معلوم ہوگا کہ خط

$$\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} = 0, \quad \ldots\ldots (۱)$$

حائط مخروطی

$$\frac{\text{ل}}{\text{عہ}} + \frac{\text{م}}{\text{بہ}} + \frac{\text{ن}}{\text{جہ}} = 0, \quad \ldots\ldots (۲)$$

کو مس کرتا ہے اگر نقطہ (ل، م، ن) اندرونی دائرہ

$$\sqrt{\text{لہ عہ}} + \sqrt{\text{مہ بہ}} + \sqrt{\text{ن جہ}} = 0, \quad \ldots\ldots (۳)$$

پر ہو۔

نیز خط (۱) اندرونی دائرہ (۳) کو مس کرتا ہے اگر نقطہ (ل، م، ن)
حائط دائرہ (۲) پر ہو۔

وہ مخروطی جو چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذریں

۲۸۵ ۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو چار دئے ہوئے

نقطوں میں سے گذرے۔

اگر چار زاویئی کے وتری نقطے حوالے کے مثلث کے راس ہوں تو چار نقطوں کے محدد ± ف ± گ ± ھ سے حاصل ہوتے ہیں [دفعہ ۲۶۱]۔

اگر یہ چار نقطے اُس مخروطی پر ہوں جس کی مساوات

ء عہ² + و بہ² + ط جہ² + ۲ ءَ بہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ بہ = ۰

ہے تو ہمیں مساواتیں (۳۶۶)

ء ف² + و گ² + ط ھ² ± ۲ ءَ گ ھ ± ۲ وَ ھ ف ± ۲ طَ ف گ = ۰

حاصل ہوتی ہیں۔ اس لیے

ءَ = وَ = طَ = ۰

اس لیے مخروطی کی مساوات ء عہ² + و بہ² + ط جہ² = ۰ ہے معہ اس شرط کے کہ ء ف² + و گ² + ط ھ² = ۰۔

مثال ۱۔ اُن تمام مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

فرض کرو کہ چار نقطے ± ف ± گ ± ھ ہیں۔

کسی مخروطی کی مساوات

ء عہ² + و بہ² + ط جہ² = ۰

ہوگی معہ اس شرط کے کہ

ء ف² + و گ² + ط ھ² = ۰ ......(۱)

مخروطی کے مرکز کے محدد

$$\frac{ء\,عہ}{ا} = \frac{و\,بہ}{ب} = \frac{ط\,جہ}{ج}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اب (۱) میں ء، و، ط کی بجائے اندراج کرو تو مطلوبہ طریق کی مساوات

وف^۲ بہ جہ + ب گ^۲ جہ عہ + ج ھ^۲ عہ بہ = ۰ [دیکھو دفعہ ۲۱۰]
حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۲ — چار ثابت نقطوں میں سے گذرنے والے مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔

مثال ۳ — مخروطیوں کے ایک ایسے نظام کے لحاظ سے جو چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذریں ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطب ایک ثابت نقطہ میں سے گذریں گے۔

مخروطی جو چار دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرتے ہیں

۲۸۶ — اس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو چار دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرے۔

فرض کرو کہ اس مثلث کو جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے، تب [دفعہ ۲۶۲] چار خطوں کی مساواتیں شکل

ل عہ ± م بہ ± ن جہ = ۰

کی ہونگی۔

مخروطی

و عہ^۲ + و بہ^۲ + ط جہ^۲ + ۲ وَ بہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ بہ = ۰ ...(۱)

خط (ل، م، ن) کو مس کریگا اگر و ل^۲ + و م^۲ + ط ن^۲ + ۲ وَ م ن + ۲ وَ ن ل + ۲ طَ ل م = ۰۔

اس لیے اگر مخروطی چاروں خطوں کو مس کرتا ہے تو ہمیں حاصل ہونا چاہئے

وَ = وَ = طَ = ۰۔

یعنے وَ طَ - و وَ = ۰، [۲۶۷]

$$طَ عَ - ووَ = ۰ ،$$

$$عَ وَ - ططَ = ۰ ،$$

$$عَ = وَ = طَ = ۰$$

اگر ایسا نہیں ہے تو (۱) ایک کامل مربع ہے اور اس لیے مخروطی منطبق خطوطِ مستقیم کا ایک زوج ہے۔

پس $عَ = وَ = طَ = ۰$ حاصل ہونے چاہئیں اور تماس کی شرط

$$ل^۲ وط + م^۲ طع + ن^۲ عو = ۰$$

ہے۔ اس لیے ہر مخروطی جو چاروں خطوں کو مس کرتا ہے مساوات

$$ع عہ^۲ + و بہ^۲ + ط جہ^۲ = ۰$$

میں شامل ہے بشرطیکہ $\frac{ل^۲}{ع} + \frac{م^۲}{و} + \frac{ن^۲}{ط} = ۰$۔

مثال ۱۔ اُن مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو چار دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرتے ہیں۔

کوئی مخروطی مساوات

$$ع عہ^۲ + و بہ^۲ + ط جہ^۲ = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے بشرطیکہ $\frac{ل^۲}{ع} + \frac{م^۲}{و} + \frac{ن^۲}{ط} = ۰$۔

مخروطی کے مرکز کے محدد

$$\frac{ع عہ}{ا} = \frac{و بہ}{ب} = \frac{ط جہ}{ج}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس لیے مرکزوں کے طریق کی مساوات

$$\frac{ل^۲ عہ}{ا} + \frac{م^۲ بہ}{ب} + \frac{ن^۲ جہ}{ج} = ۰$$

ہے جو ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

یہ خطِ مستقیم چار ضلعی کے تین وتروں کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔
[دیکھو دفعہ ۲۱۹]

مثال ۲ ـ مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط کے قطب کا طریق ایک خطِ مستقیم ہوتا ہے جہاں مخروطیاں ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے گئے ہیں ۔

مثال ۳ ـ مخروطیوں کا ایک نظام چار ثابت خطوطِ مستقیم کو مس کرتا ہے ۔ اِس نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا لفاف ایک مخروطی ہوگا ۔

مخروطی بحوالہ خود قطبی مثلث

(۳۶۰)

۲۸۷ ـ جب مخروطی کی مساوات شکل ع عہ۲ + و بہ۲ + ط جہ۲ = ۰ کی ہوتی ہے تو حوالے کے مثلث کا ہر راس مقابل کے ضلع کا قطب ہوتا ہے ۔ یہ بڑی آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے اگر ہم مثلث کے کسی راس کے محددوں کو (عہَ ، بہَ ، جہَ) کے قطبی کی مساوات

ع عہَ عہ + و بہَ بہ + ط جہَ جہ = ۰

میں درج کریں ۔

اِس کے بالعکس اگر حوالے کا مثلث خود قطبی ہو تو مخروطی کی مساوات کی شکل ع عہ۲ + و بہ۲ + ط جہ۲ = ۰ ہوگی ۔ کیونکہ عام مساوات سے تعبیر شدہ مخروطی کے لحاظ سے ا ($\frac{\Delta ۲}{ا}$ ، ۰ ، ۰) کے قطبی کی مساوات

ع عہ + طَ بہ + وَ جہ = ۰

ہے ۔ اِس لیے اگر ا کا قطبی ب ج ہے تو طَ = وَ = ۰ ۔ اسی طرح اگر ب کا قطبی ج ا ہے تو وَ = عَ = ۰ ۔ پس عَ ، وَ ، طَ سب صفر ہیں ۔

۲۸۸ ـ اگر دو مخروطی چار حقیقی نقطوں پر متقاطع ہوں اور اِن چار

نقطوں سے بنے ہوئے چار زاویئے کے وتری نقطوں کو حوالے کا مثلث قرار دیا جائے تو اِن دو مخروطیوں کی مساواتیں [دفعہ ۲۸۵] شکل

$$و\,ع^2 + و\,ب^2 + ط\,ج^2 = ۰ \quad \text{اور} \quad وَ\,ع^2 + وَ\,ب^2 + طَ\,ج^2 = ۰$$

کی ہونگی ۔ پس جیسا کہ ہم دفعہ ۲۱۵ میں دیکھ چکے ہیں کوئی دو مخروطی جو چار حقیقی نقطوں پر متقاطع ہوں ایک مشترک خود قطبی مثلث رکھتے ہیں۔
اگر دو مخروطیوں کے چار نقاطِ تقاطع میں) سے دو حقیقی اور دوسرے دو خیالی ہوں تو مشترک خود قطبی مثلث کے دو راس خیالی ہوں گے۔
اگر دو مخروطیوں کے چاروں نقاط تقاطع خیالی ہوں تو ایک حقیقی خود قطبی مثلث ہوگا ' [دیکھو Ferrer's Trilinears, or Solomon's Conic Sections, Art 82]

دو مماس اور اِن کا وترِ تماس

(۳۶۹)

۲۸۹ — جب اُس مثلث کو جو دو مماسوں اور اِن کے وترِ تماس سے بنتا ہے حوالے کے مثلث کے طور پر لیا جاتا ہے تو مخروطی کی مساوات شکل

$$ع^2 - ۴ک\,ب\,ج = ۰ \quad \text{.............} (۱)$$

کی ہوتی ہے۔
یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (۲ک ع ' ک ع^2 ' ۱) ' ع کی تمام قیمتوں کے لیے مخروطی پر ہے۔ اور حسب دفعہ ۱۰۷ یا دفعہ ۱۵۵ اِس نقطہ کو ہم نقطہ "ع" کہہ سکتے ہیں۔
نقطوں ع، ' ع۲ کو ملانے والے وتر کی مساوات

$$\begin{vmatrix} ع & ب & ج \\ ۲ک\,ع_1 & ک\,ع_1^2 & ۱ \\ ۲ک\,ع_2 & ک\,ع_2^2 & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

ہے، اس لیے پھیلانے اور ع‌۱ - ع‌۲ سے تقسیم کرنے پر

(ع‌۱ + ع‌۲) عہ - ۲ بہ - ۲ک ع‌۱ ع‌۲ جہ = ۰، ..... (۲)

اِسلئے "ع‌۱" پر کے مماس کی مساوات

ع‌۱ عہ - بہ - ک ع‌۱^۲ جہ = ۰، .... (۳)

ہے۔

اب وہ خطوط جو ج کو ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰ اور عہ^۲ - ۴ک بہ جہ = ۰ کے نقاطِ تقاطع سے ملاتے ہیں مساوات

ن عہ^۲ + ۴ک بہ (ل عہ + م بہ) = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس لیے وہ شرط کہ ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰ مخروطی کو مس کرے یہ ہے کہ

۴ک م ن - ۴ک^۲ ل^۲ = ۰، یعنے ک ل^۲ = م ن، .....(۴)

یا ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰ کا مقابلہ ع‌۱ پر کے مماس کے ساتھ کرنے سے

ل/ع‌۱ = -م = - ن/(ک ع‌۱^۲)، اِس لیے ک ل^۲ = م ن

مثال ۱۔ اگر ایک مثلث کو ایک مخروطی میں بنایا جائے اور اسکے دو ضلع دئے ہوئے نقطوں میں سے گذریں تو تیسرا ضلع ایک مخروطی کو لف کریگا۔

دو نقطوں کو ملانے والے خط اور اِس خط کے سِروں پر کے مماسوں کو حوالے کے مثلث کے ضلع لو۔

تب مخروطی کی مساوات

عہ^۲ - ۴ک بہ جہ = ۰، ....(۱)

ہوگی اور ثابت نقطوں کو $(\text{۰}، \text{گ}_1، \text{ھ}_1)$، $(\text{۰}، \text{گ}_2، \text{ھ}_2)$ لے سکتے ہیں۔
اگر مثلث کے راس مخروطی پر کے نقطے $\text{ع}_1، \text{ع}_2، \text{ع}_3$ ہوں تو ضلعوں کی مساواتیں

$$(\text{ع}_2 + \text{ع}_3)\,\text{عہ} - 2\,\text{ب} - 2\,\text{ک}\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3\,\text{ج} = 0،$$

$$(\text{ع}_3 + \text{ع}_1)\,\text{عہ} - 2\,\text{ب} - 2\,\text{ک}\,\text{ع}_3\,\text{ع}_1\,\text{ج} = 0،$$

اور $$(\text{ع}_1 + \text{ع}_2)\,\text{عہ} - 2\,\text{ب} - 2\,\text{ک}\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ج} = 0،$$

ہونگی۔ چونکہ اِن میں سے دو ضلع دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں اس لیے

$$\text{گ}_1 + \text{ک}\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ھ}_1 = 0 \quad \text{اور} \quad \text{گ}_2 + \text{ک}\,\text{ع}_1\,\text{ع}_3\,\text{ھ}_2 = 0$$

$$\therefore \quad \text{گ}_1\,\text{ھ}_2\,\text{ع}_2 = \text{گ}_2\,\text{ھ}_1\,\text{ع}_3$$

اِس لیے باقی ضلع کی مساوات کو

$$(\text{گ}_2\,\text{ھ}_1 + \text{گ}_1\,\text{ھ}_2)\,\text{ع}_1\,\text{عہ} - 2\,\text{گ}_1\,\text{ھ}_2\,\text{ب} - 2\,\text{ک}\,\text{گ}_2\,\text{ھ}_1\,\text{ع}_1^2\,\text{ج} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا لفاف، ع_1 کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$16\,\text{ک}\,\text{گ}_1\,\text{گ}_2\,\text{ھ}_1\,\text{ھ}_2\,\text{ب}\,\text{ج} = (\text{گ}_2\,\text{ھ}_1 + \text{گ}_1\,\text{ھ}_2)^2\,\text{عہ}^2$$

ہے۔

مثال ۲ ۔ اگر دو مخروطی ایسے ہوں کہ اِن کے مشترک نقطوں میں سے دو نقطوں پر ایک مخروطی کے مماس دوسرے مخروطی پر متقاطع ہوتے ہیں تو ثابت کرو کہ دوسرے مخروطی میں ایسے چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جن کے ضلع پہلے مخروطی کو مس کریں ۔

دو مماسوں اور ان کے وتر تماس کو حوالے کے مثلث کے ضلع قرار دو۔
تب مخروطیوں کی مساواتوں کو

$$\text{س}_{۱} \equiv \text{عہ}^{۲} - ۴\text{ک بہ جہ} = ۰،$$

$$\text{س}_{۲} \equiv \text{لہ بہ جہ} + \text{مہ جہ عہ} + \text{نہ عہ بہ} = ۰.$$

لکھا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ س۲ میں کھینچے ہوئے کسی چار ضلعی ف ق ر س کے ضلع ف ق، ق ر، اور ر س، مخروطی س۱ کو مس کرتے ہیں اور چار ضلعی کے راس (عہ۱، بہ۱، جہ۱) وغیرہ ہیں۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ س ف بھی س۱ کو مس کرتا ہے

اب ف ق، ق ر، ر س، س ف کی مساواتیں

$$\frac{\text{لہ عہ}}{\text{عہ}_{۱}\text{عہ}_{۲}} + \frac{\text{مہ بہ}}{\text{بہ}_{۱}\text{بہ}_{۲}} + \frac{\text{نہ جہ}}{\text{جہ}_{۱}\text{جہ}_{۲}} = ۰\text{، وغیرہ}$$

ہیں۔ اب چونکہ ف ق، ق ر، اور ر س، مخروطی س۱ کو مس کرتے

ہیں اس لیے

$$\frac{\text{ک لہ}^{۲}}{\text{عہ}_{۱}^{۲}\text{عہ}_{۲}^{۲}} = \frac{\text{مہ نہ}}{\text{بہ}_{۱}\text{بہ}_{۲}\text{جہ}_{۱}\text{جہ}_{۲}}\text{،} \quad \frac{\text{ک لہ}^{۲}}{\text{عہ}_{۲}^{۲}\text{عہ}_{۳}^{۲}} = \frac{\text{مہ نہ}}{\text{بہ}_{۲}\text{بہ}_{۳}\text{جہ}_{۲}\text{جہ}_{۳}}\text{، اور}$$

$$\frac{\text{ک لہ}^{۲}}{\text{عہ}_{۳}^{۲}\text{عہ}_{۴}^{۲}} = \frac{\text{مہ نہ}}{\text{بہ}_{۳}\text{بہ}_{۴}\text{جہ}_{۳}\text{جہ}_{۴}}$$

پہلی اور تیسری مساواتوں کے نظیری ارکان کو ضرب دو اور دوسری مساوات کے نظیری ارکان سے تقسیم کرو تو

$$\frac{\text{ک لہ}^{۲}}{\text{عہ}_{۱}^{۲}\text{عہ}_{۴}^{۲}} = \frac{\text{مہ نہ}}{\text{بہ}_{۱}\text{بہ}_{۴}\text{جہ}_{۱}\text{جہ}_{۴}}$$

اور یہی وہ شرط ہے کہ س ف بھی س۱ کو مس کرے۔

(۱۴۷)

مثال ۳— اگر ایک چار ضلعی ایک مخروطی میں بنایا جائے اور اُسکے ضلع دوسرے مخروطی کو مس کریں تو ثابت کرو کہ ایسے چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے۔

چار ضلعی کے ضلعوں کو ل ع ± م ب ± ن ج = ۰ کیا جا سکتا ہے یا ل ع، م ب، ن ج کی بجائے لا، ما، ی رکھنے سے اِن خطوں کی مساواتیں لا ± ما ± ی = ۰ ہو جاتی ہیں۔

مخروطی

$$\text{س}_1 \equiv \text{ع لا}^2 + \text{و ما}^2 + \text{ط ی}^2 = 0$$

اِن چار خطوں کو مس کریگا اگر وط + ط ع + ع و = ۰، . . . . (۱)

چار ضلعی کے راسوں میں سے چار (۱، ۰، ± ۱) اور (۱، ± ۱، ۰) ہیں اور کوئی مخروطی جو اِن چار نقطوں میں سے گذرے

$$\text{س}_2 \equiv \text{لا}^2 - \text{ما}^2 - \text{ی}^2 + 2\,\text{ع}' \,\text{ما ی} = 0$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اب خطوط

$$(\text{ع} + \text{و})\,\text{ما}^2 + (\text{ع} + \text{ط})\,\text{ی}^2 - 2\,\text{ع ع}'\,\text{ما ی} = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

س۱ اور س۲ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتے ہیں۔

اگر خطوں (۲) میں سے ایک ما + ک ی = ۰ ہو اور س۱ کے لحاظ سے اس کا قطب (۰، ما۱، ی۱) ہو تو و ما۱ ما + ط ی۱ ی = ۰ وہی ہے جو ما + ک ی = ۰ ہے اور اس لیے

$$\text{ک} = \frac{\text{ط ی}_1}{\text{و ما}_1}$$

اِس لیے (۲) سے

$$(\text{ع} + \text{و})\,\text{ط}^2\,\text{ی}_1^2 + (\text{ع} + \text{ط})\,\text{و}^2\,\text{ما}_1^2 + 2\,\text{ع ع}'\,\text{و ط ما}_1\,\text{ی}_1 = 0، \quad \ldots (3)$$

(۳) سے حاصل شدہ دو نقطے، س۲ = ۰ پر ہوں گے اگر (۳) وہی ہو جو ما۱² + ی۱² - ۲ ع' ما۱ ی۱ = ۰ ہے، اس لیے شرطیں یہ ہیں کہ

$$(ع + و) ط^2 = (ع + ط) و^2 = - ع و ط$$

اور یہ شرطیں صریحاً (۱) سے حاصل ہوتی ہیں۔

پس اگر ایک چار ضلعی مخروطی س۲ میں بنایا جائے اور اُس کے ضلع مخروطی س۱ کو مس کریں تو س۱ کے وہ مماس جو س۱ اور س۲ کے تقاطع کے وتروں میں سے دو کے سروں پر کھینچے گئے ہوں س۲ پر ملیں گے۔

اس کے بعد مثال ۲ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ س۲ میں ایسے چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جن کے ضلع س۱ کو مس کریں۔ [نیز دیکھو دفعہ ۳۲۴ مثال ۷]

وہ دائرے جنکا تعلق ایک مثلث سے ہوتا ہے

۲۹۰ — ہم اُس دائرہ کی مساوات معلوم کر چکے ہیں جو حوالے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو یعنی

$$\frac{ا}{ع} + \frac{ب}{ہ} + \frac{ج}{جہ} = ۰$$

اب ہم چند دوسرے دائروں کی مساواتیں معلوم کرینگے جو ایک مثلث سے متعلق ہوتے ہیں۔

(۳۷۲) ا۔ اُن دائروں کی مساواتیں معلوم کرنا جو حوالے کے مثلث کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔

اگر د وہ نقطہ ہو جہاں اندرونی دائرہ ضلع ب ج کو مس کرتا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ

$$د ج = س - ج \quad \text{اور} \quad د ب = س - ب$$

اس لیے ا د کی مساوات

$$\frac{\text{بہ}}{(\text{س} - \text{ج})\ \text{جب ج}} = \frac{\text{جہ}}{(\text{س} - \text{ب})\ \text{جب ب}} \qquad \ldots (۱)$$

ہوگی۔

اب کسی اندرونی مخروطی کی مساوات

$$\sqrt{\text{لہ عہ}} + \sqrt{\text{مہ بہ}} + \sqrt{\text{نہ جہ}} = ۰ \qquad \ldots (۲)$$

ہوتی ہے۔

اُس خط کی مساوات جو ا کو ب ج اور مخروطی کے نقطہ تماس سے ملاتا ہے

$$\sqrt{\text{مہ بہ}} + \sqrt{\text{نہ جہ}} = ۰$$

سے حاصل ہوگی۔

$$\text{مہ بہ} = \text{نہ جہ} \qquad \ldots (۳)$$

پس اگر (۲) اندرونی دائرہ ہے تو (۱) اور (۳) سے

$$\frac{\text{مہ}}{\text{ب}(\text{س} - \text{ب})} = \frac{\text{نہ}}{\text{ج}(\text{س} - \text{ج})}$$

اسی طرح ج ا پر کے نقطہ تماس پر غور کرنے سے

$$\frac{\text{نہ}}{\text{ج}(\text{س} - \text{ج})} = \frac{\text{لہ}}{\text{ا}(\text{س} - \text{ا})}$$

اس لیے اندرونی دائرہ کی مساوات

$$\sqrt{\text{ا}(\text{س} - \text{ا})\ \text{عہ}} + \sqrt{\text{ب}(\text{س} - \text{ب})\ \text{بہ}} + \sqrt{\text{ج}(\text{س} - \text{ج})\ \text{جہ}} = ۰$$

ہے۔

جانبی دائروں کی مساواتیں بھی اسکے مشابہ طریقہ سے معلوم کیجا سکتی ہیں۔

۲ ــ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جس کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود قطبی ہوتا ہے۔

اُن تمام مخروطیوں کی مساواتیں جن کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود قطبی ہے شکل

ع عہ² + و بہ² + ط جہ² = ۰

کی ہیں۔

کسی دائرہ کی مساوات کو شکل

ا بہ جہ + ب جہ عہ + ج عہ بہ + (لہ عہ + مہ بہ + نہ جہ) (ا عہ + ب بہ + ج جہ) = ۰

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اگر اوپر کی دو مساواتیں ایک ہی منحنی کو تعبیر کرتی ہیں تو

ع = لہ ا، و = مہ ب، ط = نہ ج،

ا + مہ ج + نہ ب = ۰، ب + نہ ا + لہ ج = ۰، اور ج + لہ ب + مہ ا = ۰

اس لیے لہ = ـ جم ا، مہ = ـ جم ب، نہ = ـ جم ج

اس لیے مطلوبہ مساوات

ا جم ا × عہ² + ب جم ب × بہ² + ج جم ج × جہ² = ۰

ہے۔

۳ ــ نو نقطی دائرہ کی مساوات معلوم کرنا

فرض کرو کہ اِس دائرہ کی مساوات

ا بہ جہ + ب جہ عہ + ج عہ بہ ـ (لہ عہ + مہ بہ + نہ جہ)(ا عہ + ب بہ + ج جہ) = ۰

ہے۔ یہ دائرہ عہ = ۰ کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں ب بہ = ج جہ

∴ ا ب ج - ۲ (مہ ج + نہ ب) ب ج = ۰

یا $\frac{مہ}{ب} + \frac{نہ}{ج} = \frac{ا^2}{۲ ا ب ج}$

اسی طرح $\frac{نہ}{ج} + \frac{لہ}{ا} = \frac{ب^2}{۲ ا ب ج}$

اور $\frac{لہ}{ا} + \frac{مہ}{ب} = \frac{ج^2}{۲ ا ب ج}$

اس لیے ۲ لہ = جم ا ، ۲ مہ = جم ب ، ۲ نہ = جم ج

اس لیے دائرہ کی مساوات

۲ ا بہ جہ + ۲ ب جہ عہ + ۲ ج عہ بہ

- (عہ جم ا + بہ جم ب + جہ جم ج) (ا عہ + ب بہ + ج جہ) = ۰

یا ا بہ جہ + ب جہ عہ + ج عہ بہ - عہ² ا جم ا - بہ² ب جم ب - جہ² ج جم ج = ۰

ہے۔

اِس مساوات کی شکل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نونقطی دائرہ، حائط دائرہ، اور خود مزدوج دائرہ مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں جس کی مساوات

عہ جم ا + بہ جم ب + جہ جم ج = ۰

ہے۔

(۳۷۴)

مثالیں

۱ - ثابت کرو کہ وہ مخروطی جس کی مساوات

$\sqrt{ا عہ} + \sqrt{ب بہ} + \sqrt{ج جہ} = ۰$

ہے حوالے کے مثلث کے ضلعوں کو اِن کے نقاط وسطی پر مس کرتا ہے۔

۲ - اگر ایک مثلث میں ایک مخروطی کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ

خطوط جو مثلث کے راسوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاطِ تماس سے ملاتے ہیں ہم نقطہ ہیں

۳ ــ مثلث کے خود مزدوج دائرہ کا مرکز مثلث کا عمودی مرکز ہوتا ہے۔

۴ ــ اگر ایک دئے ہوئے مثلث کے گرد قائم زائد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ایسے تمام قائم زائدوں کے مرکزوں کا طریق نو نقطی دائرہ ہے۔

۵ ــ حسب ذیل مخروطیوں کے مرکز معلوم کرو:

(۱) √(ع جم ا) + √(بہ جم ب) + √(ج جم ج) = ۰

(۲) √(لا جب ا) + √(ما جب ب) + √(ی جب ج) = ۰

جواب: (۱) (اَ' بَ' جَ) (۲) (ب + جَ جَ + لا' ا + ب)

۶ ــ ایک مثلث ا ب ج کے گرد ایک مکافی کھینچا گیا ہے اور مکافی کے ا' ب' ج پر کے مماس مثلث اَ بَ جَ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا اَ' ب بَ' ج جَ' اس ناقص پر ایک نقطہ میں ملتے ہیں جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو ان کے نقاط وسطی پر مس کرتا ہے۔

۷ ــ مثلث ا ب ج کے ہر ضلع پر مثلث کے مقابل' مثلث متساوی الساقین کھینچا گیا ہے جس کے قاعدہ پر کا ہر زاویہ طہ کے مساوی ہے اگر ان مثلثوں کے راس د' ع' ف ہوں تو ثابت کرو کہ ا د' ب ع' ج ف' ایک نقطہ و پر ملیں گے اور نیز ثابت کرو کہ طہ کی مختلف قیمتوں کے لیے و کا طریق ایک قائم زائد ہو گا۔

۸ ــ اگر ایک مخروطی مثلث ا ب ج کے گرد کھینچا جائے اور اس کا ایک ماسکہ ا ب ج کے محائط مرکز پر ہو تو ثابت کرو کہ متناظر مرتب خطوط ا عہ ± ب بہ ± ج جہ = ۰ میں سے ایک ہے۔

۹ ــ اگر ایک دائرہ کی مساوات ع عہ² + و بہ² + طہ جہ² + ۲ عَ بہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ بہ = ۰ ہو تو ثابت کرو کہ اس کے لحاظ سے

کسی نقطہ کی طاقت

$$\frac{\text{ف}(\text{ع}،\text{ب}،\text{ج})}{\text{د جب}^2\text{ج} + \text{ط جب}^2\text{ب} - ۲\,\text{ءَ جب ب جب ج}}$$

ہے ۔

۱۰ ــ نقطہ (ف، گ، ھ) میں سے گذرنے والے خطوط او، ب و، ج و، ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کو علی الترتیب نقطوں ل، م، ن پر قطع کرتے ہیں ۔ نیز م ن، ب ج کو ف پر قطع کرتا ہے، ن ل، ج ا کو ق پر قطع کرتا ہے اور ل م، ا ب کو ر پر قطع کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ خطوط م ن، ن ل، ل م اور ف ق ر، دو مخروطیوں

$$\frac{\text{ع}^2}{\text{ف}^2(\text{گ}^2-\text{ھ}^2)} + \frac{\text{ب}^2}{\text{گ}^2(\text{ھ}^2-\text{ف}^2)} + \frac{\text{ج}^2}{\text{ھ}^2(\text{ف}^2-\text{گ}^2)} = 0،$$

$$\frac{\text{ع}^2}{\text{ف}^4(\text{گ}^2-\text{ھ}^2)} + \frac{\text{ب}^2}{\text{گ}^4(\text{ھ}^2-\text{ف}^2)} + \frac{\text{ج}^2}{\text{ھ}^4(\text{ف}^2-\text{گ}^2)} = 0$$

کو مس کرتے ہیں ۔

(۳۷۵) ۱۱ ــ دائرہ ا ب ج کے ا، ب، ج پر کے مماسی ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب سے علی الترتیب نقطوں اَ، بَ، جَ پر ملتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ ا اَ، ب بَ، ج جَ کے وسطی نقطے حائط دائرہ اور نو نقطی دائرہ کے بنیادی محور پر ہیں ۔

۱۲ ــ ایک مثلث کے گرد ایک مکافی کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مکافی کے لحاظ سے مثلث کے اندرونی مرکز کا قطبی اُس دائرہ کو لف کرتا ہے جو مثلث کے تین جانبی دائروں کے مرکزوں میں سے گذرتا ہے ۔

[کوئی مخروطی ل ب ج + م ج ع + ن ع ب = ۰ ہے مع اس شرط کے کہ

$$\sqrt{\text{ا ل}} + \sqrt{\text{ب م}} + \sqrt{\text{ج ن}} = 0، \quad \ldots\ldots(1)$$

(۱، ۱، ۱) کا قطبی

$$\text{ل}(\text{بہ}+\text{جہ})+\text{م}(\text{جہ}+\text{عہ})+\text{ن}(\text{عہ}+\text{بہ})=0، \quad \ldots\ldots (۲)$$

ہے۔

شرط (۱) کے ساتھ (۲) کا الحاق [دفعہ ۲۸۴]

$$\therefore \frac{\text{ا}}{\text{بہ}+\text{جہ}}+\frac{\text{ب}}{\text{جہ}+\text{عہ}}+\frac{\text{ج}}{\text{عہ}+\text{بہ}}=0$$

ہے۔]

۲۹۱ — پاسکل کا مسئلہ۔ اگر ایک مسدس کو ایک مخروطی میں کھینچا جائے تو متقابلہ ضلعوں کے تین زوجوں کے تین نقاطِ تقاطع ایک خطِ مستقیم میں ہونگے۔

فرض کرو کہ مسدس کے راس ا، ف، ب، د، ج، ع ہیں۔ ا ب ج کو حوالے کا مثلث قرار دو اور فرض کرو کہ نقطے د، ع، ف علی الترتیب (عہ'، بہ'، جہ')، (عہ''، بہ''، جہ'')، (عہ'''، بہ'''، جہ''') ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\frac{\text{ل}}{\text{عہ}}+\frac{\text{م}}{\text{بہ}}+\frac{\text{ن}}{\text{جہ}}=0، \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے۔

ب د اور ا ع کی مساواتیں $\frac{\text{عہ}}{\text{عہ}'}=\frac{\text{جہ}}{\text{جہ}'}$ اور $\frac{\text{بہ}}{\text{بہ}''}=\frac{\text{جہ}}{\text{جہ}''}$ ہونگی۔

اس لیے اِنکے نقطۂ تقاطع پر

$$\frac{\text{عہ}}{\frac{\text{عہ}'}{\text{بہ}'}}=\frac{\text{بہ}}{\frac{\text{بہ}''}{\text{جہ}''}}=\frac{\text{جہ}}{۱}$$

اسی طرح ج د اور اف نقطہ $\left(\frac{\text{عہ}'}{\text{بہ}'},\ 1,\ \frac{\text{جہ}'''}{\text{بہ}'''}\right)$ پر ملتے ہیں،

اور ج ع اور ب ع نقطہ $\left(1,\ \frac{\text{بہ}''}{\text{عہ}''},\ \frac{\text{جہ}'''}{\text{عہ}'''}\right)$ پر ملتے ہیں۔

(۳۷۶) یہ تین نقطے ایک خطِ مستقیم میں ہوں گے اگر

$$\begin{vmatrix} \frac{\text{عہ}'}{\text{جہ}'} & \frac{\text{بہ}''}{\text{جہ}''} & 1 \\ \frac{\text{عہ}'}{\text{بہ}'} & 1 & \frac{\text{جہ}'''}{\text{بہ}'''} \\ 1 & \frac{\text{بہ}''}{\text{عہ}''} & \frac{\text{جہ}'''}{\text{عہ}'''} \end{vmatrix} = 0,\ \text{یا اگر}\ \begin{vmatrix} \frac{1}{\text{جہ}'} & \frac{1}{\text{جہ}''} & \frac{1}{\text{جہ}'''} \\ \frac{1}{\text{بہ}'} & \frac{1}{\text{بہ}''} & \frac{1}{\text{بہ}'''} \\ \frac{1}{\text{عہ}'} & \frac{1}{\text{عہ}''} & \frac{1}{\text{عہ}'''} \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots\ldots (2)$$

لیکن چونکہ تین نقطے د، ع، ف، مخروطی (۱) پر ہیں اِسلیے

$$\frac{\text{لہ}}{\text{عہ}'} + \frac{\text{مہ}}{\text{بہ}'} + \frac{\text{نہ}}{\text{جہ}'} = 0,$$

$$\frac{\text{لہ}}{\text{عہ}''} + \frac{\text{مہ}}{\text{بہ}''} + \frac{\text{نہ}}{\text{جہ}''} = 0,$$

اور

$$\frac{\text{لہ}}{\text{عہ}'''} + \frac{\text{مہ}}{\text{بہ}'''} + \frac{\text{نہ}}{\text{جہ}'''} = 0.$$

لہ، مہ، نہ کو ساقط کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ شرط (۲) پوری ہوتی ہے۔ اور اِس لئے مسئلہ ثابت ہے۔ [نیز دیکھو دفعہ ۲۴۳ مثال ۳]۔

چونکہ چھ نقطوں کو ترتیب میں ساٹھ مختلف طریقوں سے لیا جا سکتا ہے اِس لیے مخروطی پر چھ نقطوں کے جواب میں ساٹھ مسدس ہوتے ہیں، اور چونکہ اِن میں سے ہر مسدس کے لیے پیاسکل کا مسئلہ درست ہے اِس لیے مخروطی پر کے چھ نقطوں کے جواب میں ساٹھ پیاسکل خطوط

ہوتے ہیں ۔

۲۹۲ ۔ اگر ایک مسدس ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے تو اس کے ضلعوں کے نقاط تماس اس مسدس کے راس ہوں گے جو مخروطی میں کھینچا گیا ہو ۔ حائط مسدس کا ہر راس، اندرونی مسدس کے متناظر ضلع کا قطب ہوگا، اس لیے حائط مسدس کا ایک وتر یعنے وہ خط جو دو متقابلہ راسوں کو ملاتا ہے اس نقطہ کا قطبی ہوگا جو اندرونی مسدس کے دو متقابلہ ضلعوں کا نقطۂ تقاطع ہے ۔ لیکن اندرونی مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے زوجوں کے تین نقاطِ تقاطع پیاسکال کے مسئلہ کی رُو سے ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں، اس لیے ان کے تین قطبی یعنے حائط مسدس کے تین وتر ایک نقطہ پر ملیں گے ۔ اس سے

(۳۷۰) **بریان کان (Brianchon) کا مسئلہ ثابت ہوتا ہے جو یہ ہے کہ اگر ایک مسدس کو ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے تو اس کے تین وتر ایک نقطہ پر ملیں گے ۔**

۲۹۳ ۔ اگر ایک مخروطی کے پانچ مماس دے گئے ہوں تو ہم ان کے نقاطِ تماس کو بریان کان کے مسئلہ سے معلوم کر سکتے ہیں ۔ فرض کرو کہ دئے ہوئے مماسوں سے جو مخمس بنتا ہے اس کے راس ا، ب، ج، د، ع ہیں ۔ تب اگر اب کا نقطۂ تماس ک ہو تو ا، ک، ب، ج، د، ع، ایک حائط مسدس کے راس ہیں جس کے دو ضلع منطبق ہیں ۔ بریان کان کے مسئلہ کی رو سے دک، اج اور ب ع کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرتا ہے، اس طرح ک معلوم ہو جاتا ہے ۔ دوسرے نقاطِ تماس بھی اسی طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں۔ اسی طرح پیاسکال کے مسئلہ سے ہم پانچ دئے ہوئے نقطوں پر کسی مخروطی کے مماس معلوم کر سکتے ہیں ۔ فرض کرو کہ پانچ

دئے ہوئے نقطے ا، ب، ج، د، ع ہیں اور فرض کرو کہ مخروطی پر ا سے لاانتہا قریب ایک نقطہ ف ہے۔ تب پیاسکال کے مسئلہ سے اب اور د ع، ب ج اور ع ف، ج د اور ف ع کے تین نقاطِ تقاطع ایک خطِ مستقیم پر واقع ہونے چاہئیں۔ پس اگر اب اور د ع، ب ج اور ع ا کے نقاطِ تقاطع کو ملانیوالا خط ج د سے ہ پر ملے تو ا ہ، ا پر کا مماس ہوگا۔ دوسرے مماس بھی اسی طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

مماسی محدد

۲۹۴ — اگر کسی خطِ مستقیم کی سہ خطی یا رقیبی مساوات کے تین مستقل ل، م، ن ہوں تو خط کا محل متعین ہو جائے گا جبکہ ل، م اور ن دئے گئے ہوں۔ اور ل، م، ن کی قیمتوں کو بدلنے سے مساوات کسی خطِ مستقیم کو تعبیر کر سکے گی۔

مقداروں ل، م، ن کو جن سے اس طرح ایک خطِ مستقیم کا محل متعین ہوتا ہے خط کے محدد کہتے ہیں۔

اگر ایک خطِ مستقیم کی مساوات رقیبی محددوں میں

ل لا + م ما + ن ی = ۰

ہو تو حوالے کے مثلث کے راسوں سے اِس خطِ مستقیم پر عمودوں کے طول، ل، م، ن کے متناسب ہوں گے۔ یہ نتیجہ دفعہ ۲۶۰ سے ماخوذ ہوتا ہے لیکن ہم اس کا علٰحدہ ثبوت دینگے۔ (۳۷۸)

فرض کرو کہ حوالے کے مثلث کے راسوں ا، ب، ج سے خطِ مستقیم پر کھینچے ہوئے عمودوں کے طول علی الترتیب ف، ق، ر ہیں۔ فرض کرو کہ خطِ مستقیم ضلع ب ج کو ک پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ک کے محدد (۰، ما، یَ) ہیں۔

تب ق : ر = ب ک : ج ک = ۔ یَ : مَا

لیکن چونکہ ک خط پر ہے اِس لئے م مَا + ن یَ = ۰ اور اسلئے

ق : ر = م : ن

۲۹۵ ۔ اگر حوالے کے مثلث کے راسوں سے ایک خطِ مستقیم پر عمود کھینچے جائیں تو اِن عمودوں کے طولوں کو خط کے محدد کہا جا سکتا ہے۔ اگر اِن میں سے کوئی دو عمود مختلف سمتوں میں ہوں تو یہ سمجھنا ہوگا کہ اِنکی علامتیں مختلف ہیں۔

دفعہ ماسبق سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک خط کی مساوات جبکہ خط کے محدد ف، ق، ر ہوں ف لا + ق ما + ر یَ = ۰ ہے۔

جب ایک خطِ مستقیم پر کھینچے ہوئے تین عمودوں میں سے دو کے طول دئے گئے ہوں تو خط کے دو اور صرف دو محل ہوتے ہیں اور اِس لیے جب خط کے دو محدد دئے جاتے ہیں تو تیسرے محدد کی قیمت دو مخصوص قیمتوں میں سے ایک ہوتی ہے۔ پس ایک خط کے تین محددوں میں کوئی خاص متماثلہ رشتہ ہونا چاہئے اور وہ دوسرے درجہ کا ہونا چاہئے۔

۲۹۶ ۔ وہ متماثلہ رشتہ معلوم کرنا جو کسی خطِ مستقیم کے تین محددوں کے درمیان موجود ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ طہ وہ زاویہ ہے جو خط ضلع ب ا سے بناتا ہے تب

ق ۔ ف = ج جب طہ اور ق ۔ ر = ا جب (طہ + ب)۔ طہ کو ساقط کرنے پر مطلوبہ رشتہ

ا۲ (ق ۔ ف)۲ ۔ ۲ ا ج جم ب (ق ۔ ف) (ق ۔ ر) + ج۲ (ق ۔ ر)۲ = ۴ ۵۲

یعنے ∑ ف۲ ا۲ ۔ ۲ ∑ ق ر ب ج جم ا = ۴ ∆۲

حاصل ہوتا ہے۔

اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے [دفعہ ۲۸۰، ۳] کہ اگر ا، ب، ج سے خط ف لا + ق ما + ر ی = ۰ پر عمودوں کے اصلی طول ف، ق، ر ہوں تو کسی نقطہ (لا، ما، ی) کا عمودی فاصلہ ف لا + ق ما + ر ی ہوگا۔

(۳۷۹) **۲۹۷ —** اگر خط ف لا + ق ما + ر ی = ۰ ایک ثابت نقطہ (ک، گ، ھ) میں سے گذرے تو

ف ک + ق گ + ر ھ = ۰، . . . . (۱)

اِس لیے اُن تمام خطوں کے محدد جو اُس نقطہ میں سے گذرتے ہیں جس کے رقیبی محدد (ک، گ، ھ) ہیں رشتہ (۱) کو پورا کرتے ہیں۔

اِس لیے ایک نقطہ کی مساوات درجۂ اول کی ہوتی ہے۔

۲۹۸ — اگر خط کے محدد کسی رشتہ میں مربوط ہوں تو خط ایک منحنی کو لف کرے گا اور وہ مساوات جو اِس رشتہ کو بیان کرتی ہے منحنی کی مماسی مساوات کہلاتی ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک مخروطی کی مماسی مساوات درجۂ دوم کی ہوتی ہے اور یہ کہ ہر منحنی جس کی مساوات درجۂ دوم کی ہو ایک مخروطی ہوتا ہے۔ اگر سا (ل، م، ن) = ۰ اُس مخروطی کی مماسی مساوات ہو جس کی رقیبی مساوات فہ (لا، ما، ی) = ۰ ہے اور اگر مساوات فہ = ۰ کے سر ع، و، ط، عَ، وَ، طَ ہوں تو مساوات سا = ۰ کے متناظر سر عَ، وَ، طَ، ع، و، ط ہوں گے جو مقطع

ع	طَ	وَ
طَ	و	عَ
وَ	عَ	ط

میں علی الترتیب ء، و، ط، ءَ، وَ، طَ کے صغیرے ہیں - چونکہ ء، و، ط، ءَ، وَ، طَ کا مقطع

$$\begin{vmatrix} ء & ط & وَ \\ طَ & وِ & ء \\ وَ & ءَ & ط \end{vmatrix}$$

میں ء، و، ط، ءَ، وَ، طَ کے صغیروں کے متناسب ہیں اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر سا (ل، م، ن) = ۰ اُس مخروطی کی مماسی مساوات ہو جس کی رقیبی مساوات فہ (لا، ما، ی) = ۰ ہے تو فہ (ل، م، ن) = ۰ اُس مخروطی کی مماسی مساوات ہوگی جس کی رقیبی مساوات سا (لا، ما، ی) = ۰ ہے -

۲۹۹ ـــ کسی مماس کے نقطہ تماس کی مساوات کو دفعہ ۲۳۸ میں استعمال شدہ طریقہ کے مشابہ طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے - چنانچہ مساوات

$$ف \frac{ف فہ}{ف فَ} + ق \frac{ف فہ}{ف قَ} + ر \frac{ف فہ}{ف رَ} = ۰$$

$$\text{یا}\quad فَ \frac{ف فہ}{ف ف} + قَ \frac{ف فہ}{ف ق} + رَ \frac{ف فہ}{ف ر} = ۰$$

ہے جہاں فہ (ف، ق، ر) = ۰ مخروطی کی مساوات ہے اور فَ، قَ، رَ، مماس کے محدد ہیں -

اگر (فَ، قَ، رَ) منحنی کا مماس نہ ہو تو اوپر کی مساوات، (فَ، قَ، رَ) کے قطب کی مساوات ہوگی -

مرکز، لامتناہی پر کے خط کا قطب ہے اور لامتناہی پر کے خط کے محدد ا، ا، ا ہیں، اس لیے منحنی کے مرکز کی مساوات

$$\frac{ف فہ}{ف فَ} + \frac{ف فہ}{ف قَ} + \frac{ف فہ}{ف رَ} = ۰$$

ہے -

۳۰۰۔ اگر ایک مثلث ایک مخروطی میں اور دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جا سکے تو ایسے مثلثوں کی لاانتہا ہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے اور ایسے تمام مثلث ایک تیسرے ثابت مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ حوالے کا مثلث، مخروطی

$$\text{س}_1 \equiv \frac{\text{ل}}{\text{عہ}} + \frac{\text{م}}{\text{بہ}} + \frac{\text{ن}}{\text{جہ}} = 0$$

میں اور مخروطی

$$\text{س}_2 = \sqrt{\text{ل عہ}} + \sqrt{\text{م بہ}} + \sqrt{\text{ن جہ}} = 0$$

کے گرد کھینچا گیا ہے۔

س۱ کے کسی نقطہ اَ سے مخروطی س۲ کے دو مماس اَبَ، اَجَ کھینچو اور فرض کرو کہ یہ مماس مخروطی س۱ کو بَ، جَ پر مکرر قطع کرتے ہیں۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ بَ جَ، مخروطی س۲ کو مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ اَ، بَ، جَ کے محدد (عہ۱، بہ۱، جہ۱) وغیرہ ہیں۔ (۳۸۱)

تب خطوط اَبَ، اَجَ مساواتوں

$$\frac{\text{ل عہ}}{\text{عہ}_1\,\text{عہ}_2} + \frac{\text{م بہ}}{\text{بہ}_1\,\text{بہ}_2} + \frac{\text{ن جہ}}{\text{جہ}_1\,\text{جہ}_2} = 0$$

اور

$$\frac{\text{ل عہ}}{\text{عہ}_1\,\text{عہ}_3} + \frac{\text{م بہ}}{\text{بہ}_1\,\text{بہ}_3} + \frac{\text{ن جہ}}{\text{جہ}_1\,\text{جہ}_3} = 0$$

سے تعبیر ہوتے ہیں۔

چونکہ یہ خطوط س$_2$ کو مس کرتے ہیں اسلئے [دفعہ ۲۸۴]

$$\frac{\text{ل}}{\text{لہ}}\text{عہ}_1\text{عہ}_2+\frac{\text{م}}{\text{مہ}}\text{بہ}_1\text{بہ}_2+\frac{\text{ن}}{\text{نہ}}\text{جہ}_1\text{جہ}_2=0،\quad \frac{\text{ل}}{\text{لہ}}\text{عہ}_1\text{عہ}_3$$

$$+\frac{\text{م}}{\text{مہ}}\text{بہ}_1\text{بہ}_3+\frac{\text{ن}}{\text{نہ}}\text{جہ}_1\text{جہ}_3=0$$

اسلئے

$$\frac{\frac{\text{ل}}{\text{لہ}}\text{عہ}_1}{\text{بہ}_2\text{جہ}_3-\text{بہ}_3\text{جہ}_2}=\frac{\frac{\text{م}}{\text{مہ}}\text{بہ}_1}{\text{جہ}_2\text{عہ}_3-\text{جہ}_3\text{عہ}_2}=\frac{\frac{\text{ن}}{\text{نہ}}\text{جہ}_1}{\text{عہ}_2\text{بہ}_3-\text{عہ}_3\text{بہ}_2}$$

اِس لیے بَ جَ کو

$$\frac{\text{ل}}{\text{لہ}}\text{عہ}\,\text{عہ}_1+\frac{\text{م}}{\text{مہ}}\text{بہ}\,\text{بہ}_1+\frac{\text{ن}}{\text{نہ}}\text{جہ}\,\text{جہ}_1=0،\ \ldots\ldots(1)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اور یہ س$_2$ کو مس کرتا ہے کیونکہ $\frac{\text{ل}\,\text{لہ}}{\text{ل}\,\text{عہ}_1}+\frac{\text{م}\,\text{مہ}}{\text{م}\,\text{بہ}_1}+\frac{\text{ن}\,\text{نہ}}{\text{ن}\,\text{جہ}_1}=0$

اِس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ س$_1$ میں ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جن کے ضلع س$_2$ کو مس کریں۔

اب بَ جَ کی مساوات کو شکل

$$\frac{\text{لہ}\,\text{عہ}}{\text{عہ}_2\text{عہ}_3}+\frac{\text{مہ}\,\text{بہ}}{\text{بہ}_2\text{بہ}_3}+\frac{\text{نہ}\,\text{جہ}}{\text{جہ}_2\text{جہ}_3}=0،\ \ldots\ldots(2)$$

میں بھی لکھا جا سکتا ہے، اس لیے

$$\frac{ل\,ع_1ع_2ع_3}{لہ^2} = \frac{م\,ب_1ب_2ب_3}{مہ^2} = \frac{ن\,ج_1ج_2ج_3}{نہ^2}, \ldots (۳)$$

مخروطی $س_2 = ل\,ع^2 + م\,ب^2 + ن\,ج^2 = ۰$

کے لحاظ سے نقطہ $(ع_1،\ ب_1،\ ج_1)$ کا قطبی

$$ل\,ع_1\,ع + م\,ب_1\,ب + ن\,ج_1\,ج = ۰$$

ہے۔

یہ وہی خط ہے جو $\overline{ب}\,\overline{ج}$ ہے جس کی مساوات

$$\frac{ل\,ع}{ع_2ع_3} + \frac{م\,ب}{ب_2ب_3} + \frac{ن\,ج}{ج_2ج_3} = ۰$$

ہے اگر $\frac{ل\,ع_1ع_2ع_3}{لہ} = \frac{م\,ب_1ب_2ب_3}{مہ} = \frac{ن\,ج_1ج_2ج_3}{نہ}$

یعنی (۲) سے اگر $\frac{ل\,لہ}{ل} = \frac{م\,مہ}{م} = \frac{ن\,نہ}{ن}$

(۳۸۲) پس وہ تمام مثلث جو مخروطی

$$س_1 = \frac{لہ}{ع} + \frac{مہ}{ب} + \frac{نہ}{ج} = ۰$$

میں اور مخروطی

$$س_2 \equiv \sqrt{ل\,ع} + \sqrt{م\,ب} + \sqrt{ن\,ج} = ۰$$

کے گرد کھینچے گئے ہوں مخروطی

$$س_2 = \frac{ل}{لہ}ع^2 + \frac{م}{مہ}ب^2 + \frac{ن}{نہ}ج^2 = ۰$$

کے لحاظ سے خود قطبی ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ س_1 پر کوئی نقطہ (عہ'، بہ'، جہ') ہے۔ تب س_2 کے لحاظ سے اِس کا قطبی

$$\frac{\text{ل}}{\text{لہ}}\,\text{عہ}'\,\text{عہ} + \frac{\text{م}}{\text{مہ}}\,\text{بہ}'\,\text{بہ} + \frac{\text{ن}}{\text{نہ}}\,\text{جہ}'\,\text{جہ} = 0, \quad \ldots (۴)$$

ہے۔ وہ شرط کہ (۴)، مخروطی س_2 کو مس کرے یہ ہے کہ

$$\frac{\text{ل}}{\frac{\text{ل}}{\text{لہ}}\,\text{عہ}'} + \frac{\text{م}}{\frac{\text{م}}{\text{مہ}}\,\text{بہ}'} + \frac{\text{ن}}{\frac{\text{ن}}{\text{نہ}}\,\text{جہ}'} = 0$$

یعنی
$$\frac{\text{لہ}}{\text{عہ}'} + \frac{\text{مہ}}{\text{بہ}'} + \frac{\text{نہ}}{\text{جہ}'} = 0$$

جو س_1 پر کے کسی نقطہ کے لیے درست ہے۔

اِس طرح س_1 اور س_2، س_2 کے لحاظ سے، ایک دوسرے کے متکافی ہیں۔

مثال۔ اگر ایک مثلث جو س_1 کے لحاظ سے خود قطبی ہو مخروطی س_2 کے گرد کھینچا جا سکے تو س_1 میں ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جو س_2 کے لحاظ سے خود قطبی ہوں۔

مخروطیوں کی مساواتوں کو

$$\text{س}_1 \equiv \text{ع}\,\text{عہ}^2 + \text{و}\,\text{بہ}^2 + \text{ط}\,\text{جہ}^2 = 0,$$

$$\text{س}_2 \equiv \sqrt{\text{لہ}\,\text{عہ}} + \sqrt{\text{مہ}\,\text{بہ}} + \sqrt{\text{نہ}\,\text{جہ}} = 0.$$

لیا جا سکتا ہے۔

مخروطی س_2، $\text{ب}=0$ اور $\text{ج}=0$ کو اُن نقطوں پر مس کرتا ہے جو خط

$$\text{ل}\,\text{ع}+\text{م}\,\text{ب}+\text{ن}\,\text{ج}=0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

پر واقع ہیں۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ ف جہاں خط (۱)، مخروطی س_1 کو قطع کرتا ہے $(\text{ع}_1، \text{ب}_1، \text{ج}_1)$ ہے تو

$$\text{ل}\,\text{ع}_1+\text{م}\,\text{ب}_1+\text{ن}\,\text{ج}_1=0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

اور

$$\text{ء}\,\text{ع}_1^2+\text{و}\,\text{ب}_1^2+\text{ط}\,\text{ج}_1^2=0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

س_2 کے لحاظ سے $(\text{ع}_1، \text{ب}_1، \text{ج}_1)$ کا قطبی

$$\text{ل}\,\text{ع}(\text{ل}\,\text{ع}_1-\text{م}\,\text{ب}_1-\text{ن}\,\text{ج}_1)+\text{م}\,\text{ب}(-\text{ل}\,\text{ع}_1+\text{م}\,\text{ب}_1-\text{ن}\,\text{ج}_1)+\text{ن}\,\text{ج}(-\text{ل}\,\text{ع}_1-\text{م}\,\text{ب}_1+\text{ن}\,\text{ج}_1)=0$$

ہے یا (۲) کی رُو سے

$$\text{ب}\,\text{ج}_1+\text{ج}\,\text{ب}_1=0 \qquad \ldots\ldots (4)$$

اب خط (۴)، (۳) کی رُو سے س_1 کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں $\dfrac{\text{ع}^2}{\text{ع}_1^2}=\dfrac{\text{ب}^2}{\text{ب}_1^2}$

(۳۸۳) پس اگر ف کا قطبی س_1 کو نقطوں ق، ر پر قطع کرے تو یہ نقطے $(\pm\text{ع}_1، \text{ب}_1، -\text{ج}_1)$ ہیں۔

اب س_2 کے لحاظ سے ق، ر مزدوج ہیں اگر

$$\text{ل}\,\text{ع}_1(-\text{ل}\,\text{ع}_1-\text{م}\,\text{ب}_1+\text{ن}\,\text{ج}_1)+\text{م}\,\text{ب}_1(+\text{ل}\,\text{ع}_1+\text{م}\,\text{ب}_1+\text{ن}\,\text{ج}_1)-\text{ن}\,\text{ج}_1(+\text{ل}\,\text{ع}_1-\text{م}\,\text{ب}_1-\text{ن}\,\text{ج}_1)=0$$

اور یہ (۳) سے حاصل ہوتا ہے۔

پس مثلث ف ق ر، س_1 میں ہے اور س_2 کے لحاظ سے خود قطبی ہے۔

اب دفعہ ۳۰۰ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ س_1 میں ایسے مثلثوں کی لا متناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جو س_2 کے لحاظ سے خود قطبی ہوں۔

۳۰۱ — فرض کرو کہ ایک مخروطی س پر کوئی چار نقطے ا٬ ب٬ ج٬ د ہیں۔ چار زاویٔ ا ب ج د کے وتری مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دو۔ اب چار نقطوں ا٬ ب٬ ج٬ د کو (۱٬ ۱٬ ±۱) لیا جا سکتا ہے٬ اِن کو ملانے والے خطوں کے تین زوج

$$به^2 - جه^2 = ۰،\ جه^2 - عه^2 = ۰،\ عه^2 - به^2 = ۰$$

ہیں۔

نیز س کی مساوات شرط ع + و + ط = ۰ کے ساتھ ع عه^2 + و به^2 + ط جه^2 = ۰ ہے۔

پس س٬ مساواتوں

$$\frac{به^2 - جه^2}{ع} = \frac{جه^2 - عه^2}{و} = \frac{عه^2 - به^2}{ط}$$

میں سے کسی ایک سے حاصل ہوتا ہے۔

اب حسبِ ذیل تین مخروطیوں پر غور کرو:

$$س_1 \equiv لہ(ل عه + م به + ن جه)^2 - (به^2 - جه^2) \big| ع = ۰،$$

$$س_2 \equiv لہ(ل عه + م به + ن جه)^2 - (جه^2 - عه^2) \big| و = ۰،$$

$$س_3 \equiv لہ(ل عه + م به + ن جه)^2 - (عه^2 - به^2) \big| ط = ۰،$$

جہاں ل عه + م به + ن جه = ۰ کوئی خطِ مستقیم ہے۔ (۱) سے یہ صاف ظاہر ہے کہ یہ تمام مخروطی٬ س پر کے اُسی چار نقطوں میں سے گذرتے ہیں٬ پس س پر کے اُسی چار نقطوں میں سے گذرتے ہوئے تین مخروطیوں کو کھینچنا ممکن ہے٬ انہیں سے ہر مخروطی خطوں کے زوج (ا ب٬ ج د)٬ (ا ج٬ ب د)٬ (ا د٬ ب ج) میں سے

ایک کے ساتھ دوہرا تماس رکھتا ہے، اور وترِ تماس کسی دئے ہوئے خط ل ع + م ب + ن ج = ۰ پر ہوتے ہیں۔

اگر ل کو ایسا منتخب کیا جائے کہ س، کوئی دیا ہوا مخروطی ہو جو ا ب، ج د کو ف، ق پر مس کرے تو س۲ اور س۳ معلوم ہو جاتے ہیں اور یہ وہ مخروطی ہیں جو س اور س۱ کے چار نقاطِ تقاطع میں سے گذرتے ہیں اور علی الترتیب خطوں کے زوجوں (ا ج، ب د)، (ا د، ب ج) کو مس کرتے ہیں، ہر صورت میں ف ق وترِ تماس ہے۔

۳۰۲ — اب فرض کرو کہ مخروطی س میں کھینچے ہوئے دو مثلث ا ب ج، اَ بَ جَ ایسے ہیں کہ ضلع ا ب، ب ج، اَ بَ، بَ جَ، مخروطی س، کو علی الترتیب نقطوں ف، ق، فَ، قَ پر مس کرتے ہیں۔

اب دفعہ ۳۰۱ کی رو سے ا اَ اور ب بَ، س اور س، کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے ایک مخروطی کو مس کریں گے اور نقاطِ تماس وہ نقطے ہوں گے جہاں ف فَ علی الترتیب ا اَ، ب بَ کو قطع کرتا ہے۔ (۳۸۴

نیز ب بَ اور ج جَ، س اور س، کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے ایک مخروطی کو مس کرینگے اور نقاط تماس وہ نقطے ہوں گے جہاں ق قَ علی الترتیب ب بَ اور ج جَ کو قطع کرتا ہے۔

اب س، کے لحاظ سے ف ق کا قطب ب ہے اور فَ قَ کا بَ۔ اس لئے ب بَ، و کا قطبی ہے جہاں و، ف ق اور فَ قَ کا نقطۂ تقاطع ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ف فَ اور ق قَ، و

کے قطبی پر ملتے ہیں ۔

اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ س اور س۱ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والا ایک ہی مخروطی ا اَ ، ب بَ ، ج جَ کو مس کرے گا ۔

اب چونکہ ا اَ اور ج جَ ، س اور س۱ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے مخروطی کو مس کرتے ہیں اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ا ج اور اَ جَ بھی نظام کے ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں ۔

پس اگر ایک مخروطی س میں ایک مثلث کھینچا جائے اور اس کے دو ضلع ایک مخروطی س۱ کو مس کریں تو تیسرا ضلع ایک مخروطی س۲ کو مس کرے گا ، اِن تینوں مخروطیوں کے نقاطِ تقاطع وہی ہوں گے ۔ اگر تیسرا ضلع س۱ کو اس کے ایک محل میں مس کرے تو تیسرا ضلع ہمیشہ س۱ کو مس کریگا

[دفعہ ۳۰۰] ۔

۳۰۲ ـــ پھر فرض کرو کہ مخروطی س میں ایک مثلث ا ب ج کھینچا گیا ہے اور فرض کرو کہ ا ب مخروطی س۱ کو مس کرتا ہے اور ب ج مخروطی س۲ کو مس کرتا ہے جہاں یہ تینوں مخروطی س ، س۱ ، س۲ اُنہی چار نقطوں میں سے گذرتے ہیں ۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا دوسرا محل اَ بَ جَ ہے اور فرض کرو کہ ب سے س۱ کے دوسرے مماس ب لا ، بَ لاَ ہیں جہاں نقاط لا ، لاَ ، مخروطی س پر ہیں ۔

تب دفعہ ۳۰۱ سے ا اَ اور ب بَ دونوں اِس چار نقطی نظام کے ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں کیونکہ ا ب ، اَ بَ ، مخروطی س۱ کو مس کرتے ہیں ۔

(۲۰۵) اسی طرح ب بَ اور ج جَ، نظام کے ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں، علیٰ ہٰذا ب بَ اور لا لاَ بھی۔

چار نقطی نظام کے صرف دو مخروطی ب، بَ کو مس کرینگے اور اگر ان کے نقاطِ تماس ک، کَ ہوں تو وسعت {ب ک بَ کَ} موسیقی ہے کیونکہ ک، کَ اس درپیچ کے دوہرے نقطے ہیں جس کا ایک مزدوج زوج ب، بَ ہے [دفعہ ۲۱۳ مثال ۵] ۔ پس نظام کا صرف ایک مخروطی، ب بَ کو ب اور بَ کے درمیان ایک نقطہ پر مس کریگا لیکن اگر ا اور اَ، ب اور بَ، ج اور جَ، لا اور لاَ باہم ترتیب ہوں تو متناظر و ترتماس، ب بَ کو ب اور بَ کے درمیان قطع کریں گے۔

اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر مثلث ا ب ج کو بتدریج اس طرح گھمایا جائے کہ وہ محل اَ بَ جَ اختیار کرے اور اس اثناء میں ضلعوں کی سمتوں میں کوئی اچانک تبدیلیاں نہ ہوں تو خطوط ا اَ، ب بَ، ج جَ سب نظام کے ایک ہی مخروطی کو مس کرینگے۔ [یہ ا اَ، ب بَ اور لا لاَ کے لیے بھی درست ہے]۔

اب چونکہ ا اَ اور ج جَ، نظام کے اسی مخروطی کو مس کرتے ہیں اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ا ج اور اَ جَ اس چار نقطی نظام کے اسی مخروطی کو مس کرتے ہیں، اس لیے ا ج کا لفاف ایک ثابت مخروطی ہے۔ [اسی طرح ا لا کا لفاف بھی دوسرا ثابت مخروطی ہے]۔

پس اگر ا ب ج کو مخروطی س میں اس طرح کھینچا جائے کہ ا ب، مخروطی $س_۱$ کو مس کرے اور ب ج، مخروطی $س_۲$ کو مس کرے اور مخروطیوں س، $س_۱$، $س_۲$ کے نقاطِ تقاطع ایک ہی ہوں تو ضلع ج ا، ان ہی چار نقطوں میں سے گذرنیوالے

ایک یا دوسرے ثابت مخروطی کو مس کرے گا ۔

۳۰۴ ــ اب کثیر ضلعی ا ب ج د کی صورت پر غور کرو جو ایک مخروطی س میں اس طرح کھینچا گیا ہے کہ اس کے تمام ضلع سوائے ایک کے ایک مخروطی س، کو مس کرتے ہیں ۔ چونکہ ا ب، ب ج مخروطی س، کو مس کرتے ہیں اس لیے ا ج ایک ایسے مخروطی س، کو مس کرتا ہے جو س اور س، کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے ۔ پھر چونکہ ا ج اور ج د، اس چار نقطی نظام کے مخروطیوں کو مس کرتے ہیں اس لیے ا د، نظام کے دوسرے مخروطی کو مس کرتا ہے، علیٰ ہذا القیاس ۔ پس کثیر ضلعی کا باقی ضلع ایک ایسے ثابت مخروطی ﻉ کو لف کرے گا جو س، اور س، کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے، اور اگر باقی ضلع مخروطی س، کو اس کے کسی محل میں مس کرے تو وہ ہمیشہ س، کو مس کرے گا ۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک مثلث کے لیے (دفعہ ۳۰۰) اور ایک چار ضلعی کے لیے (دفعہ ۲۸۹ مثال ۴) درست ہے، اور جب ا ب ج د .... کے تمام ضلع س، کو مس کرتے ہیں تو کسی ضلع کو بھی باقی (آزاد) ضلع تصور کیا جاسکتا ہے اور س، اور دوسرے مخروطی ﻉ کے چار سے زیادہ مشترک مماس نہیں ہو سکتے ۔ (۳۱)

یہ اندرونی اور حائط کثیر ضلعیوں کا (Porism) ہے یعنی

اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی میں اس طرح کھینچا جا سکے کہ اس کے ضلع ایک دوسرے مخروطی کو مس کریں تو ایسے کثیر ضلعی تعداد میں لامتناہی ہونگے ۔ [نیز دیکھو دفعہ ۳۴۰ اور دفعہ ۳۴۰]

مثال ۱ — ایک نقطہ سے دو دیئے ہوئے مخروطیوں کے مماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں جو موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے۔

مخروطیوں کے مشترک خود قطبی مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دو اور فرض کرو کہ ان کی مساواتیں

$$\text{ع}_1\text{لا}^2+\text{و}_1\text{ما}^2+\text{ط}_1\text{ی}^2=0 \quad \text{اور} \quad \text{ع}_2\text{لا}^2+\text{و}_2\text{ما}^2+\text{ط}_2\text{ی}^2=0$$

ہیں۔

نقطہ (ف، گ، ھ) سے پہلے مخروطی کے مماس مساوات

$$(\text{ع}_1\text{لا}^2+\text{و}_1\text{ما}^2+\text{ط}_1\text{ی}^2)(\text{ع}_1\text{ف}^2+\text{و}_1\text{گ}^2+\text{ط}_1\text{ھ}^2)-(\text{ع}_1\text{ف لا}+\text{و}_1\text{گ ما}+\text{ط}_1\text{ھ ی})^2=0$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ مماس خط ع = ۰ کو ایسے نقطوں پر قطع کرتے ہیں جن کو نقطہ (۱، ۰، ۰) سے ملایا جائے تو خطوط

$$\text{و}_1(\text{ع}_1\text{ف}^2+\text{ط}_1\text{ھ}^2)\text{ما}^2-2\,\text{و}_1\text{ط}_1\text{گ ھ ما ی}+\text{ط}_1(\text{ع}_1\text{ف}^2+\text{و}_1\text{گ}^2)\text{ی}^2=0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اسی طرح دوسرے مخروطی کے لیے

$$\text{و}_2(\text{ع}_2\text{ف}^2+\text{ط}_2\text{ھ}^2)\text{ما}^2-2\,\text{و}_2\text{ط}_2\text{گ ھ ما ی}+\text{ط}_2(\text{ع}_2\text{ف}^2+\text{و}_2\text{گ}^2)\text{ی}^2=0$$

چونکہ خطوں کے یہ ازواج موسیقی طور پر مزدوج ہیں اس لیے حاصل ہونا ہے

$$\text{و}_1\text{ط}_2(\text{ع}_1\text{ف}^2+\text{ط}_1\text{ھ}^2)(\text{ع}_2\text{ف}^2+\text{و}_2\text{گ}^2)+\text{ط}_1\text{و}_2(\text{ع}_1\text{ف}^2+\text{و}_1\text{گ}^2)(\text{ع}_2\text{ف}^2+\text{ط}_2\text{ھ}^2)=2\,\text{و}_1\text{و}_2\text{ط}_1\text{ط}_2\text{گ}^2\text{ھ}^2$$

اور یہ

$$ع_1 ع_2 (و_1 ط_2 + و_2 ط_1) ف^2 + و_1 و_2 (ط_1 ع_2 + ط_2 ع_1) گ^2 + ط_1 ط_2 (ع_1 و_2 + ع_2 و_1) ھ^2 = ۰$$

میں تحویل پذیر ہے۔ پس مطلوبہ طریق مخروطی

$$\Sigma\ ع_1 ع_2 (و_1 ط_2 + و_2 ط_1) لا^2 = ۰$$

ہے۔

اس مخروطی کو اکثر فا = ۰ سے تعبیر کیا جائے گا۔

چونکہ ایک نقطہ میں سے گذرنے والے تین منطبق خطوط اور کوئی دوسرا خط ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں اس لیے مخروطی فا دئے ہوئے مخروطیوں کے مشترک مماسوں کے آٹھ نقاط تماس میں سے گذرتا ہے، اس کی تصدیق بڑی آسانی سے اُس مساوات سے کیجا سکتی ہے جو مخروطی فا کی ہے۔

مثال ۲ — ایک خط مستقیم دو دئے ہوئے مخروطیوں کو نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع کرتا ہے جو موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم کا لفاف ایک مخروطی ہے۔ (۳۸۷)

ہم مخروطیوں کی مساواتوں کو

$$ع_1 لا^2 + و_1 ما^2 + ط_1 ی^2 = ۰ \quad \text{اور} \quad ع_2 لا^2 + و_2 ما^2 + ط_2 ی^2 = ۰$$

لے سکتے ہیں۔

خط ل لا + م ما + ن ی = ۰ پہلے مخروطی کو اُن نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کو نقطہ (۱، ۰، ۰) کے ساتھ ملایا جائے تو خطوط

$$ع_1 (م ما + ن ی)^2 + و_1 ل^2 ما^2 + ط_1 ل^2 ی^2 = ۰،$$

یا

$$(ع_1 م^2 + و_1 ل^2) ما^2 + ۲ ع_1 م ن ما ی + (ط_1 ل^2 + ع_1 ن^2) ی^2 = ۰$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اسی طرح دوسرے مخروطی کے لیے خطوط

$$(\text{ع}_{2}\text{م}^{2} + \text{و}_{2}\text{ل}^{2})\,\text{ما}^{2} + ۲\,\text{ع}_{2}\,\text{م ن ما ی} + (\text{ط}_{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}_{2}\text{ن}^{2})\,\text{ی}^{2} = ۰$$

حاصل ہوں گے۔

چونکہ خطوں کے یہ زوج موسیقی طور پر مزدوج ہیں اس لیے

$$(\text{ع}_{1}\text{م}^{2} + \text{و}_{1}\text{ل}^{2})(\text{ط}_{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}_{2}\text{ن}^{2}) + (\text{ط}_{1}\text{ل}^{2} + \text{ع}_{1}\text{ن}^{2})(\text{ع}_{2}\text{م}^{2} + \text{و}_{2}\text{ل}^{2})$$

$$= ۲\,\text{ع}_{1}\text{ع}_{2}\,\text{م}^{2}\text{ن}^{2}$$

$$\therefore (\text{و}_{1}\text{ط}_{2} + \text{و}_{2}\text{ط}_{1})\,\text{ل}^{2} + (\text{ط}_{1}\text{ع}_{2} + \text{ط}_{2}\text{ع}_{1})\,\text{م}^{2} + (\text{ع}_{1}\text{و}_{2} + \text{ع}_{2}\text{و}_{1})\,\text{ن}^{2} = ۰$$

پس $\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} = ۰$ کا لفافہ اوپر کی شرط کے ساتھ مخروطی

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{و}_{1}\text{ط}_{2} + \text{و}_{2}\text{ط}_{1}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ط}_{1}\text{ع}_{2} + \text{ط}_{2}\text{ع}_{1}} + \frac{\text{ی}^{2}}{\text{ع}_{1}\text{و}_{2} + \text{ع}_{2}\text{و}_{1}} = ۰$$

ہے۔

اِس مخروطی کو اکثر $\text{فَا} = ۰$ سے تعبیر کیا جائے گا۔

چونکہ ایک خطِ مستقیم پر تین منطبق نقطے اور کوئی دوسرا نقطہ ایک موسیقی سعت بناتے ہیں اس لیے مخروطی فَا دئے ہوئے مخروطیوں کے مشترک نقطوں پر کے مماسوں کو مس کرتا ہے، اِس کی تصدیق اِسکی مساوات سے بخوبی ہو سکتی ہے۔

مثال ۳ — چار دائرے اِس طرح کھینچے گئے ہیں کہ چار دئے ہوئے خطوں میں سے تین تین سے جو چار مثلث بنتے ہیں اِنمیں سے ہر ایک، دائروں میں سے ایک کے لحاظ سے

خود قطبی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر چار ضلعی کے وتروں سے بنے ہوئے مثلث کے گرد ایک دائرہ کھینچا جائے تو یہ دائرہ اور مذکورہ بالا چار دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھینگے۔

وتروں سے بنے ہوئے مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دو تو چار خطوط مستقیم کی مساواتیں ل عہ ± م بہ ± ن جہ = ۰ ہونگی۔ وہ تمام مخروطی جن کے لحاظ سے خطوط

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰، ل عہ - م بہ + ن جہ = ۰،

اور ل عہ + م بہ - ن جہ = ۰

ایک خود قطبی مثلث بناتے ہیں مساوات

ل (ل عہ + م بہ + ن جہ)^2 + م (ل عہ - م بہ + ن جہ)^2

+ ن (ل عہ + م بہ - ن جہ)^2 = ۰ . . . (۱)

میں شامل ہیں۔ اگر یہ مخروطی ایک دائرہ ہے تو اس کی مساوات کو شکل

د بہ جہ + ب جہ عہ + ج عہ بہ + (لہ عہ + مہ بہ

+ نہ جہ) (ا عہ + ب بہ + ج جہ) = ۰ ۔ (۲)

میں رکھا جا سکتا ہے اور اس کا اور حائط دائرہ کا بنیادی محور لہ عہ + مہ بہ + نہ جہ = ۰ ہے۔ (۱) اور (۲) میں عہ^2، بہ^2 اور جہ^2 کے سروں کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ل^2}{د\ لہ} = \frac{م^2}{ب\ مہ} = \frac{ن^2}{ج\ نہ}$$

اس لئے بنیادی محور کی مساوات (۳۸۸)

$$\frac{ل^2}{د} عہ + \frac{م^2}{ب} بہ + \frac{ن^2}{ج} جہ = ۰$$

ہے۔ صریحاً تمام دائروں کے لیے یہ مساوات وہی ہے۔

مثال ۴۔ ان تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

فرض کرو کہ اس مثلث کو جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے۔ تب چار ضلعی کے ضلعوں کی مساواتیں
ل عہ ± م بہ ± ن جہ = ۰ ہونگی۔ [دفعہ ۲۶۲]
مخروطیوں میں سے کسی ایک کی مساوات ع عہ² + و بہ² + ط جہ² = ۰ ہوگی [دفعہ ۲۸۶]
ان دو مماسوں کی مساوات جو نقطہ (عہَ بہَ جہَ) سے کھینچے گئے ہوں
(ع عہ² + و بہ² + ط جہ²)(ع عہَ² + و بہَ² + ط جہَ²) ـ (ع عہَ عہ + و بہَ بہ + ط جہَ جہ)² = ۰
ہے۔ وہ شرط کہ یہ خطوط عمود ہوں یہ ہے [دفعہ ۲۵۹] کہ
ع (و بہَ² + ط جہَ²) + و (ط جہَ² + ع عہَ²) + ط (ع عہَ² + و بہَ²)
+ ۲ و ط بہَ جہَ جم الف + ۲ ط ع جہَ عہَ جم ب + ۲ ع و عہَ بہَ جم ج = ۰
پس مخروطی ع عہ² + و بہ² + ط جہ² = ۰ کے مرتب دائرہ کی مساوات

$$\frac{\text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 + ۲\,\text{بہ جہ جم الف}}{\text{ع}} + \frac{\text{جہ}^2 + \text{عہ}^2 + ۲\,\text{عہ جہ جم ب}}{\text{و}} + \frac{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 + ۲\,\text{عہ بہ جم ج}}{\text{ط}} = ۰ \quad \ldots (۱)$$

ہوگی۔ لیکن چونکہ مخروطی چار خطوں ل عہ ± م بہ ± ن جہ = ۰ کو مس کرتا ہے اسلئے

$$\frac{ل^2}{ع} + \frac{م^2}{و} + \frac{ن^2}{ط} = ۰ ، \quad ..... (۲)$$

(۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ تمام مرتب دائرے اُن نقطوں میں سے گذرتے ہیں جو

$$\frac{ب^2 + ج^2 + ۲ ب ج جم ا}{ل^2} = \frac{ج^2 + ع^2 + ۲ ع ج جم ب}{م^2}$$

$$= \frac{ع^2 + ب^2 + ۲ ع ب جم ج}{ن^2}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ [نیز دیکھو دفعہ ۲۴۵ اور ۳۱۲]

مثال ۵ — ایک مخروطی کی مساوات رشتی محددوں میں دی گئی ہے اگر اس کے لحاظ سے حوالہ کا مثلث خود قطبی ہو تو ثابت کرو کہ اُس کے محور مساوات

$$ر^4 + ر^2 (ا^2 با ی + ب^2 ی لا + ج^2 لا با) + ۴ \Delta^2 لا با ی = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں اُس کے مرکز کے محدد (لا، با، ی) ہیں۔

مخروطی $ع لا^2 + و با^2 + ط ی^2 = ۰$ کا مرکز $ع لا = و با = ط ی$ سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے مخروطی کی مماسی مساوات

$$ل^2 لا + م^2 با + ن^2 ی = ۰$$

ہے۔ اس لیے اگر $(لا_1، با_1، ی_1)$، $(لا_2، با_2، ی_2)$ ماسکے ہوں تو حسب دفعہ ۲۷۷ (۳۸۹)

$$۴ \Delta^2 (ل لا_1 + م با_1 + ن ی_1)(ل لا_2 + م با_2 + ن ی_2) - ر^2 (\Sigma ل^2 ا^2$$

$$- \Sigma م ن ب ج جم ا) \equiv ك (ل^2 لا + م^2 با + ن^2 ی)$$

اس متماثلہ میں $ل = م = ن = ۱$ رکھو، تب $ك = ۴ \Delta^2$، اور محور [دفعہ ۲۷۷]

مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{ا}^2 + \frac{4\Delta^2 \text{لا}}{\text{ر}^2} & -\text{ا ب جم ج} & -\text{ا ج جم ب} \\ -\text{ا ب جم ج} & \text{ب}^2 + \frac{4\Delta^2 \text{ما}}{\text{ر}^2} & -\text{ب ج جم ا} \\ -\text{ا ج جم ب} & -\text{ب ج جم ا} & \text{ج}^2 + \frac{4\Delta^2 \text{ی}}{\text{ر}^2} \end{vmatrix} = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں جو

$$4\Delta^2 \text{لا ما ی} + \text{ر}^2 \Sigma \text{ا}^2 \text{ما ی} + \text{ر}^4 = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

تیرھویں باب پر مثالیں

۱ ۔۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کو ایک دیے ہوئے مثلث میں کھینچا جائے تو اُس کا محورِ اصغر مثلث کے اندرونی دائرہ کے قطر سے تجاوز نہیں ہو سکتا۔

۲ ۔۔ ایک مثلث کا رقبہ اِس کے راسوں کے سہ خطی محددوں یا رقبئی محددوں کی رقوم میں معلوم کرو۔

۳ ۔۔ اگر چار مخروطی ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتے ہوں تو کسی دو کے چار نقاطِ تقاطع اور دوسرے دو کے چار نقاطِ تقاطع ایک مخروطی پر واقع ہوں گے۔

۴ ۔۔ ثابت کرو کہ دو مخروطیوں کے مشترک مماسوں کے آٹھ نقاطِ تماس ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔

۵ ۔۔ ثابت کرو کہ دو مخروطیوں کے مشترک نقطوں پر کے آٹھ مماس

ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں —

۶ — نقطوں کے کوئی تین زوج جو ایک چارضلعی کے تین قطروں کو موسیقی طور پر تقسیم کرتے ہیں ایک مخروطی پر ہوتے ہیں۔

۷ — نونقطی دائرہ کی مساوات یہ سمجھ کر معلوم کرو کہ وہ اُس مثلث کا حائط دائرہ ہے جو خطوں

$$\text{ا عہ} - \text{ب بہ} - \text{ج جہ} = ۰،\quad \text{ب بہ} - \text{ج جہ} - \text{ا عہ} = ۰،\quad \text{ج جہ} - \text{ا عہ} - \text{ب بہ} = ۰$$

سے بنا ہے —

۸ — ثابت کرو کہ اُس دائرہ کی مساوات جو ا بہ جہ + ب جہ عہ + ج عہ بہ = ۰ کے ہم مرکز ہے اور جس کا نصف قطر رؔ ہے

$$\text{ا بہ جہ} + \text{ب جہ عہ} + \text{ج عہ بہ} + \frac{\text{ر}^2 - \text{رؔ}^2}{\text{ا ب ج}}\left(\text{ا عہ} + \text{ب بہ} + \text{ج جہ}\right)^2 = ۰$$

ہے جہاں حوالے کے مثلث کے حائط دائرہ کا نصف قطر ر ہے —

۹ — حائط مخروطی کے وہ قطر جو حوالے کے مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہیں ر_1، ر_2، ر_3 ہیں۔ ثابت کرو کہ اِس مخروطی کی مساوات (۳۹۰)

$$\frac{\text{ا}}{\text{ر}_1^2\,\text{عہ}} + \frac{\text{ب}}{\text{ر}_2^2\,\text{بہ}} + \frac{\text{ج}}{\text{ر}_3^2\,\text{جہ}} = ۰$$

ہے —

۱۰ — ایک مخروطی میں کھینچا ہوا مثلث ا ب ج ہے اور ا، ب، ج پر مخروطی کے مماس علی الترتیب بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ ہیں۔ ثابت کرو کہ ا اَ، ب بَ، ج جَ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اگر ب ج اور بَ جَ کا نقطۂ تقاطع د ہو، ج ا اور جَ اَ کا نقطۂ تقاطع ع ہو، اور ا ب اور اَ بَ کا نقطۂ تقاطع ف ہو تو د، ع، ف ایک خطِ مستقیم میں ہوں گے —

۱۱ — ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج سے خطوطِ مستقیم کھینچے

گئے ہیں جو ایک نقطہ ف میں سے گذرتے ہیں اور مقابل کے ضلعوں سے اَ، بَ، جَ پر ملتے ہیں۔ نیز بَ جَ، ب ج سے ک پر ملتا ہے، جَ اَ، ج ا سے ل پر ملتا ہے، اور اَ بَ، ا ب سے م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ک، ل، م ایک خطِ مستقیم پر ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ (۱) اگر ف ایک خطِ مستقیم پر حرکت کرے تو ک ل م ایک مخروطی کو جو مثلث ا ب ج میں کھینچا گیا ہو مس کرے گا، (۲) اگر ف ایک ثابت مخروطی پر جو مثلث ا ب ج کے گرد کھینچا گیا ہو حرکت کرے تو ک ل م ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے گا، (۳) اگر ف ایک ثابت مخروطی پر حرکت کرے جو مثلث کے دو ضلعوں کو اُن نقطوں پر مس کرتا ہے جہاں تیسرا ضلع اِن سے ملتا ہے تو ک ل م ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۱۲ — ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو ایک نقطہ و میں سے گذرتے ہیں اور مقابل کے ضلعوں سے اَ، بَ، جَ پر ملتے ہیں۔ اسی طرح نقطہ وَ میں سے گذرتے ہوئے خطوط مقابل کے ضلعوں سے اً، بً، جً پر ملتے ہیں۔ اگر بَ جَ اور بً جً کا نقطۂ تقاطع ف، جَ اَ اور جً اً کا نقطۂ تقاطع ق، اَ بَ اور اً بً کا نقطۂ تقاطع ر ہو تو ثابت کرو کہ ا ف، ب ق، ج ر ایک نقطہ سے پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر ا، ب، ج میں سے گذرنے والے ایک ثابت مخروطی پر و، وَ کوئی دو نقطے ہوں تو نقطہ سے ثابت ہوگا۔

۱۳ — مکانی $\sqrt{لع} + \sqrt{مب} + \sqrt{نج} = ۰$ کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

۱۴ — مکانی $ع لا^۲ + و ما^۲ + ط ی^۲ = ۰$ کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

۱۵ — ایک دئے ہوئے چار ضلعی میں مخروطی کھینچے گئے ہیں اور ان مخروطیوں کے مماس ایک ثابت خط کے متوازی کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن مماسوں کے نقاطِ تماس کا طریق ایک کعبی ہے۔ نیز چار ضلعی سے

متعلق وہ اہم نقطے معلوم کرو جن میں سے کبھی گذرتا ہے۔

۱۶ — ایک ناقص کو ایک مثلث میں کھینچا گیا ہے اور ناقص کا مرکز حائط دائرہ کے مرکز پر ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا محور اعظم اور محور اصغر علی الترتیب ر + ف اور ر − ف ہیں جہاں ر حائط دائرہ کا نصف قطر ہے اور ف مرکز اور مرکز عمودی کا درمیانی فاصلہ ہے۔

۱۷ — ثابت کرو کہ وہ مخروطی جو ایک مثلث ا ب ج کے گرد کھینچا گیا ہو ناقص ہوگا اگر مرکز مثلث د ع ف کے اندر واقع ہو یا اُن زاویوں کے اندر جو مثلث د ع ف کے زاویوں کے ٹھیک مقابل ہیں جہاں د، ع، ف، مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے وسطی نقطے ہیں۔

۱۸ — ثابت کرو کہ اُن مکافیوں کے ماسکوں کا طریق جن کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود قطبی ہے نو نقطی دائرہ ہے۔

۱۹ — ثابت کرو کہ اُن تمام مخروطیوں کے ماسکوں کا طریق جو چار خطوط ل عہ ± م بہ ± ن جہ = ۰ کو مس کرتے ہیں کبھی

$$\frac{\text{ف}_1^2}{\text{ل عہ + م بہ + ن جہ}} + \frac{\text{ف}_2^2}{\text{ل عہ − م بہ − ن جہ}} + \frac{\text{ف}_3^2}{\text{− ل عہ + م بہ − ن جہ}} + \frac{\text{ف}_4^2}{\text{− ل عہ − م بہ + ن جہ}} = 0$$

ہے جہاں $\text{ف}_1 = \text{ل}^2 + \text{م}^2 + \text{ن}^2 - 2\,\text{م ن جم ا} - 2\,\text{ن ل جم ب} - 2\,\text{ل م جم ج}$ اور ف_2، ف_3، ف_4 کی قیمتیں اس کے مشابہ ہیں۔

۲۰ — اگر ایک مخروطی کو ایک دئے ہوئے مثلث میں کھینچا جائے اور اس کا محور اعظم ثابت نقطہ (ف، گ، ھ) میں سے گذرے تو اس کے ماسکہ کا طریق کبھی

$$\text{ف عہ}(\text{بہ}^2 - \text{جہ}^2) + \text{گ بہ}(\text{جہ}^2 - \text{عہ}^2) + \text{ھ جہ}(\text{عہ}^2 - \text{بہ}^2) = 0$$

ہوگا۔

۲۱ ــــ اگر ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا جائے اور اس کا مرکز ایک ثابت خطِ مستقیم پر حرکت کرے تو ماسکے ایک کعبی پر جو مثلث کو حائط کرتا ہے واقع ہونگے۔

۲۲ ــــ اُن قائم زائدوں کے مرکزوں کا طریق جن کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود مزدوج ہو حائط دائرہ ہوگا۔

۲۳ ــــ اُن تمام قائم زائدوں کے مرکزوں کا طریق جو حوالے کے مثلث میں کھینچے گئے ہوں خود مزدوج دائرہ ہوگا۔

۲۴ ــــ ثابت کرو کہ ایک مثلث کا نو نقطی دائرہ اندرونی دائرہ کو اور ہر جانبی دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۲۵ ــــ نو نقطی دائرہ کے اُن نقطوں پر کے مماس جہاں وہ اندرونی (۳۹۲) اور جانبی دائروں کو مس کرتا ہے ایک چار ضلعی بناتے ہیں جس کا ہر وتر مثلث کے ایک راس میں سے گذرتا ہے اور وہ خطوط جو ابتدائی مثلث کے راسوں کو وتروں سے بنے ہوئے مثلث کے متناظر راسوں سے ملاتے ہیں سب کے سب نو نقطی دائرہ اور حائط دائرہ کے بنیادی محور کے متوازی ہوتے ہیں۔

۲۶ ــــ ایک مخروطی کے لحاظ سے نقطوں ا، ب، ج کے قطبی علی الترتیب ب َج َ، ج َا َ، ا َب َ ہیں۔ ثابت کرو کہ ا ا َ، ب ب َ، ج ج َ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۲۷ ــــ اگر ایک مساوی الحادزائدہ ایک مثلث اب ج کے ضلعوں کے نقاطِ وسطی میں سے گذرے اور ضلعوں ب ج، ج ا، اب کو کمرر ء، ہ، ح پر قطع کرے تو ا ء، ب ہ، ج ح، مثلث اب ج کے حائط دائرہ پر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۲۸ ــــ دو دئے ہوئے مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے نقطوں کے قطبی معلوم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تمام نقطوں کے قطبیوں کے تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے جو دئے ہوئے مخروطیوں کے

مشترک خود مزدوج مثلث کو حائط کرتا ہے ۔

۲۹ — دو مخروطی دوہرا تماس رکھتے ہیں ۔ اِن میں سے ایک مخروطی کے مماس کھینچے گئے ہیں اور اِن مماسوں کے قطب دوسرے مخروطی کے لحاظ سے معلوم کئے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ اِن قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہے جو دونوں مخروطیوں کے ساتھ اُن کے مشترک نقطوں پر دوہرا تماس رکھتا ہے ۔

۳۰ — ایک مخروطی میں دو مثلث کھینچے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ اِن کے چھ ضلع دوسرے مخروطی کو مس کرتے ہیں ۔

۳۱ — دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہیں ۔ ثابت کرو کہ اِن کے چھ راس ایک دوسرے مخروطی پر ہیں اور اِن کے چھ ضلع ایک تیسرے مخروطی کو مس کرتے ہیں ۔

۳۲ — اگر ایک مثلث ایسا کھینچا جا سکے کہ وہ ایک دئے ہوئے مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہو اور اس کے راس دوسرے دئے ہوئے مخروطی پر واقع ہوں تو ایسے مثلث تعداد میں لاانتہا ہی کھینچے جا سکتے ہیں ۔

۳۳ — متشابہ مخروطیوں کا ایک نظام ہے جو ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اِن مخروطیوں کے مرکز چوتھے درجہ کے ایک منحنی پر واقع ہیں جو لاانتہا ہی پر کے دائری نقطوں میں سے گذرتا ہے اور مثلث کے راس اِس کے دوہرے نقطے ہیں ۔

۳۴ — اگر ا، ب، ج، اَ، بَ، جَ چھ ایسے نقطے ہوں کہ ا اَ، ب بَ، ج جَ ایک نقطہ پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ چھ خطوطِ مستقیم اب، اج، ب جَ، ب اَ، ج اَ، ج بَ ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں ۔

۳۵ — ایک مثلث میں ایک ایسا مخروطی کھینچا گیا ہے کہ نقاطِ تماس پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک کعبی منحنی ہے جس کے متقارب مثلث کے ضلعوں پر عمود ہیں ۔ (۲۹۳)

۳۶ — ایک چار ضلعی ا ب ج د کو ایک مخروطی میں کھینچا گیا ہے اور $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$، $ع_4$ اُن عمودوں کے طول ہیں جو راسوں ا، ب، ج، د سے مخروطی کے کسی دوسرے مماس پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نسبت $\frac{ع_1 ع_3}{ع_2 ع_4}$ مستقل ہے۔

۳۷ — کسی مخروطی کے لحاظ سے ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج کے قطبی، مقابل کے ضلعوں سے نقطوں اَ، بَ، جَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ا اَ، ب بَ، ج جَ کو قطر مان کر دائرے کھینچے جائیں تو یہ دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھیں گے۔

۳۸ — ایک مکافی ایک مثلث کے ایک ضلع کو اس کے وسطی نقطہ پر مس کرتا ہے اور دوسرے دو ممدودہ ضلعوں کو بھی مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ عمود جو مثلث کے راسوں سے مخروطی کے کسی مماس پر کھینچے گئے ہوں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

۳۹ — ثابت کرو کہ حائط دائرہ کی مماسی مساوات $ا\sqrt{ف} + ب\sqrt{ق} + ج\sqrt{ر} = 0$ ہے۔ پس ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ کی مماسی مساوات

$$ا\sqrt{ق+ر} + ب\sqrt{ر+ف} + ج\sqrt{ف+ق} = 0$$

ہے۔

۴۰ — ایک دئے ہوئے مثلث میں ایک مخروطی کھینچا گیا ہے جسکے محوروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴۱ — اُن تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو ایک ہی مثلث میں

کھینچے ہوئے ہوں اُس دائرے سے علی القوائم قطع ہوتے ہیں جس کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود قطبی ہے۔

۴۲۔ وہ دائرے جو ایک کامل چار ضلعی کے وتروں پر اِن کو قطر مانکر کھینچے گئے ہوں اُس دائرے سے علی القوائم قطع ہوتے ہیں جو وتروں سے بنے ہوئے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

۴۳۔ اگر تین مخروطی ایک ہی چار ضلعی کو حائط کریں تو ثابت کرو کہ کسی دو کا مشترک مماس تیسرے سے موسیقی طور پر منقطع ہوتا ہے۔

۴۴۔ اگر تین مخروطی ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں تو ثابت کرو کہ اِن میں سے دو کے ایک مشترک نقطہ پر اِن کے مماس اور اس نقطہ سے تیسرے کے مماس ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۴۵۔ ایک نقطہ سے دو مساوی دائروں کے مماس کھینچے گئے ہیں جو ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے جو ایک ناقص ہوگا اگر دائرے حادہ زاویہ پر متقاطع ہوں اور دو متوازی خطوط مستقیم ہوگا اگر دائرے علی القوائم متقاطع ہوں۔ (۳۹۴۱)

۴۶۔ ایک مثلث کے راس ایک دئے ہوئے مثلث کے ضلعوں پر ہیں اور اس کے دو ضلع ثابت نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا ضلع ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۴۷۔ اگر ایک مخروطی تین ثابت خطوط مستقیم کو مس کرے اور ایک دئے ہوئے نقطہ ف میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ ایک ثابت خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک مخروطی ہے جو ف کے تمام محلوں کے لئے تین ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے۔

۴۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے اندر دو نقطے و، وَ لئے گئے ہیں۔ مثلث کے راسوں اور و، وَ میں سے گذرتے ہوئے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو ضلعوں پر علی الترتیب نقطوں کے زوج لا اور لاَ، ما اور ماَ، ے اور ےَ متعین کرتے ہیں۔ مثلثوں لا ما ے، لاَ ماَ ےَ

کے متناظر ضلع نقطوں ف، ق، ر پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ چھ نقطے لا، ما، ے، لاَ، ماَ، ےَ ایک مخروطی پر واقع ہیں جس کے لحاظ سے ف ق ر ایک خود قطبی مثلث ہے۔

۴۹ ـــ اگر مخروطی $ء\,لا^{۲} + و\,ما^{۲} + ط\,ی^{۲} + ۲\,عَ\,ی\,ما + ۲\,وَ\,لا\,ی + ۲\,طَ\,ما\,لا = ۰$ مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو نقطوں کے تین زوجوں میں قطع کرے اور ان نقطوں کو مقابل کے راسوں سے ملایا جائے تو یہ چھ خطوط مستقیم مخروطی

$$ع\,ء^{۲}\,لا^{۲} + و\,و^{۲}\,ما^{۲} + ط\,ط^{۲}\,ی^{۲} - ۲\,عَ\,و\,ط\,ما\,ی - ۲\,وَ\,ط\,ء\,ی\,لا - ۲\,طَ\,ء\,و\,لا\,ما = ۰$$

کو مس کرینگے۔

۵۰ ـــ بنیادی مثلث کے راسوں سے $(ء\,و\,ط\,عَ\,وَ\,طَ)(لا\,ما\,ی)^{۲} = ۰$ کے مماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں اور ہر زوج مقابل کے ضلعوں کے ساتھ نقطوں کا ایک زوج متعین کرتا ہے۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس پر یہ چھ نقطے واقع ہیں اور ثابت کرو کہ مخروطی

$$\sqrt{لا(وَطَ - ء\,عَ)} + \sqrt{ما(طَ\,ءَ - و\,وَ)} + \sqrt{ی(ءَ\,وَ - ط\,طَ)} = ۰$$

اور اوپر کے دو مخروطی ایک مشترک اندرونی چار ضلعی رکھتے ہیں۔

چودہواں باب

متکافی قطبی ظل

۵۰۲ — اگر ایک شکل ایک سُتوی میں متعدد نقطوں اور خطوطِ مستقیم پر مشتمل ہو اور اگر ہم ایک ثابت مخروطی ج کے لحاظ سے ان نقطوں کے قطبی اور ان خطوں کے قطب لیں تو ایک دوسری شکل حاصل ہوگی جس کو امدادی مخروطی ج کے لحاظ سے اول الذکر کا قطبی متکافی کہا جائے گا۔

جب ایک شکل کا ایک نقطہ اور متکافی شکل کا ایک خط امدادی مخروطی ج کے لحاظ سے قطب اور قطبی ہوتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ وہ ایک دوسرے کے متناظر ہیں۔

اگر ایک شکل میں ایک منحنی س ہو تو وہ خطوط جو س کے مختلف نقطوں کے متناظر ہیں سب کے سب کسی منحنی سَ کو مس کرینگے۔ فرض کرو کہ س کے دو نقطوں ف، ق کے متناظر خطوط ت پر ملتے ہیں، تو ت خط ف ق کا قطب بلحاظ ج ہے یعنے خط ف ق، نقطہ ت کے متناظر ہے۔ اب اگر نقطہ ق، ف کی جانب حرکت کرکے بالآخر اس پر منطبق ہو جائے تو سَ کے متناظر دو مماس بھی بالآخر ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اور ان کا نقطۂ تقاطع ت

بالآخر منحنی سَ پر ہوگا اور اُس خط کے نقطۂ تماس پر منطبق ہوگا جو نقطہ ف کے متناظر ہے۔ پس س کا ایک مماس منحنی سَ کے ایک نقطہ کے متناظر ہوتا ہے عین ویسے ہی جیسے سَ کا کوئی مماس، س پر کے ایک نقطے کے متناظر ہوتا ہے۔ اِس لیے س، سَ سے ٹھیک اسی طرح تکوین پاتا ہے جس طرح سَ، س سے چنانچہ ہمیں وہی منحنی سَ حاصل ہوگا خواہ ہم س کے مختلف نقطوں کے قطبیوں کا لفاف لیں یا س کے مختلف مماسوں کے قطبوں کا طریق لیں۔

۳۰۶ — اگر کوئی خط ل، منحنی س کو متعدد نقطوں ف، ق، ر،... پر قطع کرے تو نقطوں ف، ق، ر، ..... کے متناظر سَ کے مماس حاصل ہوں گے اور یہ مماس سب کے سب ایک نقطے میں سے گذریں گے یعنے اُس نقطہ میں سے جو امدادی مخروطی کے لحاظ سے ل کا قطب ہے۔ اِس لیے ایک نقطہ میں سے سَ کے اُتنے ہی مماس کھینچے جا سکتے ہیں جتنے نقطے س پر ایک ہی خطِ مستقیم میں ہوتے ہیں۔ یعنے سَ کی جماعت (class، دفعہ ۲۳۸) س کے درجہ کے مساوی ہوتی ہے اور سَ کا درجہ س کی جماعت کے مساوی ہوتا ہے۔ (۳۹۶)

بالخصوص اگر س ایک مخروطی ہو تو وہ دوسرے درجہ کا اور دوسری جماعت کا ہوگا۔ اِس لیے تکافی منحنی دوسری جماعت کا اور دوسرے درجہ کا ہوگا اور اِس لیے وہ بھی ایک مخروطی ہے۔

۳۰۷ — ایک مخروطی کا قطبی تکافی دوسرے مخروطی کے لحاظ سے معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ اِن مخروطیوں کی مساواتیں اِن کے مشترک خود قطبی مثلث کے حوالے سے

$$س_۱ \equiv ع_۱ ء^۲ + و_۱ ب^۲ + ط_۱ ج^۲ = ۰$$

اور $س_۲ \equiv ع_۲ عہ^۲ + و_۲ بہ^۲ + ط_۲ جہ^۲ = ۰$

ہیں۔ $س_۱$ پر کے کسی نقطہ (عَہ، بَہ، جَہ) کا قطبی بلحاظ $س_۲$ کے

$$ع_۲ عَہ عہ + و_۲ بہ بَہ + ط_۲ جہ جَہ = ۰$$

ہے۔ اس کا لفاف، شرط $ع_۱ عَہ^۲ + و_۱ بَہ^۲ + ط_۱ جَہ^۲ = ۰$ کے ساتھ،

$$\frac{عہ^۲ ع_۲^۲}{ع_۱} + \frac{بہ^۲ و_۲^۲}{و_۱} + \frac{جہ^۲ ط_۲^۲}{ط_۱} = ۰$$

ہے۔ مخروطی $ل ع^۲ + م بہ^۲ + ن جہ^۲ = ۰$ کے لحاظ سے $س_۱$ کا تکافی

$$\frac{عہ^۲ ل^۲}{ع_۱} + \frac{بہ^۲ م^۲}{و_۱} + \frac{جہ^۲ ن^۲}{ط_۱} = ۰$$

ہے۔ یہ مساوات مخروطی $س_۲$ کو تعبیر کرے گی اگر

$$\frac{ل^۲}{ع_۱ ع_۲} = \frac{م^۲}{و_۱ و_۲} = \frac{ن^۲}{ط_۱ ط_۲}$$

پس مخروطی $س_۱$ اور $س_۲$، مخروطیوں

$$عہ^۲ \sqrt{ع_۱ ع_۲} \pm بہ^۲ \sqrt{و_۱ و_۲} + جہ^۲ \sqrt{ط_۱ ط_۲} = ۰$$

میں سے کسی ایک کے لحاظ سے ایک دوسرے کے تکافی ہیں۔

۳۰۸ — کسی دئے ہوئے مسئلہ سے جو نقطوں اور خطوں کے محلوں سے متعلق ہو ایک دوسرا مسئلہ تکافی قطبیوں کے طریقہ سے ماخوذ کیا

جا سکتا ہے جس میں نقطوں کی بجائے خطوطِ مستقیم اور خطوطِ مستقیم کی بجائے نقطے ہونگے۔

تناظر کی سادہ ترین صورتیں حسبِ ذیل ہیں:

(۱) ایک شکل کے نقطے تکافی شکل میں خطوطِ مستقیم میں تکافی ہوتے ہیں۔

(۲) دو نقطوں کو ملانے والا خط، متناظر خطوں کے نقطۂ تقاطع میں تکافی ہوتا ہے۔

(۳) کسی منحنی کا مماس، تکافی شکل کے متناظر منحنی پر ایک نقطہ میں تکافی ہوتا ہے۔

(۴) مماس کا نقطۂ تماس، متناظر نقطہ پر کے مماس میں تکافی ہوتا ہے۔

(۵) اگر دو منحنی مس کریں یعنے اگر دو منطبق نقطے مشترک ہوں تو تکافی منحنیوں میں دو منطبق مماس مشترک ہوں گے اور اس لیے وہ (تکافی منحنی) ایک دوسرے کو مس کرینگے۔

(۶) وہ وتر جو ایک منحنی کے دو نقطوں کو ملاتا ہے تکافی منحنی کے متناظر مماسوں کے نقطۂ تقاطع میں تکافی ہوتا ہے۔

(۷) وہ خط جو دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کو ملاتا ہے متناظر نقطوں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع میں تکافی ہوتا ہے۔

(۸) چونکہ امدادی مخروطی کے مرکز میں سے گذرنے والے کسی خط کا قطب لاتناہی پر ہوتا ہے اس لیے تکافی منحنی پر لاتناہی پر کے نقطے ابتدائی منحنی کے اُن مماسوں کے متناظر ہونگے جو امدادی مخروطی کے مرکز سے کھینچے گئے ہوں۔ پس ایک مخروطی کا تکافی قطع زائد، مکافی، یا ناقص ہوگا بموجب اسکے کہ امدادی مخروطی سے اس کے مماس حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں یعنے بموجب اسکے کہ امدادی مخروطی کا مرکز منحنی کے

باہر، یا اُس پر، یا اس کے اندر ہو۔

حسب ذیل مثالیں تکافی مسئلوں کی ہیں:-

(۱) اگر دو مثلثوں کے راس ایک مخروطی پر ہوں تو اِن کے چھ ضلع دوسرے مخروطی کو مس کرینگے۔

(اَ) اگر دو مثلثوں کے ضلع ایک مخروطی کو مس کریں تو اِن کے چھ نقاطِ راس دوسرے مخروطی پر ہوں گے۔

(۲) اگر ایک مخروطی میں ایک مسدس کھینچا جائے تو اسکے متقابلہ ضلعوں کے تین نقاطِ تقاطع ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوں گے۔
(پیاسکل کا مسئلہ)

(۲َ) اگر ایک مخروطی کے گرد ایک مسدس کھینچا جائے تو اس کے متقابلہ راسوں کو ملانے والے تین خطوط ایک نقطہ پر ملینگے۔
(بریانکاں کا مسئلہ)

(۳) اگر ایک مثلث کے تین ضلع ایک مخروطی کو مس کریں اور اس کے راسوں میں سے دو، دوسرے مخروطی پر واقع ہوں تو تیسرے راس کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔

(۳َ) اگر ایک مثلث کے تین راس ایک مخروطی پر واقع ہوں اور اس کے ضلعوں میں سے دو، ایک دوسرے مخروطی کو مس کریں تو تیسرے ضلع کا لفاف ایک مخروطی ہوگا۔

(۴) اگر ایک مثلث کے ضلع ایک مخروطی کو مس کریں تو وہ تین خطوط جو ایک ایک راس کو متقابل کے ضلع کے

(۴َ) اگر ایک مثلث کے راس ایک مخروطی پر واقع ہوں تو وہ تین نقاطِ تقاطع جو ایک ضلع اور متقابل راس پر کے مماس کے تقاطع سے

نقطۂ تماس سے ملاتے ہیں ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔	حاصل ہوتے ہیں ایک خط پر واقع ہوتے ہیں۔
(۵) چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرنے والے مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبی سب کے سب ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔	(۵َ) چار دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرنے والے مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے قطب سب کے سب ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔
(۶) چار ثابت نقطوں میں سے گذرنے والے مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے قطب کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔	(۶َ) چار ثابت خطوں کو مس کرنے والے مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبی کا لفاف ایک مخروطی ہوتا ہے۔

۳۰۹ — اب ہم اُن نتیجوں پر غور کریں گے جو ایک دائرہ کے لحاظ سے مکافات کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ ایک دائرہ کے مرکز اور کسی نقطہ ف کو ملانے والا خط دائرہ کے لحاظ سے ف کے قطبی پر عمود ہوتا ہے۔ اِس لیے اگر ف، ق کوئی دو نقطے ہوں اور ایک دائرہ کے لحاظ سے ان کے قطبی معلوم کئے جائیں تو اِن قطبیوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہوگا جو ف ق کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔ اِس مسئلہ کا تشاکلی یہ ہے کہ کسی دو خطوطِ مستقیم کا درمیانی زاویہ اُس زاوئیے کے مساوی ہوتا ہے جو اِن خطوط کے

قطبوں کو ملانے والے خط کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔

نیز ہم جانتے ہیں کہ ایک دائرہ کے مرکز سے کسی نقطہ کے اور اُس کے قطبی (دائرہ کے لحاظ سے) کے فاصلے ایک دوسرے کے بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔

۳۱۰ — اگر ہم ایک دائرہ کے لحاظ سے مکافات کریں تو یہ واضح ہے کہ امدادی دائرہ کے نصف قطر میں کسی تبدیلی سے تکافی منحنی کی شکل میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی بلکہ صرف اِس کے جثہ میں تبدیلی ہوگی۔ اب چونکہ تکافی منحنی کے خطوط کی مطلق مقداروں سے بالعموم واسطہ نہیں رہتا اِس لیے صرف امدادی دائرہ کے مرکز کو معلوم کرنیکی ضرورت ہوگی۔ اِس لیے یہ کہنے کی بجائے کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز و ہے مکافات لی گئی ہے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ایک نقطہ و کے لحاظ سے مکافات کی گئی ہے۔

۳۱۱ — اگر کسی مخروطی کو ایک نقطہ و کے لحاظ سے تکافی کیا جائے تو تکافی منحنی کے وہ نقطے جو ابتدائی منحنی کے اُن مماسوں کے متناظر ہیں جو و میں سے گذرتے ہیں لامتناہی فاصلہ پر ہونے چاہئیں اس لیے تکافی منحنی پر کے اُن نقطوں کی سمتیں جو لاتناہی پر ہیں اُن مماسوں پر عمود ہیں جو و سے ابتدائی منحنی کے کھینچے گئے ہیں۔ اور اِس لیے تکافی منحنی کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کا متمم ہوتا ہے جو و سے کھینچے ہوئے ابتدائی منحنی کے مماسوں کے درمیان ہے۔

بالخصوص اگر و سے ابتدائی منحنی کے مماس علی القوائم ہوں تو تکافی منحنی قائم زائد ہوگا۔ نیز تکافی مخروطی کے محور اُس کے متقاربوں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔ اِس لیے محور اُن زاویوں کے

تا صفوں کے متوازی ہیں جو و سے کھینچے ہوئے ابتدائی منحنی کے مماسوں کے درمیان ہیں۔

ابتدائی مخروطی کے لاتناہی پر کے نقطوں کے جواب میں تکافی منحنی کے وہ مماس حاصل ہوتے ہیں جو مبدا ا میں سے گذرتے ہیں۔ پس تکافی مخروطی کے وہ مماس جو مبدا ا سے کھینچے گئے ہوں ان خطوں کی سمتوں پر عمود ہوں گے جو مبدا ا سے ابتدائی منحنی کے لاتناہی پر کے نقطوں کی جانب کھینچے گئے ہوں۔ اسلئے ابتدائی مخروطی کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کا متمم ہوتا ہے جو مبدا ا سے کھینچے ہوئے تکافی منحنی کے مماسوں کے درمیان ہے۔

بالخصوص اگر ایک قائم زائد کو کسی نقطہ و کے لحاظ سے تکافی کیا جائے تو و سے تکافی منحنی کے مماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں گے، بہ الفاظِ دیگر و، تکافی مخروطی کے مرتب دائرہ پر ایک نقطہ ہے۔

۳۱۲ — مبدا ا کا تکافی ' لاتناہی پر کا خط ہوتا ہے اور اِس لیے مبدا ا کے قطبی کا تکافی ' لاتناہی پر کے خط کا قطب ہے۔ یعنے مبدا ا کا قطبی تکافی منحنی کے مرکز میں تکافی ہوتا ہے۔

مکافات کی حسب ذیل مثالیں اہم ہیں:

ا — وہ تمام مخروطی جو ایک مثلث کو حائط کرتے ہیں اور اس کے مرکز عمودی میں سے گذرتے ہیں قائم زائد ہوتے ہیں۔ اگر مرکز عمودی و کے لحاظ سے مکافات کی جائے تو ایک

دوسرا مثلث حاصل ہوگا جس کا مرکز عمودی و ہوگا۔
قائم زائد مکافی ہو جائیں گے کیونکہ وہ سب و میں سے گذرتے ہیں۔ اور چونکہ اِن مخروطیوں میں سے کسی ایک کے لاتناہی پر کے نقطے عمودی سمتوں میں ہوتے ہیں اس لیے اِن مکافیوں میں سے کسی ایک کے وہ مماس جو و سے کھینچے گئے ہوں علی القوائم ہوں گے اور اِس لیے نقطہ و ہر مکافی کے مرتب پر ہے۔
پس مکافی مسئلہ حسب ذیل ہے:

اُن تمام مکافیوں کے مرتب جو ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرتے ہیں مثلث کے مرکز عمودی میں سے گذرتے ہیں۔

۲۔ اگر چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرنیوالے مخروطیوں میں سے دو قائم زائد ہوں تو یہ تمام مخروطی قائم زائد ہوں گے۔

اگر اِس مسئلہ کی مکافات کسی نقطہ و کے لحاظ سے کیجائے تو حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوگا:

اگر چار دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرنے والے مخروطیوں میں سے دو کے مرتب دائرے ایک نقطہ و میں سے گذریں تو اِن تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے و میں سے گذریں گے۔

یعنے چار دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرنے والے

مخروطیوں کے مرتب دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۳۱۳ — ایک دائرہ کا قطبی تکافی بلحاظ دوسرے دائرہ کے معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ اُس دائرہ کا جس کی تکافات عمل میں لانا ہے (۴۰۱)
نصف قطر ا اور مرکز ج ہے، فرض کرو کہ امدادی دائرہ کا مرکز و اور نصف قطر ک ہے۔ فرض کرو کہ اِن دو دائروں کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ ج ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ ج کا کوئی مماس ف ن ہے اور اس مماس کا قطب بلحاظ امدادی دائرہ کے فَ ہے۔ فرض کرو کہ و فَ، مماس سے نقطہ ن پر ملتا ہے۔ ج م کو و ن پر عمود کھینچو۔

تب $$\text{وفَ} \times \text{ون} = \text{ک}^2،$$

$$\therefore \frac{\text{ک}^2}{\text{وفَ}} = \text{ون} = \text{وم} + \text{من} = \text{ج جم ج وم} + \text{ا}$$

$\therefore$ فَ کے طریق کی مساوات

$$\frac{\frac{\text{ک}^2}{\text{د}}}{\text{ر}} = 1 + \frac{\text{ج}}{\text{د}}\ \text{جم طہ}$$

ہے - یہ ایک مخروطی کی مساوات ہے جس کا ماسکہ و، نیم وتر خاص $\frac{\text{ک}^2}{\text{د}}$، اور خروج المرکز $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$ ہے - اس مخروطی کا مرتب وہ خط ہے جس کی مساوات

$$\frac{\text{ک}^2}{\text{ر}} = \text{ج جم طہ}، \quad \text{یا} \quad \text{لا} = \frac{\text{ک}^2}{\text{ج}}$$

ہے -

پس مکافی منحنی کا مرتب ابتدائی منحنی کے مرکز کا قطبی ہے۔

خروج المرکز کی محصلہ بالا قیمت سے یہ واضح ہے کہ مکافی منحنی ایک ناقص ہوگا اگر نقطہ و دائرہ ج کے اندر ہو، ایک زائد ہوگا اگر نقطہ و دائرہ ج کے باہر واقع ہو، اور ایک مکافی ہوگا اگر و دائرہ ج کے محیط پر ہو -

مثال ۱ - مخروطی کے مماس جو کسی نقطے سے کھینچے گئے ہوں ماسکہ پر مساوی زاویے بناتے ہیں -

اس ماسکہ کے لحاظ سے مکافات عمل میں لاؤ - تب مخروطی کے دو مماسوں کے متناظر دو نقطے ایک دائرہ پر حاصل ہوں گے، اور ان مماسوں کے نقطۂ تقاطع کے متناظر ایک خط حاصل ہوگا جو دائرہ پر کے ان دو نقطوں کو ملاتا ہے، نیز مخروطی کے ان مماسوں کے نقاطِ تماس کے متناظر وہ مماس حاصل ہوں گے جو دائرہ پر کے نقطوں پر مماس کے کھینچے گئے ہوں لیکن

کسی دو نقطوں کے محاذی مخروطی کے ماسکہ پر جو زاویہ بنتا ہے وہ اُس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو اِن نقطوں کے متناظر خطوں کے درمیان ہوتا ہے پس مکافی مسئلہ حسب ذیل ہے ۔

وہ خط جو ایک دائرہ پر کے دو نقطوں کو ملاتا ہے ان نقطوں پہ کے مماسوں کے ساتھ مساوی زاوئے بناتا ہے ۔

مثال ۲ ۔ اگر مخروطی کا ایک وتر ایک ثابت نقطہ و پر قائمہ زاویہ بنائے تو اِس وتر کا لفاف ایک مخروطی ہوگا جسکا ایک ماسکہ و ہوگا اور متناظر مرتب وہ خط ہوگا جو ابتدائی مخروطی کے لحاظ سے و کا قطبی ہے ۔

و کے لحاظ سے مکافات کرو تو یہ مسئلہ حسب ذیل ہو جاتا ہے :
اگر ایک مخروطی کے مماس ایک دوسرے کے ساتھ زاویۂ قائمہ بنائیں تو اِن مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک ہم مرکز دائرہ ہوگا ۔

مثال ۳ ۔ اگر دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہو تو اِن کے مشترک وتروں میں سے دو اِن کے مرتبوں کے نقطۂ تقاطع میں سے گذریں گے ۔

مشترک ماسکہ کے لحاظ سے مکافات کرو تو مسئلہ حسب ذیل ہوتا ہے :
دو دائروں کے مشترک مماسوں کے نقاطِ تقاطع میں سے دو اُس خط پہ ہوتے ہیں جو دائروں کے مرکزوں کو ملاتا ہے ۔

مثال ۴ ۔ ایک مثلث کو ایک مکافی کے گرد کھینچا گیا ہے ،

اِس مثلث کا مرکز عمودی مرتب پر ہوگا ۔ مرکز عمودی کے لحاظ سے
مکافات کرو تو حاصل ہوگا :
وہ مخروطی جو ایک مثلث کو حائط کرتا ہے اور اِس کے مرکز عمودی
میں سے گذرتا ہے ایک قائم زائد ہوتا ہے ۔
آٹھویں باب میں مندرجہ متعدد مثالیں مکافات کے ذریعہ ثابت
کیجا سکتی ہیں ۔ مثلاً ۲۳ کا متکافی ، مشترک ماسکہ کے لحاظ سے حسب ذیل ہے :
مساوی نصف قطروں کے دائرے کھینچے گئے ہیں جن کے مرکز
ایک دوسرے دائرہ پر ہیں ۔
ثابت کرو کہ یہ سب دائرے دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں
جن کے نصف قطر ، متحرک دائرہ اور دوسرے دائرہ کے نصف قطروں کا
علی الترتیب مجموعہ اور فرق ہیں اور جو دوسرے دائرہ کے ہم مرکز ہیں ۔
۳۱۴ ۔ اگر دائروں کا ایک ایسا نظام ہو جن کا بنیادی محور
وہی ہو تو ہم اِن دائروں کو ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک نظام میں
متکافی کر سکتے ہیں ۔
اگر کسی نقطہ و کے لحاظ سے مکافات کی جائے تو مخروطیوں کا
ایک نظام حاصل ہوگا جن کا ایک ماسکہ و پر ہوگا اور کسی مخروطی کا
مرکز [دفعہ ۳۱۲] متناظر دائرہ کے لحاظ سے و کے قطبی کا متکافی ہوگا ۔
اب اِس نظام کے "دو انتہائی نقطوں" میں سے ایک ایسا ہے کہ
نظام کے کسی دائرہ کے لحاظ سے اِس کا قطبی ایک ثابت خطِ مستقیم ہے
یعنے وہ خط جو دوسرے انتہائی نقطہ میں سے گذرتا ہے اور بنیادی محور
کے متوازی ہے ۔ پس اگر دائروں کو ایک انتہائی نقطہ کے لحاظ سے
متکافی کیا جائے تو تمام متکافیوں کا مرکز ایک ہی ہوگا اور اگر یہ تمام
متکافی ایک مشترک مرکز اور ایک مشترک ماسکہ رکھتے ہوں تو وہ ہم
ماسکی ہوں گے ۔ نیز چونکہ بنیادی محور ایک انتہائی نقطہ کے قطبی کے

متوازی ہے اور انتہائی نقطہ اور اس کے قطبی کے وسط میں واقع ہے اس لیے اس انتہائی نقطہ کے لحاظ سے بنیادی محور کا تکافی اس خط پر ہے جو تکافی مخروطیوں کے ماسکہ اور مرکز میں سے گذرتا ہے اور وہ ماسکہ سے مرکز کی بہ نسبت دوچند فاصلہ پر واقع ہے۔ پس جب ہم محور دائروں کے ایک نظام کو ایک انتہائی نقطہ کے لحاظ سے تکافی کرتے ہیں تو بنیادی محور ہم ماسکی مخروطیوں کے دوسرے ماسکہ میں تکافی ہوتا ہے۔

حسب ذیل مسئلے تکافی ہیں:

(۱) دو ہم ماسکی مخروطیوں کے کسی مشترک نقطہ پر کے مماس علی القوائم ہوتے ہیں۔

(آ) دو دائروں کے ایک مشترک مماس کے نقاط تماس کے محاذی ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔

(۲) اگر دو خطوط دو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ہر ایک کو مس کریں اور ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو ان خطوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔

(۲َ) اگر دو دائروں میں سے ہر ایک پر ایک نقطہ لیا گیا ہو اور ان دو نقطوں کے محاذی ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنے تو ان نقطوں کو ملانیوالے خط کا لفاف ایک مخروطی ہوگا جس کے ماسکوں میں سے ایک ماسکہ اس انتہائی نقطہ پر ہوگا۔

(۳) اگر کسی نقطہ سے دو ہم ماسکی مخروطیوں کے مماسوں کے دو زوج ف، فَ اور ق، قَ کھینچے جائیں تو ف اور ق کا درمیانی زاویہ

(۳َ) اگر کوئی خط مستقیم دو دائروں کو نقطوں ف، فَ اور ق، قَ پر قطع کرے تو ایک انتہائی نقطہ پر ف ق اور فَ قَ کے محاذی مساوی زاویے بنینگے۔

فَ اور قَ کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوگا۔

(۴) اگر کسی نقطہ سے دو ہم ماسکی مخروطیوں کے چار مماسی ف، فَ اور ق، قَ کھنچے جائیں اور ف کے نقطۂ تماس کو ق، قَ کے نقاطِ تماس کے ساتھ ملایا جائے تو یہ خطوطِ مماس ف کے ساتھ مساوی زاویے بنائینگے۔ [دفعہ ۲۳۰]۔

(۴) اگر کوئی خطِ مستقیم دو دائروں کو نقطوں ف، فَ اور ق، قَ پر قطع کرے اور ف پر کا مماس ق اور قَ پر کے مماسوں سے ق، قَ پر ملے تو ایک انتہائی نقطہ ف ق، ف قَ کے محاذی مساوی (یا متمم) زاویے بنینگے۔

(۴۰۴)

مخروطی تظلیل

۳۱۵ ۔ اگر کسی نقطہ ف کو ایک ثابت نقطہ ط سے ملایا جائے اور ط ف کسی ثابت مستوی سے فَ پر منقطع ہو تو نقطہ فَ کو مستوی مذکور پر ف کا ظِل کہتے ہیں۔ نقطہ ط کو تظلیل کا راس یا مرکز اور قاطع مستوی کو تظلیل کا مستوی کہا جاتا ہے۔

۳۱۶ ۔ کسی خطِ مستقیم کا ظِل ایک خطِ مستقیم ہوتا ہے۔

کیونکہ وہ خطوطِ مستقیم جو ط کو کسی خطِ مستقیم کے تمام نقطوں سے ملاتے ہیں ایک مستوی میں ہوتے ہیں اور یہ تظلیل کے مستوی سے ایک خطِ مستقیم میں منقطع ہوتا ہے۔

۳۱۷ — کوئی مستوی منحنی اسی درجہ کے ایک منحنی میں منظلل ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر کوئی خط مستقیم ابتدائی منحنی سے نقطوں ا، ب، ج... پر ملے تو خط کا ظل منحنی کے ظلیل سے اُن نقطوں پر ملے گا جہاں ط ا، ط ب، ط ج ..... تظلیل کے مستوی سے ملتے ہیں۔ اس لیے ایک منحنی میں ایک خط مستقیم پر اتنے ہی نقطے ہونگے جتنے دوسرے منحنی میں ہیں۔ اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

بالخصوص ایک مخروطی کا ظل ایک مخروطی ہوتا ہے۔

اس مسئلہ میں وہ ہندسی مسئلہ شامل ہے کہ ایک قائم مستدیر مخروط کی ہر مستوی تراش ایک مخروطی ہوتی ہے۔

۳۱۸ — ایک منحنی کا مماس ظل کے منحنی کے مماس میں منظلل ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر ایک خط مستقیم ایک منحنی سے دو نقطوں ا، ب پر ملے تو اس خط کا ظل منحنی کے ظل سے دو نقطوں اَ، بَ پر ملیگا جہاں ط ا، ط ب تظلیل کے مستوی سے اَ، بَ پر ملتے ہیں۔ پس اگر ا، ب منطبق ہوں تو اَ، بَ بھی منطبق ہوں گے۔

۳۱۹ — ایک منحنی کے لحاظ سے قطب اور قطبی کا رشتہ تظلیل سے نہیں بدلتا۔

یہ پچھلے دو مسئلوں سے ماخوذ ہوتا ہے۔

یہ بھی ظاہر ہے کہ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو مزدوج خط یا دو مزدوج نقطے ظل کے منحنی کے لحاظ سے دو مزدوج خطوں یا دو مزدوج

نقطوں میں منظلل ہوتے ہیں۔

(۴۰۵) ۳۲۰ ـــ ظل کے راس میں سے ایک مستوی تظلیل کے مستوی کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ مستوی اصلی مستوی کو خط کَ لَ پر قطع کرتا ہے۔ اب چونکہ مستوی ط کَ لَ اور تظلیل کا مستوی متوازی ہیں اس لیے ان کا خطِ تقاطع جو کَ لَ کا ظل ہے لامتناہی فاصلہ پر ہے۔

پس کسی مخصوص خطِ مستقیم کَ لَ کو لامتناہی فاصلہ پر منظلل کرنا ہو تو کسی نقطہ ط کو راس اور مستوی ط کَ لَ کے متوازی ایک مستوی کو تظلیل کا مستوی قرار دو۔

وہ خطوطِ مستقیم جو خط کَ لَ پر کسی نقطہ میں ملتے ہوں متوازی خطوطِ مستقیم میں منظلل ہوں گے کیونکہ ان کا نقطۂ تقاطع لامتناہی پر منظلل ہوگا۔

۳۲۱ ـــ اصلی مستوی پر کے متوازی خطوطِ مستقیم کا کوئی نظام ایسے خطوں میں منظلل ہوگا جو ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

کیونکہ فرض کرو کہ ط ف وہ خط ہے جو راس میں سے گذرتا ہے اور نظام کے متوازی ہے جہاں ف تظلیل کے مستوی پر ہے۔ اب چونکہ ط ف اس مستوی میں ہے جو ط میں سے اور کسی ایک متوازی خط میں سے گذرتا ہے اس لیے متوازی خطوں میں سے ہر ایک کا ظل ف میں سے گذرے گا۔

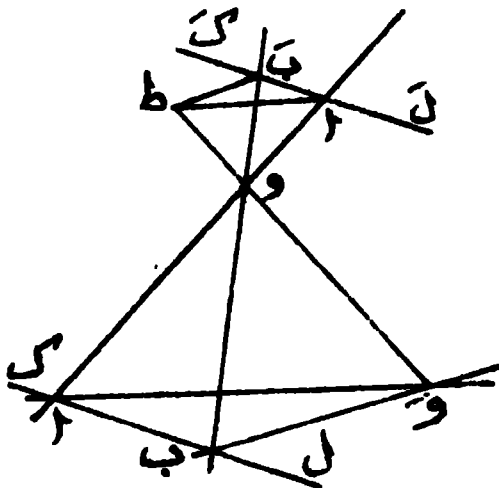
متوازی خطوں کے مختلف نظاموں کے لیے نقطہ ف کا محل بدلے گا، لیکن چونکہ ط ف ہمیشہ اصلی مستوی کے متوازی رہتا ہے اس لیے ف ہمیشہ اس خطِ تقاطع پر ہوگا جو تظلیل کے مستوی اور راس میں سے گذرنے والے اس مستوی کا ہے جو اصلی مستوی کے متوازی ہے۔

پس اصلی مستوی پر کے متوازی خطوں کا کوئی نظام خطوں کے

ایک نظام میں تظلیل ہوتا ہے جو ایک نقطہ میں سے گذرتے ہیں اور ایسے تمام نقطے، متوازی خطوں کے مختلف نظاموں کے لیے ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

۳۲۲ — فرض کرو کہ اصلی مستوی اور تظلیل کے مستوی کا خط القاطع ک ل ہے۔ اس میں سے ایک مستوی تظلیل کے مستوی کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ اصلی مستوی کو خط کَ لَ پر قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ دو خطوطِ مستقیم ا و اَ ب و بَ خطوط ک ل، کَ لَ سے علی الترتیب اَ بَ اور اَ، ب پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ ط و تظلیل کے مستوی سے وَ پر ملتا ہے۔ تب

ا وَ اور ب وَ، ا و اَ اور ب و بَ کے ظل ہیں۔ (۴۰۶)

چونکہ مستوی ط اَ بَ اور ا وَ ب متوازی ہیں اور متوازی مستوی ایک ہی مستوی سے متوازی خطوں میں منقطع ہوتے ہیں اس لیے خطوط ط اَ، ط بَ علی الترتیب ا وَ، ب وَ کے متوازی ہیں۔ اس لیے زاویہ اَ ط بَ = زاویہ ا وَ ب یعنی اَ ط بَ اس زاویہ کے مساوی ہے جس میں ا و ب مظلل ہوتا ہے۔

اسی طرح اگر خطوطِ مستقیم ج د اور ع دٓ، کَ لَ سے علی الترتیب جَ، دَ پر ملیں تو زاویہ جَ ط دَ اس زاویہ کے مساوی ہوگا جس میں ج د ع مظلل ہوتا ہے۔

اوپر کے مسئلہ سے ظلوں کے نظریہ میں حسب ذیل بنیادی مسئلہ ماخوذ ہوتا ہے:

کسی خطِ مستقیم کو لاتناہی پر مظلل کیا جا سکتا ہے اور اس کے ساتھ ہی کسی دو زاویوں کو دئے ہوئے زاویوں میں مظلل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ وہ خطوطِ مستقیم جو دو زاویوں کی ساقوں کو تعبیر کرتے ہیں اُس خط سے جس کو لاتناہی پر مظلل کرنا ہے نقطوں اَ، بَ اور جَ، دَ پر ملتے ہیں۔ کوئی مستوی اَ بَ جَ دَ میں سے گذرتا ہوا کھینچو اور اس مستوی میں دائروں کے ایسے قطعے لو جو علی الترتیب اَ بَ اور جَ دَ میں سے گذریں اور ان میں دئے ہوئے زاویوں کے مساوی زاوئے بنیں۔ دائروں کے ان قطعوں کے نقاطِ تقاطع میں سے کسی ایک کو تظلیل کا مرکز قرار دیا جا سکتا ہے اور تظلیل کے مستوی کو اُس مستوی کے متوازی لینا چاہئے جس کو ہم نے اَ بَ جَ دَ میں سے گذرتے ہوے کھینچا ہے۔

اگر قطعے ایک دوسرے سے نہ ملیں تو تظلیل کا مرکز خیالی ہوگا۔

مثال ا۔ ثابت کرو کہ کسی چار ضلعی کو ایک مربع میں مظلل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ چار ضلعی اب ج د ہے اور فرض کرو کہ متقابلہ ضلعوں کے ایک زوج کے نقاطِ تقاطع ف، ق [دیکھو شکل دفعہ ۵۷] ہیں۔ فرض کرو کہ

وتر ب د ' ا ج خط ف ق سے نقطوں س، ر پر ملتے ہیں۔ اب اگر ف ق کو لاتناہی پر اور اس کے ساتھ ہی زاویوں ف د ق اور ر د س کو قائمہ زاویوں میں مظلل کیا جائے تو ظِل کو ایک مربع ہونا چاہئے۔ کیونکہ ف ق لاتناہی پر ظلیل ہو چکا ہے' اس لیے ظِل میں متقابلہ ضلعوں کے زوج متوازی ہوں گے یعنے ظِل ایک متوازی الاضلاع ہے۔ نیز اس متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہے اور وتروں کا درمیانی زاویہ بھی قائمہ ہے' اس لیے ظِل ایک مربع ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ وہ مثلث جو ایک چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے کسی مخروطی کے لحاظ سے جو چار ضلعی کے ضلعوں کو مس کرے خود قطبی ہے۔

چار ضلعی کو ایک مربع میں مظلل کرو۔ اب وہ دائرہ جو مربع کو حائط کرتا ہے مخروطی کا مرتب دائرہ ہے' اس لیے مربع کے وتروں کا نقطۂ تقاطع مخروطی کا مرکز ہے۔

لیکن مرکز کا قطبی لاتناہی پر کا خط ہے' اس لیے وتروں میں سے دو کے نقطۂ تقاطع کا قطبی تیسرا وتر ہے۔

مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی کو ایک چار ضلعی میں کھینچا جائے تو نقاطِ تماس میں سے دو کو ملانیوالا خط اس مثلث کے ایک راس میں سے گذریگا جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے۔

مثال ۴۔ اگر ایک مکافی کے گرد مثلث ا ب ج

کھینچا جائے اور متوازی الاضلاعوں اب اَ جَ ب ج بَ اور ج اَ جَ ب کی تکمیل کیجائے تو وتر تماس علی الترتیب نقطوں اَ، بَ، جَ میں سے گذرینگے۔

یہ مثال ۳ کی مخصوص صورت ہے جس میں چار ضلعی کا ایک ضلع لاتناہی پر کا خط ہے۔

مثال ۵ — اگر دو مثلثوں کے راسوں کو ملانے والے تین خطوط ایک نقطہ پر ملیں تو متناظر ضلعوں کے تین نقاطِ تقاطع ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوں گے۔

(۴۰۸) متناظر ضلعوں کے نقاطِ تقاطع میں سے دو کو لاتناہی پر مظلل کرو تو متناظر ضلعوں کے دو زوج متوازی ہونگے اور پھر یہ بتانا آسان ہے کہ تیسرا زوج بھی متوازی ہوگا۔

۳۲۳ — کسی مخروطی کو ایک دائرہ میں مظلل کیا جاسکتا ہے جسکا مرکز کسی دئے ہوئے نقطہ کا ظل ہو۔

فرض کرو کہ و وہ نقطہ ہے جس کے ظل کو ظل کے منحنی کا مرکز بناتا ہے۔

فرض کرو کہ و کے قطبی پر ف کوئی نقطہ ہے اور ف کا قطبی وق ہے۔ اب وف اور وق مزدوج خطوط ہیں۔

مزدوج خطوط کا ایک اور زوج وفَ، وقَ لو۔

پھر و کے قطبی کو لاتناہی پر اور زاویوں ف، و، قل، فَ وقَ کو قائمہ زاویوں میں مظلل کرو تو ایک مخروطی حاصل ہوگا جس کا مرکز و کا ظل ہوگا اور چونکہ مزدوج قطروں کے دو زوج علی القوائم ہیں اس لیے یہ مخروطی ایک دائرہ ہوگا۔

۳۲۴۔ مخروطیوں کا ایک نظام جو ایک چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں ہم ماسکی مخروطیوں میں مظلل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ چار ضلعی کے دو ضلع نقطہ ا پر متقاطع ہوتے ہیں اور دوسرے دو ضلع نقطہ ب پر۔ کوئی مخروطی ا اور ب میں سے گذرتا ہوا کھینچو اور اس مخروطی کو ایک دائرہ میں مظلل کرو جبکہ خط اب کو لاتناہی پر مظلل کیا گیا ہو۔ اب ا اور ب لاتناہی پر انتہائی نقطوں میں مظلل ہوں گے اور چونکہ لاتناہی پر کے انتہائی نقطوں سے نظام کے تمام مخروطیوں کے مماس وہی ہوتے ہیں اسلیے یہ مخروطی ہم ماسکی ہونے چاہئیں۔

مثال ۱۔ چار نقطوں میں سے گذرنیوالے مخروطی ہم محور دائروں میں مظلل ہو سکتے ہیں۔ (۴۰۹)

ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط کو لاتناہی پر مظلل کرو اور مخروطیوں میں سے ایک کو دائرہ میں مظلل کرو اب تمام مخروطی دائروں میں

مظلّل ہوں گے کیونکہ وہ سب لا متناہی پر کے انتہائی نقطوں میں سے
گذرتے ہیں ۔

مثال ۲ ۔ وہ مخروطی جو ایک دوسرے کے ساتھ دوہرا تماس رکھتے ہیں ہم مرکز دائروں میں مظلّل ہو سکتے ہیں ۔

مثال ۳ ۔ ایک مسدس کو ایک مخروطی میں کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے تین نقاطِ تقاطع ایک خطِ مستقیم پر واقع ہیں ۔ [پیاسکال کا مسئلہ]

مخروطی کو ایک دائرہ میں اور متقابلہ ضلعوں کے دو زوجوں کے نقاطِ تقاطع کو ملانے والے خط کو لا متناہی پر مظلّل کرو تو یہ ثابت کرنا ہے کہ ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ایک مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے دو زوج متوازی ہوں تو تیسرا زوج بھی متوازی ہوگا ۔

مثال ۴ ۔ ثابت کرو کہ چار ثابت نقطوں میں سے گذرنے والے تمام مخروطی قائم زائدوں میں مظلّل ہو سکتے ہیں ۔

خطوں کے تین زوج ہوں گے جو ان چار نقطوں میں سے گذریں گے اور اگر ان میں سے دو زوجوں کے درمیانی زاویوں کو قائمہ زاویوں میں منظلّل کیا جائے تو تمام مخروطی قائم زائدوں میں مظلّل ہونگے ۔ [دفعہ ۱۰۷ مثال ۱]

مثال ۵ ۔ مخروطی کے کوئی تین وتر ایک دائرہ کے مساوی وتروں میں مظلّل ہو سکتے ہیں ۔

فرض کرو کہ ا اَ، ب بَ، ج جَ وتر ہیں، فرض کرو کہ ا ب اور اَ بَ، ک پر ملتے ہیں اور ا جَ اور اَ ج، ل پر ملتے ہیں ۔ مخروطی کو

ایک دائرہ میں اور ک ل کو لاتناہی پر ظلیل کرو۔

مثال ۶ ۔ اگر دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہوں تو اِن کے چھ راس ایک مخروطی پر ہونگے اور اِن کے چھ ضلع ایک مخروطی کو مس کریں گے ۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج، اَ بَ جَ ہیں۔ ب ج کو لاتناہی پر اور مخروطی کو ایک دائرہ میں ظلیل کرو تو ا دائرہ کے مرکز میں ظلیل ہوگا اور ا ب، ا ج علی القوائم ہوں گے کیونکہ ا ب ج خود قطبی ہے نیز چونکہ اَ بَ جَ دائرہ کے لحاظ سے خود قطبی ہے اِس لیے ا مثلث اَ بَ جَ کا مرکز ہندسی ہے۔

اب اَ، بَ، جَ میں سے گذرنے والا قائم زائد ا میں سے گذرے گا اور ب میں سے گذرنے والا قائم زائد ج میں سے گذریگا۔ پس چونکہ ایک قائم زائد کو کسی چار نقطوں میں سے کھینچا جا سکتا ہے اس لیے چھ نقطے ا، ب، ج، اَ، بَ، جَ ایک مخروطی پر ہونگے۔

نیز ایک مکافی کھینچا جا سکتا ہے جو چار خطوطِ مستقیم بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ، ا ب کو مس کرے۔ لیکن ا اس مکافی کے مرتب پر ہوگا [دفعہ ۵۔ ۱ (۳)] اِس لیے ا ج ایک مماس ہے۔ اس لیے ایک مخروطی اُن دو مثلثوں کے چھ ضلعوں کو مس کرتا ہے۔

(۳۱۰) مثال ۷ ۔ اگر ایک چار ضلعی کو ایک مخروطی میں اور ایک دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جا سکے تو ایسے چار ضلعی تعداد میں لامتناہی کھینچے جا سکتے ہیں ۔

فرض کرو کہ ایک مخروطی س، پر چار نقطے ف، ق، ر، س ہیں

اور فرض کرو کہ ف ق، ق ر، ر س، س ف ایک مخروطی س کو مس کرتے ہیں ۔

فرض کرو کہ ف ق اور ر س نقطہ ا پر، ف س اور ق ر نقطہ ب پر، اور ف ر اور ق س نقطہ ج پر ملتے ہیں ۔

مخروطی س کو ایک دائرہ میں جس کا مرکز ج کا ظل ہو منظلل کرو تو ا ب لاتناہی پر منظلل ہوگا اور مخروطی $س_۱$ اور $س_۲$ ہم مرکز ہو جائینگے۔ اور چونکہ ف ق ر س ایک دائرہ کے اندرونی متوازی الاضلاع میں منظلل ہوا ہے اس لیے یہ متوازی الاضلاع ایک مستطیل ہونا چاہئے۔ لیکن ایک مستطیل کے راسوں میں سے گذرنیوالا دائرہ جس کے ضلع ایک مخروطی کو مس کرتے ہوں مخروطی کا مرتب دائرہ ہوتا ہے ۔

اس لیے اگر ایک چار ضلعی کو ایک مخروطی س میں اور دوسرے مخروطی $س_۲$ کے گرد کھینچا جائے تو $س_۲$ اور $س_۱$ ایک مخروطی اور اسکے مرتب دائرہ میں منظلل کئے جا سکتے ہیں ۔

اب چونکہ ایک مخروطی کے مرتب دائرہ میں چار ضلعیوں کی لاتناہی تعداد جن کے ضلع مخروطی کو مس کریں کھینچی جا سکتی ہے اس لیے مسئلہ ثابت ہے ۔

۳۲۵ ۔ کسی شکل کے وہ خواص جو اس کے کسی ظل کے لیے درست ہوں ظلی خواص کہلاتے ہیں ۔ بالعموم ایسے خواص میں مقداروں سے واسطہ نہیں رہتا ۔ تاہم بعض ظلی خواص ایسے ہیں جن میں خطوں اور زاویوں کی مقداریں شامل ہوتی ہیں، ان میں سب سے اہم حسب ذیل ہے :

پنسلوں اور سعتوں کی چلیپی نسبتیں تظلیل سے نہیں بدلتیں۔

فرض کرو کہ چار نقطے ا، ب، ج، د ایک خط مستقیم میں ہیں

اور ان کے ظل اَ، بَ، جَ، دَ ہیں۔ تب اگر تظلیل کا مرکز ط ہو تو ط اَ اَ، ط ب بَ، ط ج جَ، ط د دَ خطوط مستقیم ہیں اور [دفعہ ۵۵]

{ا ب ج د} = ط {ا ب ج د} = {اَ بَ جَ دَ}

اگر و سے چار خطوں کی کوئی پنسل ہو اور یہ پنسل کسی قاطع سے نقطوں ا، ب، ج، د پر منقطع ہو تو

و {ا ب ج د} = {ا ب ج د} = ط {ا ب ج د}

= {اَ بَ جَ دَ}

= وَ {اَ بَ جَ دَ}

پس اس سے اور دفعہ ۱۶۱ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر نقطوں کی کوئی تعداد درپیچ میں ہو تو ان کے ظل درپیچ میں ہونگے۔

مثال ۱ ۔ مخروطی کا کوئی وتر جو ایک دئے ہوئے نقطہ و میں سے گذرے منحنی سے اور و کے قطبی سے موسیقی طور پر تقسیم ہوتا ہے۔ (۲۱۱)

و کے قطبی کو لاتناہی پر ظل کرو تو و ظل کا مرکز ہوگا اور اس لیے وتر و پر تنصیف ہوگا، اور سعت [ف و ق ∞] موسیقی ہوگی جبکہ ف و = و ق ۔

مثال ۲ ۔ چار ثابت نقطوں میں سے گذرنے والے

مخروطی کسی خطِ مستقیم سے نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع ہوتے ہیں جو درپیچ میں ہوتے ہیں۔ [ڈیسارگ کا مسئلہ]

اِن میں سے دو نقطوں کو لا تناہی پر انتہائی نقطوں میں مظلل کرو تو مخروطی ہم محور دائروں میں مظلل ہوں گے اور پھر مسئلہ ثابت ہو جائیگا۔

۳۲۶ — اُس پنسل کی چلیپی نسبت جو چار متقاطع خطوطِ مستقیم سے بنے اُس سعت کی چلیپی نسبت کے مساوی ہوتی ہے جو کسی مخروطی کے لحاظ سے اِن خطوطِ مستقیم کے قطبوں سے بنتی ہے۔

چونکہ پنسلوں اور سعتوں کی چلیپی نسبتیں تظلیل سے نہیں بدلتیں اس لیے ہم مخروطی کو ایک دائرہ میں مظلل کر سکتے ہیں۔ اب ایک دائرہ میں کوئی خطِ مستقیم اُس خط پر عمود ہوتا ہے جو دائرہ کے مرکز کو خط کے قطب (بلحاظ دائرہ) سے ملاتا ہے۔ پس اُس پنسل کی چلیپی نسبت جو چار متقاطع خطوطِ مستقیم سے بنے اُس پنسل کی چلیپی نسبت کے مساوی ہے جو دائرہ کے مرکز پر اِن کے قطبوں کے محاذی بنتی ہے اور اس لیے اُس سعت کی چلیپی نسبت کے مساوی ہے جو اِن کے قطبوں سے بنتی ہے۔

۳۲۷ — اُس پنسل کی چلیپی نسبت جو ایک مخروطی کے کسی نقطہ کو چار ثابت نقطوں سے ملانے سے بنے مستقل ہوتی ہے اور اُس سعت کی چلیپی نسبت کے مساوی ہوتی ہے جسمیں اُن نقطوں پر کے مماسس کسی مماس سے منقطع

ہوتے ہیں۔

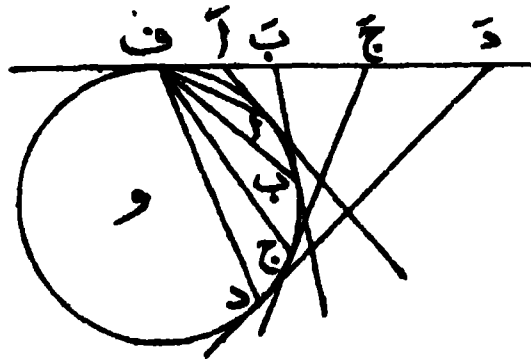
چونکہ پنسلوں اور سمتوں کی چلیپی نسبتیں تظلیل سے نہیں بدلتیں اس لیے اس مسئلہ کو صرف ایک دائرہ کے لیے ثابت کرنا کافی ہے۔

فرض کرو کہ ایک دائرہ پر چار ثابت نقطے ا، ب، ج، د ہیں، فرض کرو کہ دائرہ پر کوئی اور نقطہ ف ہے اور فرض کرو کہ ف پر کا مماس، ا، ب، ج، د پر کے مماسوں سے نقطوں اَ، بَ، جَ، دَ پر ملتا ہے۔

اب اگر دائرہ کا مرکز و ہے تو و اَ، و بَ، و جَ، اور و دَ علی الترتیب ف ا، ف ب، ف ج، اور ف د پر عمود ہیں۔

پس {اَ بَ جَ دَ} = و {اَ بَ جَ دَ} = ف {ا ب ج د}

لیکن زاویے ا ف ب، ب ف ج، ج ف د مستقل ہیں کیونکہ ا، ب، ج، د ثابت نقطے ہیں۔

اس لیے {اَ بَ جَ دَ} = ف {ا ب ج د} = مستقل

اگر ق کوئی نقطہ ہو اور وہ دائرہ پر نہ ہو تو

ق{ا ب ج د} ف (ا ب ج د)

کے مساوی نہیں ہو سکتا، یہ فوراً واضح ہو جاتا ہے اگر ہم ف ایسا لیں کہ ا ف ق ایک خط مستقیم ہو اور پھر اُن سعتوں پر غور کریں جو ب ج پر اِن دو پنسلوں سے بنتی ہیں - اِس لیے حسب ذیل مسئلہ عکس حاصل ہوتا ہے :

اگر ایک نقطہ ف اِس طرح حرکت کرے کہ اُس پنسل کی چلیپی نسبت جو اِس کو چار ثابت نقطوں ا، ب، ج، د سے ملانے سے بنے مستقل ہو تو ف ایک مخروطی مرتسم کرے گا جو ا، ب، ج، د میں سے گذرے گا۔

مثال ۱ - مخروطی کے دو مزدوج وتروں کے چار سرے اُس کے کسی نقطہ پر ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ وتر ا ج، ب د ہیں - فرض کرو کہ ب د کا قطب ع ہے اور ا ج، ب د کا نقطۂ تقاطع ف ہے - یہ چار نقطے ا، ب، ج، د منحنی کے تمام نقطوں پر مساوی چلیپی نسبت کی پنسلیں بناتے ہیں - ایک نقطہ کو د سے لا انتہا قریب لو تو پنسل د{ا ب ج ع} حاصل ہوگی - لیکن سعت ا، ب، ج، ع موسیقی ہے جس سے مسئلہ ثابت ہے -

مثال ۲ - اگر دو مثلث ایک مخروطی کو حائط کریں تو اِن کے چھ راس دوسرے مخروطی پر ہوں گے۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج، اَ بَ جَ ہیں - فرض کرو کہ بَ جَ ضلعوں ا ب، ا ج کو عَ، دَ پر قطع کرتا ہے اور ب ج ضلعوں اَ بَ، اَ جَ کو ع، د پر قطع کرتا ہے - تب وہ سعتیں جو چار مماسوں ا ب، ا ج،

اَبَ، اَجَ پر دو مماسوں ب ج، بَ جَ سے بنتی ہیں مساوی ہیں۔

پس {ب ج ع د} = {ع دَ بَ جَ}

∴ اَ {ب ج ع د} = اَ {ع دَ بَ جَ}

یا اَ {ب ج بَ جَ} = اَ {ب ج بَ جَ}

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

(۴۱۳) اِس مسئلہ کو اس طرح بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ب، ج کو لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں مظلل کیا جائے۔ چنانچہ مخروطی ایک ایسے مکافی میں مظلل ہوگا جس کا ماسکہ اَ ہے، اور یہ معلوم ہے کہ وہ دائرہ جو اَبَ جَ کو محاط کرتا ہے اَ میں سے گذرتا ہے۔

۳۲۸۔ تعریف۔ سعتیں اور پنسلیں ہم رسم کہلاتی

ہیں جبکہ ایک کے ہر چار اجزا، اور دوسرے کے متناظر چار اجزا مساوی چلیپی نسبتیں رکھیں۔

ہم رسم سعتوں یا پنسلوں کی دوسری تعریف حسب ذیل ہے:

دو سعتیں یا پنسلیں ہم رسم کہلاتی ہیں جبکہ وہ اس طرح مربوط ہوں کہ ایک نظام کے ہر نقطہ یا خط کے متناظر دوسرے نظام کا ایک اور صرف ایک نقطہ یا خط ہو۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ ہم رسم سعتوں کی یہ تعریف پہلی تعریف کے مماثل ہے فرض کرو کہ دو نظاموں کے کسی دو متناظر نقطوں کے فاصلے (ثابت نقطوں سے پیمائش کردہ) لا، ما ہیں۔ تب ہمیں شکل

$$لا = \frac{ا ما + ب}{ج ما + د}$$

کی مساوات حاصل ہونی چاہیے۔

مسئلہ اِس واقعہ سے مستنبط ہوتا ہے کہ ایک نظام کے ہر چار نقطوں کی چلیپی نسبت یعنے

$$\frac{(\text{لا}_۱-\text{لا}_۲)(\text{لا}_۳-\text{لا}_۴)}{(\text{لا}_۱-\text{لا}_۴)(\text{لا}_۳-\text{لا}_۲)}$$

نہیں بدلتی اگر ہم لا۱ کی بجائے $\frac{\text{و}\,\text{ا}_۱+\text{ب}}{\text{ج}\,\text{ا}_۱+\text{د}}$، لا۲ کی بجائے $\frac{\text{و}\,\text{ا}_۲+\text{ب}}{\text{ج}\,\text{ا}_۲+\text{د}}$،

وغیرہ درج کریں۔

مثال ۱۔ دو ہم رسم پنسلوں کے متناظر خطوں کے نقاطِ تقاطع ایک مخروطی کو مرتسم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ چار نقاطِ تقاطع ف، ق، ر، س ہیں اور پنسلوں کے راس و، وَ ہیں۔

تب و{ف ق ر س} = وَ{ف ق ر س}، اِس لیے

و، وَ، ف، ق، ر، س [دفعہ ۳۲۲] ایک مخروطی پر ہیں۔ لیکن ایک مخروطی کو متعین کرنے کے لیے پانچ نقطے کافی ہیں اس لیے و، وَ اور کسی تین نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والا مخروطی ہر دوسرے نقطۂ تقاطع میں سے گذرے گا۔

(۳۱۴) مثال ۲۔ وہ خطوط جو دو ہم رسم سلسلوں کے متناظر نقطوں کو ملاتے ہیں ایک مخروطی کو لف کرتے ہیں۔

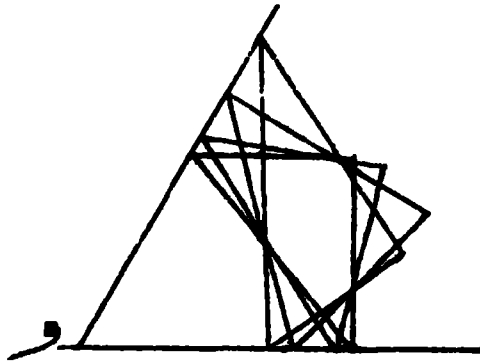
فرض کرو کہ ایک نظام کے کوئی چار نقطے ا، ب، ج، د ہیں اور دوسرے نظام کے متناظر چار نقطے اَ، بَ، جَ، دَ ہیں۔ تب اا، ب بَ

ج جَ ' د دَ ' ثابت خطوں سے مساوی چلیپی نسبت کی سمتوں میں منقطع ہوتے ہیں۔ پس ایک مخروطی اِن ثابت خطوں کو اور نیز ا اَ ' ب بَ ' ج جَ ' د دَ کو مس کرے گا۔ لیکن کسی مخروطی کو متعین کرنے کے لیے پانچ مماس کافی ہیں' اِس لیے وہ مخروطی جو ثابت خطوں کو اور سمتوں کے متناظر نقطوں کو ملانے والے خطوں میں سے تین کو مس کرتا ہے باقی تمام دوسروں کو بھی مس کرے گا۔

مثال ۳ — مستقل مقدار کے دو زاویے ف ا ق' ف ب ج ثابت نقطوں ا ' ب کے گرد حرکت کرتے ہیں اور نقطہ ف ایک خطِ مستقیم مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق ایک مخروطی مرتسم کرتا ہے جو ا ' ب میں سے گذرتا ہے۔ [نیوٹن]

ا ق کے ایک محل کے متناظر ' ب ق کا ایک اور صرف ایک محل ہے۔ پس مثال ا کی رو سے ق کا طریق ایک مخروطی ہے۔

مثال ۴ — ایک مثلث کے تین ضلع تین ثابت نقطوں میں سے گذرتے ہیں اور اِس کے قاعدہ کے سرے دو ثابت خطوطِ مستقیم پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کا راس ایک مخروطی مرتسم کرتا ہے۔ [میکلارن]

فرض کرو کہ تین ثابت نقطے ا ' ب ' ج ہیں۔ اور فرض کرو کہ دو ثابت خطوطِ مستقیم و ا ' و اَ ہیں۔ مثلثوں کو شکل کے مطابق کھینچا ہوا سمجھو۔

تب سمتیں {ا ب ج د ....} اور {اَ بَ جَ دَ ...} ہم رسم ہیں۔
اِس لیے پنسلیں ب {ا ب ....} اور ج {ا ب ج د ....} ہم رسم ہیں ÷

مثال ۵ ــ اگر ایک کثیر ضلعی کے تمام ضلع ثابت نقطوں میں سے گذریں اور تمام راس' اِلّا ایک کے' ثابت خطوطِ مستقیم پر حرکت کریں تو بقیہ راس ایک مخروطی کو مرتسم کرے گا۔

(۴۱۵) مثال ۶ ــ ایک مخروطی پر ا' اَ ثابت نقطے ہیں اور ا' اَ سے کسی ہم ماسکی مخروطی کے مماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں جو ابتدائی مخروطی سے نقطوں ج 'د اور جَ 'دَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ج د اور جَ دَ کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے۔

(اسے ہم ماسکی کے مماس ا پر کے مماس سے مساوی میلان رکھتے ہیں [دفعہ ۲۳۰ نتیجہ صریح ۳]' اس لیے وتر ج د' ا پر کے مماس کو کسی ثابت نقطہ و پر قطع کرے گا [دفعہ ۱۹۶ مثال ۲]۔ اسی طرح جَ 'دَ بھی ایک ثابت نقطہ وَ میں سے گذرے گا۔ اب اگر ہم و میں سے گذرتا ہوا کوئی خط و ج د لیں تو ایک اور صرف ایک ہم ماسکی خطوط ا ج اور ا د کو مس کرے گا' اور اَ سے اِس ہم ماسکی کے مماس' جَ اور دَ کو متعین کریں گے اور اس لیے و ج د کے کسی محل کے متناظر وَ جَ دَ کا ایک اور صرف ایک محل ہے۔ اِس لیے نقطۂ تقاطع کا طریق مثال ۱ کی بموجب ایک مخروطی ہے۔

مثال ۷ ــ اگر ا و اَ 'ب و بَ 'ج و جَ 'د و دَ ؛

.... ایک مخروطی کے وتر ہوں اور ف مخروطی پر کوئی نقطہ ہو تو پنسلیں ف {ا ب ج د ....} اور ف {اَ بَ جَ دَ ...} ہم رسم ہوں گی۔

مخروطی کو ایک دائرہ میں جس کا مرکز و ہو منظلل کرو۔

مثال ۸ ۔ اگر ایک مخروطی پر نقطوں کے دو نظام ہوں جن کے محاذی منحنی کے کسی نقطہ پر ہم رسم پنسلیں بنیں تو وہ خطوط جو ان دو نظاموں کے متناظر نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں ایک مخروطی کو لف کرینگے جو ابتدائی مخروطی کے ساتھ دوہرا تماس رکھیگا۔

فرض کرو کہ نقطوں کے دو نظام ا' ب' ج' د' .... اور اَ' بَ' جَ' دَ' .... ہیں۔ ا اَ' ب بَ' ج جَ کو ایک دائرہ کے مساوی وتروں میں منظلل کرو [دفعہ ۳۲۴ مثال ۵]۔ فرض کرو کہ متناظر نقطوں کا کوئی زوج ف' فَ ہے اور و دائرہ پر کوئی نقطہ ہے۔ اب و {ا ب ج ف} = و {اَ بَ جَ فَ}۔ اس لیے ف فَ = ا اَ اور اس سے ف فَ کا لفاف ایک ہم مرکز دائرہ ہے۔

مثال ۹ ۔ اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی میں کھینچا جائے اور اس کے تمام ضلع الا ایک کے ثابت نقطوں میں سے گذریں تو بقیہ ضلع کا لفاف ایک مخروطی ہوگا۔

یہ مثال ۷ اور مثال ۸ سے حاصل ہوگا۔

۳۲۹ — کوئی دو خط جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں اور وہ خط جو ان کے نقطۂ تقاطع اور لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں سے گذریں ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ وہ خط جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں لا ما = ۰ ہیں، تب وہ خط جو لاتناہی پر کے دائری نقطوں کو ان کے تقاطع سے ملاتے ہیں لا۲ + ما۲ = ۰ سے حاصل ہوں گے۔ دفعہ ۵۷ کی رو سے خطوں کے یہ دو زوج موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔

نیز ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ دو خط جو کسی مستقل زاویہ پر مائل ہوں اور وہ خط جو لاتناہی پر کے دائری نقطوں تک کھینچے جائیں مستقل چلیپی نسبت کی پنسل بناتے ہیں۔ ‎(۱۶)‎

مثال — ایک مخروطی کے دو مماس ایک دئے ہوئے خط ا ب کو موسیقی طور پر تقسیم کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ان مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے جو ا، ب میں سے گذرتا ہے اور وترِ تماس کا لفاف ایک مخروطی ہے جو ابتدائی مخروطی کے ان مماسوں کو مس کرتا ہے جو ا، ب سے کھینچے گئے ہیں۔

ا، ب کو لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں مظلل کرو تو مسئلہ ہو جاتا ہے: ایک مخروطی کے ان دو مماسوں کا طریق جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں ایک دائرہ ہے، اور وترِ تماس کا لفاف ایک

ہم ماسکی مخروطی ہے

۳۴۰ ـــ مکافات اور تقلیب کے طریقوں پر مزید مثالیں حسب ذیل ہیں:

مثال ۱۔ اگر ایک مثلث کے ضلع ایک مخروطی کو مس کریں اور اگر اس کے دو راس دو ثابت ہم ماسکی مخروطیوں پر حرکت کریں تو تیسرا راس ایک ہم ماسکی مخروطی مرتسم کرے گا۔

فرض کرو کہ مثلث کے دو لا انتہا قریب محل ا ب ج، اَ بَ جَ ہیں اور فرض کرو کہ ا اَ، ب بَ، ج جَ (ممدودہ) مثلث ف ق ر بناتے ہیں۔ چھ نقطے ا، ب، ج، اَ، بَ، جَ ایک مخروطی پر ہیں [دفعہ ۳۲۷ مثال ۲] اور یہ مخروطی انتہا میں مثلث ف ق ر کے ضلعوں کو ا، ب، ج پر مس کرے گا۔ پس ف ا، ق ب، ر ج ایک نقطہ پر ملیں گے [دفعہ ۱۸۶ مثال ۱] اور یہ آسانی سے معلوم ہوگا کہ مثلثیں ا{ق ج ف ب}، ب{ر ا ق ج}، ج{ف ب ر ا} موسیقی ہیں۔ اب اگر ا ایک مخروطی پر حرکت کرتا ہے جو اُس مخروطی کے ہم ماسکی ہے جس کو ا ب، ا ج مس کرتے ہیں تو ا پر کا مماس یعنے خط ق ر خطوں ا ب اور ا ج کے ساتھ مساوی زاویے بنائے گا۔ پس چونکہ ا{ق ج ف ب} موسیقی ہے اس لیے ف ا، ق ر پر عمود ہے۔ اسی طرح اگر ب ایک ہم ماسکی پر حرکت کرے تو ق ب، ر ف پر عمود ہے۔ پس ر ج کو ف ق پر عمود ہونا چاہئے اور اس لیے ج ا اور ج ب، ف ق کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ج ایک ہم ماسکی مخروطی پر حرکت کرتا ہے۔

[اس مسئلہ کی آسانی سے توسیع کیجا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ا ب ج د ایک چار ضلعی ہے جو ایک مخروطی کو حائط کرتا ہے اور فرض کرو کہ ا، ب، ج، ہم ماسکی مخروطیوں پر حرکت کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ د ا اور ج ب، ع پر ملتے ہیں اور ا ب اور د ج، ف پر ملتے ہیں۔ اب

مثلثوں اب ع، ب ج ف پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ع اور ف ہم ماسکی مخروطیوں پر حرکت کرتے ہیں۔ پس مثلث ج ع د پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ د ایک ہم ماسکی مخروطی پر حرکت کرتا ہے] ۔اگر ہم ایک ماسکہ کے لحاظ سے مکافات کریں تو حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوگا:

اگر ایک مثلث کے راس، ایک ہم محور نظام کے ایک دائرہ پر ہوں اور اس کے دو ضلع نظام کے دائروں کو مس کریں تو تیسرا ضلع نظام کے دوسرے دائرہ کو مس کرے گا۔ (پوانسلٹ کا مسئلہ)

مثال ۲ ــــ وہ چھ خطوط جو ایک مثلث کے راسوں کو ان نقطوں سے ملاتے ہیں جہاں مقابل کے ضلع ایک مخروطی سے منقطع ہوتے ہیں ایک دوسرے مخروطی کو مس کرتے ہیں۔
مکافی مسئلہ حسب ذیل ہے:

ایک مثلث کے زاویوں سے ایک مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو مقابل کے ضلع، اِن مماسوں کو جن چھ نقطوں پر قطع کرتے ہیں وہ ایک دوسرے مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔

نقطوں میں سے دو کو لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں منظلل کرو تو مثلث کا متقابل کا راسس ایک ماسکہ میں منظلل ہوگا، اور حسب ذیل مسئلہ فوراً حاصل ہوگا:

اگر مخروطی کے ایک ماسکہ میں سے دو خط کھینچے جائیں اور اِن خطوں کے متوازی مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو

اِن خطوں اور اِن مماسوں کے چار نقاطِ تقاطع ایک دائرہ پر واقع ہوں گے۔

مثال ۳۔ حسب ذیل مسئلے ایک دوسرے سے ماخوذ ہو سکتے ہیں:

(۱) دو خط ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں ان میں سے ایک خط ایک مخروطی کا مماس اور دوسرا ایک ہم ماسکی مخروطی کا مماس ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے اور یہ کہ ان کے نقاطِ تماس کو ملانے والے خط کا لفاف ایک دوسرا ہم ماسکی مخروطی ہے۔

(۲) دو نقطوں میں سے ایک نقطہ ایک دائرہ پر اور دوسرا ایک ہم محور دائرہ پر ہے، ان نقطوں کے محاذی ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ اُس خط کا لفاف جو ان کو ملاتا ہے ایک مخروطی ہے جس کا ایک ماسکہ انتہائی نقطہ پر ہے، نیز ثابت کرو کہ ان نقطوں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک ہم محور دائرہ ہے۔

(۳) دو خطوں میں سے ایک خط ایک مخروطی کا مماس اور دوسرا ایک دوسرے مخروطی کا مماس ہے، یہ خط مخروطیوں کے حائط چار ضلعی کے ایک وتر کو موسیقی طور پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوں کے

نقطۂ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے جو اس وتر کے سروں میں سے گذرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ نقاطِ تماس کو ملانے والے خط کا لفاف ایک مخروطی ہے جو اسی چارضلعی میں کھینچا ہوا ہے۔

(۴) ا و ب اور ج و د، دو مخروطیوں کے مشترک وتر ہیں اور ف، ق دو نقطے ہیں جن میں سے ایک، ایک مخروطی پر اور دوسرا دوسرے مخروطی پر ہے اور و{ا ف ب ق} موسیقی ہے۔ ثابت کرو کہ خط ف ق کا لفاف ایک مخروطی ہے جو ا ب، ج د کو مس کرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ف اور ق پر کے مماس ایک مخروطی پر جو ا، ب، ج، د میں سے گذرتا ہے ملتے ہیں۔

(۵) اگر دو نقطے لیے جائیں جن میں سے ایک، ایک دائرہ پر اور دوسرا دوسرے دائرہ پر ہو اور وہ ان کے بنیادی محور سے مساوی فاصلوں پر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کو ملانے والے خط کا لفاف ایک مکافی ہے جو بنیادی محور کو مس کرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ان نقطوں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے جو اول الذکر دائروں کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

چودھویں باب پر مثالیں

(۴۱۸)

۱۔ ثابت کرو کہ قطع زائد مزدوج زائد کے لحاظ سے اپنا آپ مکافی ہوتا ہے۔

۲ ـــ ثابت کرو کہ چار ثابت نقطوں میں سے گذرنے والے مخروطیوں کے نظام کو ہم مرکز مخروطیوں میں تشکافی کیا جا سکتا ہے ـ

۳ ـــ ثابت کرو کہ چار مخروطی کھینچے جا سکتے ہیں جن میں ایک ماسکہ مشترک ہو اور جو تین دئے ہوئے نقطوں میں سے گذریں، نیز ثابت کرو کہ ان میں سے ایک کا وتر خاص دیگر تین کے وتران خاص کے مجموعہ کے مساوی ہے ـ یہ بھی ثابت کرو کہ ان کے مرتبوں میں سے دو دو، مثلث کے ضلعوں پر ملتے ہیں ـ

۴ ـــ اگر دو مخروطیوں میں سے ہر ایک کو دوسرے کے لحاظ سے تشکافی کیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ دو مخروطی اور دو تشکافی، ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتے ہیں ـ

۵ ـــ دو مخروطی ل۱ اور ل۲ ایک مخروطی ع کے لحاظ سے تشکافی ہیں ـ اگر ل۲ کے لحاظ سے ل۱ کا تشکافی م۱ ہو اور ل۱ کے لحاظ سے ل۲ کا تشکافی م۲ ہو تو ثابت کرو کہ م۱ اور م۲، ع کے لحاظ سے تشکافی ہیں ـ

۶ ـــ اگر ایک دربیچ پنسل کی مزدوج شعاعوں کے دو زوج علی القوائم ہوں تو ہر زوج علی القوائم ہوگا ـ

۷ ـــ اگر ایک دربیچ نقطوں کے دو زوجوں کا نقطۂ تنصیف وہی ہو تو ہر زوج کا نقطۂ تنصیف وہی ہوگا ـ دربیچ کا مرکز کہاں ہے؟

۸ ـــ مخروطیوں کا ایک نظام ہے جو چار ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے ـ کسی نقطہ سے اس نظام کے مماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں جو ایک پنسل بناتے ہیں جو دربیچ میں ہے ـ ثابت کرو کہ نظام کے مرتب دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں ـ

۹ ـــ ثابت کرو کہ دو دائرے اور ان کے مشابہت کے مرکز کسی نقطہ پر ایک ایسی پنسل بناتے ہیں جو دربیچ میں ہوتی ہے ـ

۱۰ ـــ اگر دو محدود خطوں کو حصوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیا جائے تو

متناظر نقطوں کو ملانے والے خط ایک مکانی کو لف کریں گے۔

۱۱ — اگر خطوں و ا، و اَ پر دو ہم رسم سمتوں کے متناظر نقطے ف، فَ ہوں اور متوازی الاضلاع ف و فَ ق کی تکمیل کی جا تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۱۲ — تین مخروطیوں میں دو نقطے مشترک ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ تین خط جو ان کے دیگر نقاطِ تقاطع کو دو دو کرکے ملانے سے حاصل ہوتے ہیں ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور کوئی خط جو اس نقطہ میں سے گذرتا ہے مخروطیوں سے ایسے چھ نقطوں پر منقطع ہوتا ہے جو درپیچ میں ہوتے ہیں۔ (۲۱۹)

۱۳ — اگر دو مثلثوں کے متناظر ضلعوں کے نقاطِ تقاطع ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ یہ دو مثلث متساوی الاضلاع مثلثوں میں مظلل کئے جا سکتے ہیں۔

۱۴ — ثابت کرو کہ کوئی تین زاویے قائمہ زاویوں میں مظلل کئے جا سکتے ہیں۔

۱۵ — ا، ب، ج، ایک مخروطی پر تین ثابت نقطے ہیں۔ منحنی پر ایک ایسا نقطہ ہندسی طور پر معلوم کرو کہ ا ب، ب ج کے محاذی اس نقطہ پر مساوی زاویے بنیں۔

۱۶ — ایک ثابت نقطہ و میں سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو ایک دئے ہوئے مثلث کے ضلعوں کو اَ، بَ، جَ پر قطع کرتا ہے۔ اس خط پر ف ایسا نقطہ ہے کہ {اَ بَ جَ ف} موسیقی ہے۔ ثابت کرو کہ ف کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۱۷ — جب چار مخروطی چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرتے ہیں تو وہ پنسل جو ان کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبیوں سے بنتی ہے مستقل چلیپی نسبت کی ہوتی ہے۔

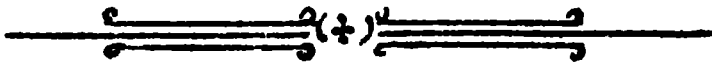
۱۸ — اگر مستقل مقدار کے دو زاویے اپنے راسوں کے گرد اس طریقہ پر گھومیں کہ ان کی ساقوں میں سے دو کا نقطۂ تقاطع ایک مخروطی پر۔ ہو جو

راسوں میں سے گذرتا ہے تو ثابت کرو کہ دوسری دو ساقیں راسوں میں سے گذرنے والے ایک دوسرے مخروطی پر متقاطع ہونگی۔

۱۹ — اگر ایک کثیر ضلعی کے تمام راس ثابت خطوطِ مستقیم پر حرکت کریں اور تمام ضلع اِلّا ایک کے ثابت نقطوں کے گرد گردش کریں تو کثیر ضلعی کا بقیہ ضلع ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۲۰ — اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے اور اس کے تمام راس اِلّا ایک کے ثابت خطوطِ مستقیم پر واقع ہوں تو بقیہ راس کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔

(٤٢٠)

پندرھواں باب

غیر متغیر

۱۳۱ — اگر دو مخروطیوں کی مساواتیں

س ≡ ا لا² + ب ما² + ج + ۲ ف ما + ۲ گ لا + ۲ ھ لا ما = ۰،

اور سَ ≡ اَ لا² + بَ ما² + جَ + ۲ فَ ما + ۲ گَ لا + ۲ ھَ لا ما = ۰

ہوں تو ان کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے کسی مخروطی کی مساوات

ک س + سَ = ۰، . . . . (۱)

سے حاصل ہوگی۔

وہ شرط کہ (۱) سے خطوطِ مستقیم کا ایک زوج تعبیر ہو یہ ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ک ا + اَ} & \text{ک ھ + ھَ} & \text{ک گ + گَ} \\ \text{ک ھ + ھَ} & \text{ک ب + بَ} & \text{ک ف + فَ} \\ \text{ک گ + گَ} & \text{ک ف + فَ} & \text{ک ج + جَ} \end{vmatrix} = 0$$

یہ ک میں ایک کعبی مساوات ہے اور اس کو شکل

Δ ک³ + ط ک² + طَ ک + Δَ = ۰، . . . . . . (۲)

میں لکھا جاتا ہے جہاں س، سَ کے ممیز علی الترتیب Δ، Δَ ہیں اور

ط = وَا + بَ ب + جَ ج + ۲ فَ ف + ۲ گَ گ + ۲ ھَ ھ

اور طَ = ا اَ + ب بَ + ج جَ + ۲ ف فَ + ۲ گ گَ + ۲ ھ ھَ

اگر مساوات (۲) کی تین اصلیں ک، ک، ک ہوں تو ک س + سَ = ۰ وغیرہ اُن خطوطِ مستقیم کے زوجوں کی مساواتیں ہیں جو س اور سَ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتے ہیں۔ اگر ہم (۱) اور (۲) سے ک کو ساقط کریں تو محصلہ مساوات یعنے

$$\Delta\ سَ^۳ - ط س سَ^۲ + طَ سَ^۲ سَ - \Delta\ سَ^۳ = ۰$$

س اور سَ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے خطوطِ مستقیم کے تین زوجوں کی مساوات ہوگی۔

۳۳۲ — اب اگر محددوں کے محوروں کو کسی طرح تبدیل کیا جائے (۴۲۱) مثلاً کارٹیزی محددوں سے سہ خطی محددوں میں اور اس تبدیلی سے مخروطیوں س = ۰ اور سَ = ۰ کی مساواتیں ع = ۰ اور عَ = ۰ ہو جائیں تو مساوات ک س + سَ = ۰، ک ع + عَ = ۰ میں تبدیل ہوگی اور اگر ک ایسا ہو کہ ک س + سَ = ۰ خطوطِ مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرے تو ک ع + عَ = ۰ سے بھی خطوطِ مستقیم کا ایک زوج تعبیر ہوگا۔

پس ک کی وہ قیمتیں جن کے لیے مساوات ک س + سَ = ۰ خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، یعنے مساوات (۲) دفعہ ۳۳۱ کی اصلیں محددوں کے کسی مخصوص محوروں پر منحصر نہیں ہونی چاہئیں۔ اسلیے چار مقداروں Δ، ط، طَ، Δَ کی ایک دوسرے کے ساتھ نسبتیں ایسی ہونی چاہئیں کہ وہ محددوں کے محوروں پر منحصر نہ ہوں۔ اسی سبب کی بناء پر مقداروں Δ، ط، طَ، Δَ کو غیر متغیر

کہا جاتا ہے۔
اگر محددوں کے ایک نظام سے دوسرے نظام میں استحالہ
س اور سَ میں پر اپنے محددوں کو نئے محددوں کی رقوم میں رکھ کر
فی الواقع عمل میں لایا گیا ہے تو متذکرۂ بالا مقداروں میں سے کسی
دو کی نسبتیں، جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، نہیں بدلیں گی، لیکن اگر صرف
یہ معلوم ہو کہ محددوں کے ایک نظام کے حوالے سے مساواتیں س =۰
اور سَ =۰ ہیں اور دوسرے نظام کے حوالے سے یہ مساواتیں ꙅ =۰
اور ꙅَ =۰ ہو جاتی ہیں تو اس کی کوئی ضمانت نہیں ہے کہ ان نئی مساواتوں
میں سے ایک یا دوسری (دونوں نہیں) کسی مستقل مقدار سے مضروب
یا مقسوم نہیں ہے۔ اس لیے یہ ممکن ہے کہ مخروطیوں کی وہ نئی مساواتیں
جو حقیقتاً استحالہ سے حاصل ہوئی ہیں یا جبکہ دونوں اسی مستقل مقدار
سے مضروب یا مقسوم ہوں علی الترتیب ꙅ =۰ اور م ꙅَ =۰ ہوں
اور ک ꙅ + م ꙅَ =۰ کا ممیز

$$ک^۳ \Delta + ک^۲ م ط + ک م^۲ طَ + م^۳ \Deltaَ = ۰$$

ہو۔ اس طرح یہ واضح ہے کہ اگرچہ نسبتیں Δ : ط : طَ : Δَ تمام صورتوں
میں مستقل نہ ہوں تاہم ان مقداروں کے درمیان کوئی ایسا رشتہ
جو متجانس ہو جبکہ Δ، ط، طَ، Δَ سب کے سب وہی ابعاد
کے ہوں اور نیز جبکہ وہ ترتیب وار ۰، ۱، ۲، ۳ ابعاد کے ہوں
دونوں صورتوں میں درست رہے گا خواہ مخروطیوں کی مساواتوں
کو کسی طرح بھی تبدیل کیا جائے۔

(۲۲۲) ۳۳۳ — حسب ذیل صورتوں میں جو غیر متغیر حاصل کیے گئے ہیں

وہ آئندہ کارآمد ہونگے۔

۱ – اگر س ≡ ﻉ عہ^{۲} + و بہ^{۲} + ط جہ^{۲} = ۰

سَ ≡ ﻉَ عہ^{۲} + وَ بہ^{۲} + طَ جہ^{۲} = ۰

تو ک س + سَ = ۰ کا ممیز

(ک ﻉ + ﻉَ) (ک و + وَ) (ک ط + طَ)

ہے۔ اس لیے

Δ = ﻉ و ط، طہ = Σ و ط ﻉَ، طَ = Σ ﻉ وَ طَ، Δَ = ﻉَ وَ طَ

۲ – اگر س ≡ ﻉ عہ^{۲} + و بہ^{۲} + ط جہ^{۲} = ۰

سَ ≡ ۲ ل بہ جہ + ۲ م جہ عہ + ۲ ن عہ بہ = ۰

تو ممیز

ک ﻉ	ن	م
ن	ک و	ل
م	ل	ک ط

ہے۔ اس لیے Δ = ﻉ و ط، طہ = ۰، طَ = − Σ ل^{۲} ﻉ، Δَ = ۲ ل م ن

۳ – اگر س ≡ ﻉ عہ^{۲} + و بہ^{۲} + ط جہ^{۲} = ۰،

سَ ≡ لہ^{۲} عہ^{۲} + مہ^{۲} بہ^{۲} + نہ^{۲} جہ^{۲} − ۲ مہ نہ بہ جہ

− ۲ نہ لہ جہ عہ − ۲ لہ مہ عہ بہ = ۰

تو ممیز

ک ﻉ + لہ^{۲}	− لہ مہ	− نہ لہ
− لہ مہ	ک و + مہ^{۲}	− مہ نہ
− نہ لہ	− مہ نہ	ک ط + نہ^{۲}

ہے۔ اس لیے Δ = ﻉ و ط، طہ = لہ^{۲} و ط + مہ^{۲} ط ﻉ + نہ^{۲} ﻉ و،

طَ = ۰، Δَ = − ۴ لہ^{۲} مہ^{۲} نہ^{۲}

۴ – اگر س ≡ لہ^{۲} عہ^{۲} + مہ^{۲} بہ^{۲} + نہ^{۲} جہ^{۲} − ۲ مہ نہ بہ جہ

− ۲ نہ لہ جہ عہ − ۲ لہ مہ عہ بہ = ۰،

$$\text{سَ} = ۲\text{ل ب ج} + ۲\text{م ج ع} + ۲\text{ن ع ب} = ۰$$

تومینز

$$\begin{vmatrix} \text{ک لہ}^{۲} & -\text{ک لہ مہ} + \text{ن} & -\text{ک نہ لہ} + \text{م} \\ -\text{ک لہ مہ} + \text{ن} & \text{ک مہ}^{۲} & -\text{ک مہ نہ} + \text{ل} \\ -\text{ک نہ لہ} + \text{م} & -\text{ک مہ نہ} + \text{ل} & \text{ک نہ}^{۲} \end{vmatrix}$$

ہے۔ اس لیے $\Delta = -۴\,\text{لہ}^{۲}\text{مہ}^{۲}\text{نہ}^{۲}$، $\text{ط} = ۴\,\text{لہ مہ نہ}\,(\text{ل لہ} + \text{م مہ} + \text{ن نہ})$،

$\text{طَ} = -(\text{ل لہ} + \text{م مہ} + \text{ن نہ})^{۲}$، $\Delta' = ۲\,\text{ل م ن}$

اس طرح $\text{ط}^{۲} = ۴\,\Delta\,\text{طَ}$

۵۔ اگر $\text{س} \equiv \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{و}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} - ۱ = ۰$، (۴،۲۳)

$\text{سَ} \equiv (\text{لا} - \text{ع})^{۲} + (\text{ما} - \text{بہ})^{۲} - \text{غ}^{۲} = ۰$

تومینز

$$\begin{vmatrix} \frac{\text{ک}}{\text{و}^{۲}} + ۱ & ۰ & -\text{ع} \\ ۰ & \frac{\text{ک}}{\text{ب}^{۲}} + ۱ & -\text{بہ} \\ -\text{ع} & -\text{بہ} & -\text{ک} + \text{ع}^{۲} + \text{بہ}^{۲} - \text{غ}^{۲} \end{vmatrix}$$

ہے۔ اس لیے $\Delta = -\frac{۱}{\text{و}^{۲}\text{ب}^{۲}}$، $\text{ط} = \frac{۱}{\text{و}^{۲}\text{ب}^{۲}}(\text{ع}^{۲} + \text{بہ}^{۲} - \text{غ}^{۲} - \text{و}^{۲} - \text{ب}^{۲})$،

$\text{طَ} = \frac{\text{ع}^{۲}}{\text{و}^{۲}} + \frac{\text{بہ}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} - ۱ - \text{غ}^{۲}\left(\frac{۱}{\text{و}^{۲}} + \frac{۱}{\text{ب}^{۲}}\right)$، $\Delta' = -\text{غ}^{۲}$

۶۔ اگر $\text{س} \equiv (\text{لا} - \text{ع})^{۲} + (\text{ما} - \text{بہ})^{۲} - \text{غ}^{۲} = ۰$،

$\text{سَ} \equiv (\text{لا} - \text{ف})^{۲} + (\text{ما} - \text{ق})^{۲} - \text{ر}^{۲} = ۰$

تومینز

$$\begin{vmatrix} \text{ک} + ۱ & ۰ & -\text{ک ع} - \text{ف} \\ ۰ & \text{ک} + ۱ & -\text{ک بہ} - \text{ق} \\ -\text{ک ع} - \text{ف} & -\text{ک بہ} - \text{ق} & \text{ک}(\text{ع}^{۲} + \text{بہ}^{۲} - \text{غ}^{۲}) + \text{ف}^{۲} + \text{ق}^{۲} - \text{ر}^{۲} \end{vmatrix}$$

ہے۔ اس لیے $\Delta = -غ^2$، $\Delta' = -ر^2$،

$ط = (ع-ف)^2 + (ب-ق)^2 - ۲ غ^2 - ر^2$،

$ط' = (ع-ف)^2 + (ب-ق)^2 - غ^2 - ۲ ر^2$

۳۳۴ — دفعہ ماسبق کی مثالوں (۲) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ $ط = ۰$ جبکہ سَ میں کھینچا ہوا مثلث س کے لیے خود قطبی ہو اور نیز جبکہ س کا محیط مثلث سَ کے لیے خود قطبی ہو۔ نیز ہم جانتے ہیں کہ اگر اِن صورتوں میں سے کسی ایک میں ایسا ایک مثلث ہو تو ایسے مثلث تعداد میں لامتناہی ہوں گے۔

اِس کے بالعکس اگر $ط = ۰$ تو سَ میں ایسے مثلث کھینچے جا سکتے ہیں جو س کے لیے خود قطبی ہوں اور نیز س کے گرد ایسے مثلث کھینچے جا سکتے ہیں جو سَ کے لیے خود قطبی ہوں۔

فرض کرو کہ س کے لحاظ سے سَ پر کے کسی نقطہ کا قطبی، سَ کو مکرر ب، ج پر قطع کرتا ہے۔

اب مثلث ا ب ج کے حوالے سے

$س = ء ع^2 + و ب^2 + ط ج^2 + ۲ ءَ ب ج = ۰$،

اور $سَ = ۲ ل ب ج + ۲ م ج ع + ۲ ن ع ب = ۰$

(۴۲۴) اس لئے ک س + سَ کا ممیز

$$\begin{vmatrix} ک ء & ن & م \\ ن & ک و & ک ءَ + ل \\ م & ک ءَ + ل & ک ط \end{vmatrix}$$

ہے۔ پس اگر $ط = ۰$ تو $ل ء ءَ = ۰$۔

جب $ء = ۰$، تو مخروطی س دو خطوطِ مستقیم پر مشتمل ہوتا ہے جو ا میں سے گذرتے ہیں، اور جب $ل = ۰$، تو سَ، خطِ مستقیم ب ج میں اور ا میں سے گذرنے والے ایک دوسرے خط میں تحویل ہوتا ہے

جہاں ا' س کے لحاظ سے ب ج کا قطب ہے - ان صورتوں کو خارج کرنے پر جن میں کہ ایک مخروطی خطوطِ مستقیم کے زوج میں تحویل ہوتا ہے عَ = . حاصل ہوتا ہے اور اس لیے ا ب ج' س کے لیے خود قطبی ہے -

پھر فرض کرو کہ سَ کے لحاظ سے س کے کسی مماس ب ج کا قطب ا ہے اور فرض کرو کہ ا سے س کے مماس ا ب' ا ج ہیں تب مثلث ا ب ج کے حوالے سے

$$س \equiv ل^۲ عہ^۲ + م^۲ بہ^۲ + ن^۲ جہ^۲ - ۲ م ن بہ جہ - ۲ ن ل جہ عہ$$

$$- ۲ ل م عہ بہ = ۰$$

اور $$سَ \equiv ء عہ^۲ + و بہ^۲ + ط جہ^۲ + ۲ عَ بہ جہ = ۰$$

پس ممیز

$$\begin{vmatrix} ک ل^۲ + ء & - ک ل م & - ک ن ل \\ - ک ل م & ک م^۲ + و & - ک م ن + عَ \\ - ک ن ل & - ک م ن + عَ & ک ن^۲ + ط \end{vmatrix}$$

ہے - اس لیے اگر ط = ۰ تو ۴ عَ ل^۲ م ن = ۰ -

اگر ل یا م یا ن صفر ہو تو س منطبق خطوطِ مستقیم کے زوج کو تعبیر کرے گا' اس لیے ان خطی مخروطیوں کو خارج کرنے پر ہمیں عَ = ۰ حاصل ہوتا ہے اور اس لیے ا ب ج' سَ کے لیے خود قطبی ہے -

پس جب ط = ۰' تو سَ میں مثلثوں کی لا متناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جو س کے لیے خود قطبی ہوں اور نیز س کے گرد مثلثوں کی لا متناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جو سَ کیلئے خود قطبی ہوں -

۳۳۵ — دفعہ ۳۳۳ کی مثال (۴) میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر سَ کا اندرونی مثلث س کو حائط کرے تو طہ^۲ - ۴ ∆ طَہ = ۰ ۔
اِس کا مسئلہ عکس ثابت کرنے کے لیے فرض کرو کہ س کا کوئی مماس سَ کو ب، ج پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ب، ج سے دوسرے مماس ا پر ملتے ہیں۔
تب مثلث ا ب ج کے حوالے سے

س ≡ ل^۲ عہ^۲ + م^۲ بہ^۲ + ن^۲ جہ^۲ - ۲ م ن بہ جہ - ۲ ن ل جہ عہ

- ۲ ل م عہ بہ ،

سَ ≡ ءطَ + ۲ ءَ بہ جہ + ۲ وَ جہ عہ + ۲ طَ عہ بہ = ۰ ۔

پس ک س + سَ کا ممیز

ک ل^۲ + ء	- ک ل م + طَ	- ک ن ل + وَ
- ک ل م + طَ	ک م^۲	- ک م ن + ءَ
- ک ن ل + وَ	- ک م ن + ءَ	ک ن^۲

(۴۲۵)

ہے اور اس لیے

∆ = - ۴ ل^۲ م^۲ ن^۲ ،

طہ = ۴ ل م ن (ل ءَ + م وَ + ن طَ) ،

طَہ = - (ل ءَ + م وَ + ن طَ)^۲ + ۲ م ن ءَ ء

پس اگر طہ^۲ - ۴ ∆ طَہ = ۰ تو ل م ن ء ءَ = ۰ ۔
اِس طرح ء = ۰ ۔ اور اس لیے مثلث ا ب ج، س کا اندرونی اور نیز سَ کا حائط مثلث ہے۔

[اگر ءَ = ۰ تو س سے دو خطوطِ مستقیم تعبیر ہوں گے جن میں سے ایک سَ کو مس کرے گا۔ نیز اگر ل یا م یا ن صفر ہو تو س سے منطبق خطوطِ مستقیم کے زوج تعبیر ہوں گے۔]

۳۳۶ — پچھلے دو دفعوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر طہ = ۰ اور

طَ = ۰ تو س یا سَ میں مثلثوں کی لاتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے اور نیز سَ یا س کے گرد مثلثوں کی لا انتہا تعداد کھینچی جا سکتی ہے، نیز یہ کہ مثلثوں کی لاتناہی تعداد س یا سَ میں یا ان میں سے کسی ایک کے گرد کھینچی جا سکتی ہے جو دوسرے کے لحاظ سے خود قطبی ہوں۔

مثال ۱۔ اگر ایک دائرہ کو ایک مکافی کے ماسکہ میں سے کھینچا جائے تو دائرہ میں ایسے مثلثوں کی لاتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جن کے ضلع مکافی کو مس کریں۔

ک (ما۲ - ۴ ا لا) + لا۲ + ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما - ا۲ - ۲ گ ا کے

میز میں

Δ = -۴ ا۲، ط = -۴ ا (ا - گ) اور طَ = -(ا - گ)۲

∴ ط۲ - ۴ Δ طَ = ۰

مثال ۲۔ اگر ایک دائرہ کا مرکز ایک مکافی کے مرتب پر ہو تو مکافی کے گرد مثلثوں کی لاتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جو دائرہ کے لیے خود قطبی ہوں۔ نیز دائرہ میں مثلثوں کی لاتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جو مکافی کے لیے خود قطبی ہوں۔

فرض کرو س ≡ (لا + عہ)۲ + (ما + بہ)۲ - ر۲ = ۰،

سَ ≡ ما۲ - ۴ ا لا = ۰

تب ک س + سَ کا ممیز

$$\begin{vmatrix} ک & ۰ & ک\,ع - ۲\,و \\ ۰ & ک+۱ & ک\,ب \\ ک\,ع - ۲\,و & ک\,ب & ک\,(ع^2 - ر^2) \end{vmatrix}$$

ہے جس میں طَ = ۰

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دائرہ کے مرکزِ تمکافی کے دو مماس اور لاتناہی پر کا خطِ تمکافی کے گرد ایک مثلث بناتے ہیں جو دائرہ کے لیے خود قطبی ہے

مثال ۳ ـــ ثابت کرو کہ تین مخروطی (۴۲۶)

$س_1 = ا^2 - ۴\,ل\,ا = ۰$، $س_2 = ل^2 - ۴\,ب\,ا = ۰$، $س_3 = ۲\,ل\,ا + ۴\,ا\,ب = ۰$

اس طرح مربوط ہیں کہ ان میں سے کسی ایک میں مثلثوں کی لاتناہی تعداد اور دوسرے دو میں سے کسی ایک کے گرد مثلثوں کی لاتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے اور نیز ان میں سے کسی ایک کے گرد مثلثوں کی لاتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جو باقی دو میں سے کسی ایک کے لیے خود قطبی ہوں ـ

ک $س_1$ + $س_2$ کا ممیز

$ا^2 ک^2 + ب^2$

ہے اور ک $س_1$ + $س_3$ کا ممیز

$ا ک^3 + ب$

ہے اور ک $س_2$ + $س_3$ کا ممیز

ب ک^2 + ا

ہے ۔ اِن تینوں صورتوں میں ط = ۰ اور طَ = ۰

مثال ۴ ۔ ایک مثلث ایک مخروطی کے لیے خود قطبی ہے، ثابت کرو کہ مثلث کا حائط دائرہ مخروطی کے مرتب دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے ۔

فرض کرو کہ مخروطی س = $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}$ − ۱ = ۰

اور دائرہ سَ = (لا − عہ)^2 + (ما − بہ)^2 − ر^2 = ۰

ہے ۔ تب ک س + سَ کے ممیز میں ط کو صفر ہونا چاہئے کیونکہ سَ میں کھینچا ہوا مثلث س کے لیے خود قطبی ہے ۔

لیکن [دفعہ ۳۴۳ مثال ۵]

ط = $\frac{۱}{\text{ا}^2\text{ب}^2}$ (عہ^2 + بہ^2 − ر^2 − ا^2 − ب^2)

اِس لیے عہ^2 + بہ^2 = ر^2 + ا^2 + ب^2

اور اِس لیے سَ، لا^2 + ما^2 = ا^2 + ب^2 کو علی القوائم قطع کرتا ہے ۔

اب ط = ۰ وہ شرط بھی ہے کہ س کا حائط مثلث سَ کے لیے خود قطبی ہو ۔ اِس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے :

اگر ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا جائے تو مثلث کا قطبی دائرہ مخروطی کے مرتب دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے ۔

مثال ۵ ۔ ثابت کرو کہ مخروطی س = $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}$ − ۱ = ۰ میں

ایسے مثلث کھنچے جا سکتے ہیں جن کے ضلع مخروطی $سَ = \frac{لا^2}{اَ^2} + \frac{ما^2}{بَ^2} - 1 = 0$ کو مس کریں اگر $\frac{اَ}{ا} \pm \frac{بَ}{ب} \pm 1 = 0$ ۔

ک س + سَ کا ممیز

$$\left(\frac{ک}{ا^2}+\frac{1}{اَ^2}\right)\left(\frac{ک}{ب^2}+\frac{1}{بَ^2}\right)(ک+1)=0$$

ہے۔ اس لیے $\Delta = \frac{1}{ا^2 ب^2}$ ، $ط = \frac{1}{ا^2 ب^2}\left(1+\frac{ا^2}{اَ^2}+\frac{ب^2}{بَ^2}\right)$ ،

$طَ = \frac{1}{اَ^2 بَ^2}\left(1+\frac{اَ^2}{ا^2}+\frac{بَ^2}{ب^2}\right)$ ، $\Deltaَ = \frac{1}{اَ^2 بَ^2}$

پس شرط $طَ^2 - 4\,\Deltaَ\,ط = 0$ پوری ہوگی اگر (۴۲۷)

$$\left(1+\frac{اَ^2}{ا^2}+\frac{بَ^2}{ب^2}\right)^2 - 4\,\frac{اَ^2 بَ^2}{ا^2 ب^2}\left(1+\frac{ا^2}{اَ^2}+\frac{ب^2}{بَ^2}\right)=0$$

یعنے اگر $\frac{اَ^4}{ا^4}+\frac{بَ^4}{ب^4}+1-2\,\frac{اَ^2 بَ^2}{ا^2 ب^2}-2\,\frac{اَ^2}{ا^2}-2\,\frac{بَ^2}{ب^2}=0$

یعنے اگر $\frac{اَ}{ا} \pm \frac{بَ}{ب} \pm 1 = 0$ [دیکھو دفعہ ۲۰۵]

۳۳۷ — مخروطی س میں اور مخروطی سَ کے گرد کھنچے ہوئے مثلث کے مرکز عمودی کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔

فرض کرو $س = ا\,لا^2 + 2\,ﮦ\,لا\,ما + ب\,ما^2 + 2\,گ\,لا + 2\,ف\,ما + ج = 0$ ،

اور $سَ = \frac{لا^2}{اَ^2} + \frac{ما^2}{بَ^2} - 1 = 0$

فرض کرو کہ س میں اور سَ کے گرد کھینچے ہوئے مثلث کا مرکز عمودی (عہ، بہ) ہے۔ اب چونکہ مرکز عمودی مثلث کے قطبی دائرہ کا مرکز ہوتا ہے اس لیے س میں اور سَ کے گرد کھینچے ہوئے مثلث کو غہ کی کسی قیمت کے لیے دائرہ

$$ج \equiv (لا - عہ)^۲ + (ما - بہ)^۲ - غہ^۲$$

کے لیے خود قطبی ہونا چاہئے۔

پس ک س + ج کے ممیز میں طَ = ۰

اور ک سَ + ج کے ممیز میں ط = ۰

اب ک س + ج کا ممیز

$$\begin{vmatrix} ک اَ + ۱ & ک ھَ & ک گَ - عہ \\ ک ھَ & ک بَ + ۱ & ک فَ - بہ \\ ک گَ - عہ & ک فَ - بہ & ک جَ + عہ^۲ + بہ^۲ - غہ^۲ \end{vmatrix}$$

ہے اور طَ = اَ عہ^۲ + ۲ ھَ عہ بہ + بَ بہ^۲ + ۲ گَ عہ + ۲ فَ بہ + جَ - (اَ + بَ) غہ^۲ = ۰

نیز ک سَ + ج کا ممیز

$$\begin{vmatrix} \frac{ک}{ا^۲} + ۱ & ۰ & - عہ \\ ۰ & \frac{ک}{ب^۲} + ۱ & - بہ \\ - عہ & - بہ & - ک + عہ^۲ + بہ^۲ - غہ^۲ \end{vmatrix}$$

ہے اور ط = $\frac{۱}{ا^۲ ب^۲}$ (عہ^۲ + بہ^۲ - غہ^۲ - ا^۲ - ب^۲) = ۰

پس (عہ، بہ) کا مخروطی (۴۲۸)

$$س = (اَ + بَ)(لا^۲ + ما^۲ - ا^۲ - ب^۲)$$

ہے۔

۳۳۸ ـــ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو مخروطی ایک دوسرے کو مس کریں۔

مخروطیوں کی مساواتوں کو

$$س_1 = ا_1 لا^2 + 2ح_1 لا ما + ب_1 ما^2 + 2ف_1 ما = 0 ،$$

$$س_2 = ا_2 لا^2 + 2ح_2 لا ما + ب_2 ما^2 + 2ف_2 ما = 0$$

لیا جا سکتا ہے۔ $ک س_1 + س_2$ کا ممیز

$$(ک ا_1 + ا_2)(ک ف_1 + ف_2)^2 ، \quad \ldots\ldots (1)$$

ہے اس لیے $\Delta = ا_1 ف_1^2$ ، $ط = ف_1(2ا_1 ف_2 + ا_2 ف_1)$ ،

$$ط' = ف_2(2ا_2 ف_1 + ا_1 ف_2) ، \quad \Delta' = ا_2 ف_2^2$$

اب $ط ط' - 9\Delta\Delta' = 2ف_1 ف_2 (ا_2 ف_1 - ا_1 ف_2)^2$ ،

$$ط^2 - 3\Delta ط' = ف_1^2 (ا_1 ف_2 - ا_2 ف_1)^2 ،$$

اور $ط'^2 - 3\Delta' ط = ف_2^2 (ا_1 ف_2 - ا_2 ف_1)^2$

پس مطلوبہ شرط

$$(ط ط' - 9\Delta\Delta')^2 = 4(ط^2 - 3\Delta ط')(ط'^2 - 3\Delta' ط) ، \quad \ldots (2)$$

ہے۔

اگر مخروطی دوسرے رتبہ کا تماس رکھیں تو $\frac{ف_1}{ا_1} = \frac{ف_2}{ا_2}$ اور اس لیے

$$ط^2 = 3\Delta ط' ، \quad ط'^2 = 3\Delta' ط$$

رشتہ (۲) کو اس واقعہ سے بھی معلوم کیا جا سکتا ہے کہ مخروطیوں کے
نقاطِ تقاطع میں سے گذرنے والے خطوطِ مستقیم کے تین زوجوں میں سے
دو زوج منطبق ہوتے ہیں جبکہ مخروطی مس کرتے ہیں اور اس لیے کعبی

$$\Delta\, ک^{3} + ط\, ک^{2} + \bar{ط}\, ک + \bar{\Delta} = ۰$$

کی دو اصلیں مساوی ہیں۔

پس ک کو اوپر کی مساوات اور مساوات

$$۳\, \Delta\, ک^{2} + ۲\, ط\, ک + \bar{ط} = ۰$$

سے ساقط کرنا ہے۔

پہلی مساوات کو ۳ سے اور دوسری کو ک سے ضرب دو اور تفریق کرو تو

$$ط\, ک^{2} + ۲\, \bar{ط}\, ک + ۳\, \bar{\Delta} = ۰$$

پس

$$\frac{ک^{2}}{۶\, ط\, \bar{\Delta} - ۲\, \bar{ط}^{2}} = \frac{ک}{ط\, \bar{ط} - ۹\, \Delta\, \bar{\Delta}} = \frac{۱}{۶\, \bar{ط}\, \Delta - ۲\, ط^{2}}$$

اور اس لیے

$$(ط\, \bar{ط} - ۹\, \Delta\, \bar{\Delta})^{2} = ۴\, (ط^{2} - ۳\, \bar{ط}\, \Delta)(\bar{ط}^{2} - ۳\, ط\, \bar{\Delta})$$

(۴۲۹)

اب ان مخروطیوں کے نصف قطر انحناء

$$غ_{۱} = -\frac{ف_{۱}}{ل_{۱}} \quad \text{اور} \quad غ_{۲} = -\frac{ف_{۲}}{ل_{۲}}$$

ہیں۔ اور ممیز کی اصلیں

$$-\frac{ف_{۲}}{ف_{۱}}\,،\; -\frac{ف_{۲}}{ف_{۱}}\,،\; \text{اور}\; -\frac{ل_{۲}}{ل_{۱}}$$

ہیں۔ اس لیے مکرر اصل کو دوسری اصل کے ساتھ نسبت

$$\frac{ل_{۱}\, ف_{۲}}{ل_{۲}\, ف_{۱}} = \frac{غ_{۲}}{غ_{۱}}$$

ہے -

اِس طرح $س_1$ اور $س_2$ کے انحناؤں کی نسبت اِن کے نقطۂ تماس پر اُس نسبت کے مساوی ہے جو ک $س_1$ + $س_2$ کے ممیز کی مکرر اصل کو دوسری اصل کے ساتھ ہے -

۳۳۹ — وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک چار ضلعی کو ایک مخروطی میں اور دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جا سکے -

فرض کرو کہ وتری مثلث کے حوالے سے چار ضلعی کے چار ضلع

ل ء ± م ب ± ن ج = ۰ یا لا ± ما ± ی = ۰ ہیں -

تب $س_1 = ء لا^2 + و ما^2 + ط ی^2 = ۰$ اِن چار خطوں کو مس کرے گا اگر

$$\frac{1}{ء} + \frac{1}{و} + \frac{1}{ط} = ۰، \quad \ldots\ldots (1)$$

اِن خطوں کے نقاطِ تقاطع میں سے چار

(۱، ۰، ۱)، (۱، ۰، -۱)، (۱، ۱، ۰)، (۱، -۱، ۰)

ہیں - اُس مخروطی کی عام مساوات جو اِن چار نقطوں میں سے گذرتا ہے -

$$س_2 = - لا^2 + ما^2 + ی^2 + ۲ ل ما ی = ۰$$

ہے -

ک $س_1$ + $س_2$ کا ممیز

$$\begin{vmatrix} ک ء - ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ک و + ۱ & ل \\ ۰ & ل & ک ط + ۱ \end{vmatrix}$$

ہے۔ اِس لیے Δ = ع و ط، ط = ۔ و ط + ط ع + ع و = ۔ ۲ و ط (۱) ہے

$$\bar{ط} = ع ۔ و ۔ ط ۔ ل^2 ع، \bar{\Delta} = ل^2 ۔ ۱$$

پس $\bar{ط} = ۔ ع \bar{\Delta} + \frac{ع و ط}{ع^2} = ۲ \frac{\Delta \bar{\Delta}}{ط} + \frac{ط^2}{۴ \Delta}$

$$\therefore \quad \bar{\Delta} \bar{\Delta} + ط^3 ۔ ۴ \Delta ط \bar{ط} = ۰$$

اور یہ ٹھیک ابعاد کی مساوات ہے۔

(۴۳۰) یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ممیز کی ایک اصل دوسری دو اصلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے کیونکہ ایک اصل $\frac{۱}{ع}$ ہے اور دوسری دو اصلیں

$$و ط ک^2 + (و + ط) ک + ۱ ۔ ل^2 = ۰ \text{ اور } \frac{۱}{ع} = ۔ \frac{۱}{و} ۔ \frac{۱}{ط}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثال ۱ ۔ وہ شرط معلوم کرو کہ چار ضلعیوں کو ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر اور دوسرے دائرہ کے گرد کھینچا جا سکے۔

فرض کرو کہ دائرے

$$س = لا^2 + ما^2 ۔ ا^2 = ۰،$$

$$\bar{س} = (لا ۔ د)^2 + ما^2 ۔ ب^2 = ۰$$

ہیں۔ تب ک س + $\bar{س}$ کے ممیز میں یہ معلوم ہوگا کہ

Δ = اَ^۲، ط = ۲ اَ^۲ + ب^۲ − د^۲، طَ = اَ^۲ + ۲ ب^۲ − د^۲، اور Δَ = ب^۲

پس اگر شرط ۴ Δ ط طَ − ۸ Δ^۲ Δَ − ط^۳ = ۰ پوری ہوتی ہے تو

۴ اَ^۲ (۲ اَ^۲ + ب^۲ − د^۲) (اَ^۲ + ۲ ب^۲ − د^۲) − ۸ اَ^۴ ب^۲ − (۲ اَ^۲ + ب^۲ − د^۲)^۳ = ۰

اِس لیے د^۶ − د^۴ (۳ ب^۲ + ۲ اَ^۲) + ۳ د^۲ ب^۴ − ب^۴ (ب^۲ − ۲ اَ^۲) = ۰

یعنے (د^۲ − ب^۲) {(د^۲ − ب^۲)^۲ − ۲ اَ^۲ (د^۲ + ب^۲)} = ۰

اگر د^۲ − ب^۲ = ۰ تو س کا مرکز سَ پر ہے ۔

اگر د^۲ − ب^۲ ≠ ۰ تو رشتہ کو شکل

$$\frac{اَ^۲}{(ب + د)^۲} + \frac{اَ^۲}{(ب - د)^۲} = ۱$$

میں لکھا جا سکتا ہے ۔ [دیکھو Smith & Bryant's Euclid P. 404]

۴۰ ۔ وہ شرط معلوم کرو کہ ایک مثلث کو ایک مخروطی س میں اس طرح کھینچا جا سکے کہ اس کا ہر ضلع تین دوسرے مخروطیوں میں سے ایک کو مس کرے جہاں ان چار مخروطیوں میں چار مشترک نقاطِ تقاطع ہیں ۔

فرض کرو کہ س۱ = ۲ ل ب ج + ۲ م ج ع + ۲ ن ع ب = ۰،

اور س۲ = ع^۲ + ب^۲ + ج^۲ − ۲ (۱ + لہ۱ ل) ب ج − ۲ (۱ + لہ۲ م) ج ع − ۲ (۱ + لہ۳ ن) ع ب

تب مخروطی لہ۱ س۱ + س۲ = ۰، لہ۲ س۱ + س۲ = ۰، اور لہ۳ س۱ + س۲ = ۰

ع، ب، ج کو علی الترتیب مس کرتے ہیں اور وہ سب س۱ اور س۲ کے نقاط تقاطع میں سے گذرتے ہیں۔

اب ک س۱ + س۲ کے لیے میئنر

۱	ک ن - ۱ - لہ۱ ن	ک م - ۱ - لہ۱ م
ک ن - ۱ - لہ۱ ن	۱	ک ل - ۱ - لہ۱ ل
ک م - ۱ - لہ۱ م	ک ل - ۱ - لہ۱ ل	۱

ہے اور یہ معلوم ہوگا کہ

∆ = ۲ ل م ن،

- ط = (ل + م + ن)۲ + ۲ ل م ن Σ لہ۱،

طَ = ۲ (ل + م + ن) (۲ + Σ لہ۱ ل) + ۲ ل م ن Σ لہ۲ لہ۳،

- ∆َ = (Σ لہ۱ ل + ۲)۲ + ۲ ل م ن لہ۱ لہ۲ لہ۳

پس ط = ∆ Σ لہ۱ = - (ل + م + ن)۲،

طَ - ∆ Σ لہ۲ لہ۳ = ۲ (ل + م + ن) (Σ لہ۱ ل + ۲)،

∆َ + ∆ لہ۱ لہ۲ لہ۳ = - (Σ لہ۱ ل + ۲)۲

اس لیے ۴ (ط + ∆ Σ لہ۱) (∆َ + ∆ لہ۱ لہ۲ لہ۳) = (طَ - ∆ Σ لہ۲ لہ۳)۲

اور یہ مطلوبہ شرط ہے[1]۔

اب فرض کرو کہ مخروطی س۱ = ۰ معلوم ہے اور نیز لہ۱ اور لہ۲ کی قیمتیں بھی معلوم ہیں۔

[1] دیکھو سامن کی مخروطات صفحہ ۳۳۱۔

تب اوپر کے رشتہ سے لم معلوم کرنے کے لیے ایک دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے (یہ مساوات مفرد مساوات میں تحویل ہوگی اگر ل$_1$ = ل$_2$)۔ اِس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے :

مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کو ایک دیے ہوئے مخروطی س میں کھینچا جائے اور مثلث کے دو ضلع علی الترتیب مخروطیوں س$_1$ اور س$_2$ کو مس کریں اور مخروطی س، س$_1$، س$_2$ سب کے سب چار مشترک نقطوں پر متقاطع ہوں تو مثلث کا تیسرا ضلع ان چار نقطوں میں سے گذرنے والے دو دوسرے ثابت مخروطیوں میں سے ایک کو مس کرے گا۔

یہ معلوم ہوگا کہ تیسرے ضلع کا لفاف دو مخروطیوں پر مشتمل ہے کیونکہ اگر س$_1$ کا وہ وتر ا ب جو س$_2$ کو مس کرتا ہے کھینچا جائے تو ب سے مخروطی س$_2$ کے دو مماس ہوں گے اور ج ا کے دو ممکن محل، نظام کے مختلف مخروطیوں کو مس کریں گے۔ لیکن اگر مثلث ا ب ج بغیر کسی اچانک تبدیلیوں کے ترتیب وار مختلف ممکن محل اختیار کرتا جائے تو تیسرا ضلع ہمیشہ ایک ثابت مخروطی کو مس کرے گا۔

(۲۳۲) اوپر کے مسئلہ کی توسیع متعدد ضلعوں کے کثیر ضلعی کی صورت پر کیجا سکتی ہے۔ مثلاً چار ضلعی ا ب ج د پر غور کرو جو ایسا ہے کہ نقطے ا، ب، ج، د مخروطی س$_1$ پر ہیں اور اِس لیے ا ب، س$_2$ کو مس کرتا ہے، ب ج، س$_3$ کو اور ج د، س$_4$ کو جہاں س$_1$، س$_2$، س$_3$، س$_4$ سب کے سب مخروطیوں کے ایسے نظام سے متعلق ہیں جو چار مشترک نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں۔

تب چونکہ ا ب اور ا ج، نظام کے مخروطیوں کو مس کرتے ہیں

اِس لیے خط ا ج بھی نظام کے ایک مخروطی کو مس کرے گا (حسب مسئلہ)۔
اب ا ج اور ج د نظام کے مخروطیوں کو مس کرتے ہیں اور اس لیے
ا د بھی نظام کے ایک مخروطی کو مس کرے گا۔ اسی طرح متعدد ضلعوں
کے کسی کثیر ضلعی کی صورت میں ثابت کیا جاسکتا ہے۔
یہ تمام مخروطی ہم محور دائروں میں منظلِل کیے جاسکتے ہیں اور اس طرح
پانسلاٹ (Poncelet) کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔ [دیکھو دفعات
۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳ اور اقلیدس صفحہ ۴۰۰ مصنفہ اسمتھ اور برانٹ]
ایک مخصوص صورت کے طور پر حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی س میں کھینچا جائے اور اس کے تمام ضلع اِلّا ایک کے ایک دوسرے مخروطی $س_1$ کو مس کریں تو بقیہ ضلع ایک تیسرے مخروطی $س_2$ کو مس کرے گا جو س اور $س_1$ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہے اور اگر بقیہ ضلع اپنے ایک محل میں $س_1$ کو مس کرے تو وہ تمام محلوں میں $س_1$ کو مس کرے گا۔

یہ اندرونی اور حائط کثیر ضلعیوں کا (Porism) ہے یعنے ایک
ایسے کثیر ضلعی کو ایک مخروطی میں کھینچنے کا مسئلہ جس کے ضلع دوسرے
مخروطی کو مس کریں بالعموم ناممکن ہے لیکن اگر کوئی ایسا کثیر ضلعی
موجود ہو تو ایسے کثیر ضلعی تعداد میں لامتناہی ہوں گے۔

پندرھویں باب پر مثالیں

۱ — مثلثوں کی لامتناہی تعداد دائرہ $لا^2 + ما^2 = (ا + ب)^2$ میں اور ناقص

$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے گرد کھینچی جا سکتی ہے۔

۲ — مثلثوں کی لامتناہی تعداد $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ میں اور $لا^2 + ما^2$

$= \frac{ا^2 ب^2}{(ا + ب)^2}$ کے گرد کھینچی جا سکتی ہے۔

۳ — نصف قطر ر کا ایک دائرہ ایک مثلث میں جو $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کے لیے خود قطبی ہے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق مکانی $ما^2 - ۴ ا لا - ر^2 = ۰$ ہے۔

۴ — مثلثوں کی لاانتہا تعداد $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ میں اور $\frac{لا^2}{ا^2}$ (۶۲۴)

$+ \frac{ما^2}{ب^2} = \frac{۱}{(ا^2 - ب^2)^2}$ کے گرد کھینچی جا سکتی ہے۔

۵ — مثلثوں کی لامتناہی تعداد $ما^2 - ا لا + ۲ ل لا ما + مہ = ۰$ میں اور $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کے گرد ل اور مہ کی تمام قیمتوں کے لیے کھینچی جا سکتی ہے۔

۶ — اگر دو مساوی دائروں کا مشترک وتر نصف قطر کے مساوی ہو تو ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد ایک دائرہ میں کھینچی جا سکتی ہے جن کے ضلع دوسرے دائرہ کو مس کریں، نیز مثلثوں کی لامتناہی تعداد کسی ایک دائرہ میں یا اس کے گرد کھینچی جا سکتی ہے جو دوسرے دائرہ کے لیے خود قطبی ہوں۔

۷ — ثابت کرو کہ $\text{ما}^2 - 4\text{ا}\,\text{لا} = 0$ میں ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جن کے ضلع $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 6\text{ا}\,\text{لا} + 5\text{ا}^2 = 0$ کو مس کریں۔

۸ — وہ شرط کہ $\text{س} = 0$ اور $\text{سَ} = 0$ کے دو نقاطِ تقاطع پر س کے مماس، سَ پر ملیں یہ ہے کہ

$$\text{ط}^3 = 4\Delta(\text{ط}\,\text{طَ} - 2\Delta\bar{\Delta})$$

۹ — ثابت کرو کہ ایسے متساوی الاضلاع مثلثوں کے مرکزوں کا طریق جو $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے لیے خود قطبی ہوں

$$\text{لا}^2(\text{ا}^2 - 3\text{ب}^2) + \text{ما}^2(\text{ب}^2 - 3\text{ا}^2) = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^2$$

ہے۔

۱۰ — اگر $\Delta\,\text{طَ}^3 = \bar{\Delta}\,\text{ط}^3$ تو ثابت کرو کہ ایک مخروطی ایسا کھینچا جا سکتا ہے جو مخروطیوں $\text{س} = 0$، $\text{سَ} = 0$ میں سے ہر ایک کے ساتھ تیسرے رتبہ کا تماس رکھے۔

۱۱ — اگر ایک مثلث کے دو ضلع مخروطی سَ کو مس کریں اور اس کے راس مخروطی س پر ہوں تو تیسرے ضلع کا لفاف مخروطی $4\Delta\bar{\Delta}\,\text{سَ} + (\text{طَ}^2 - 4\bar{\Delta}\,\text{ط})\,\text{س} = 0$ ہوگا۔

۱۲ — ثابت کرو کہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = (\text{ا} + \text{ب})^2$ میں ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جن کے ضلع $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کو مس کریں اور نیز ثابت کرو کہ ایسے تمام مثلثوں کے عمودی مرکز دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = (\text{ا} - \text{ب})^2$ پر ہیں۔

۱۳ — اگر ایک مثلث کا مرکز عمودی جبکہ مثلث کو ایک مکافی میں کھینچا گیا ہو مکافی کے مرتب پر ہو تو مثلث کا قطبی دائرہ ماسکہ میں سے گذریگا۔

۱۴ — ایک مثلث کو ایک ثابت دائرہ میں اور ایک ثابت مخروطی کے گرد کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلث کا نو نقطی دائرہ دو ثابت دائروں کو

مس کرتا ہے ۔

(۴۴۳

۱۵ ــ سَ میں ایسے مثلث کھینچے جا سکتے ہیں جن کے ضلع س کو مس کریں، ثابت کرو کہ اُن خطوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق جو مثلث کے راسوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاطِ تماس سے ملاتے ہیں مخروطی

۳ △ سَ ـ ۲ ط س = ۰

ہے ۔

۱۶ ــ اگر س میں ایسے مثلث کھینچے جا سکیں جو سَ کے لیے خود قطبی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ مثلث جو س کے اُن مماسوں سے بنتے ہیں جو راسوں پر کھینچے گئے ہیں مخروطی

△ سَ ـ ط س = ۰

کے اندرونی مثلث ہوں گے ۔

۱۷ ــ دو مخروطیوں س، سَ کا ایک مشترک نقطہ ا ہے اور اب، اج علی الترتیب س، سَ کے ایسے وتر ہیں جو علی الترتیب سَ، س کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) اگر ب پر س کے مماس بھی سَ کو مس کریں تو س میں ایسے مثلث کھینچے جا سکتے ہیں جو سَ کے حائط مثلث ہوں اور (۲) اگر ب ج، س کو مس کرے تو س میں ایسے مثلث کھینچے جا سکتے ہیں جو سَ کے لیے خود قطبی ہوں اور (۳) اگر ب ج، س اور سَ دونوں کو مس کرے تو سَ کے لحاظ سے س کا متکافی وہی مخروطی ہوگا جو س کے لحاظ سے سَ کا متکافی ہے ۔

۱۸ ــ مخروطی $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} - ۱ = ۰$ کے حائط متساوی الاضلاع مثلثوں کے ہندسی مرکزوں کا طریق

$$۹(لا^۲ + ما^۲)^۲ - ۲(۵ا^۲ + ۳ب^۲)لا^۲ - ۲(۳ا^۲ + ۵ب^۲)ما^۲ + (ا^۲ - ب^۲)^۲ = ۰$$

ہے ۔

۱۹ — اگر مخروطی سَ کے لحاظ سے مخروطی س کا قطبی متکافی ف ہو اور س کے لحاظ سے سَ کا قطبی متکافی فَ ہو تو ثابت کرو کہ ف میں ایسے مثلث کھینچے جا سکتے ہیں جو فَ کے لیے خود قطبی ہوں اگر

طہ^۲ - ۴ ∆ (طہ طہَ - ∆ ∆َ) = ۰

جہاں ک س + سَ = ۰ کا ممیز ک^۳ ∆ + ک^۲ طہ + ک طہَ + ∆َ = ۰ ہے۔

۲۰ — ثابت کرو کہ وہ غیر موسیقی نسبتیں جو مخروطی س = ۰ کے کسی نقطہ پر س = ۰ اور سَ = ۰ کے نقاطِ تقاطع سے متعین ہوتی ہیں ک س + سَ = ۰ کے ممیز کی اصلوں کے فرقوں کی نسبتیں ہیں۔

۲۱ — اگر دو مخروطی رشتہ

طہ طہَ = ∆ ∆َ

میں مربوط ہوں اور اگر ان کے دو نقاطِ تقاطع کو دوسرے دو نقاطِ تقاطع میں سے کسی ایک سے ملایا جائے تو ثابت کرو کہ اس نقطہ پر کے دو وتروں اور دو مماسوں سے ایک موسیقی پنسل بنے گی۔

(۴۴۵) ۲۲ — وہ ضروری شرط کہ ایک مخروطی س کو ایک مثلث میں جو سَ کے دو مماسوں اور ان کے وترِ تماس سے بنتا ہے کھینچا جا سکے یہ ہے کہ

طہ^۳ = ۴ ∆ (طہ طہَ - ۲ ∆ ∆َ)

۲۳ — دو مخروطی س اور سَ، ا پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ا پر سَ کا مماس س سے ج پر ملتا ہے اور ا پر س کا مماس سَ سے ب پر ملتا ہے۔ ب ج مخروطیوں سے مکرر بَ، جَ پر ملتا ہے۔ اگر ب اور ج کے لحاظ سے بَ، جَ موسیقی مزدوج ہوں تو ثابت کرو کہ

طہ طہَ + ∆ ∆َ = ۰

۲۴ — ثابت کرو کہ اُن خطوں کا لفاف جو مخروطیوں س = ۰ اور سً = ۰ کو موسیقی طور پر قطع کرتے ہیں مخروطی سَ = ۰ ہے اور سً = ۰ کے لحاظ سے س = ۰ کا قطبی متکافی ک س + سَ = ۰ ہے جہاں

ک = $\frac{1}{4}$ (طہ^۲ - ۴ ∆ طہ) / ∆ ∆َ۔

۲۵ — اگر ایک چار ضلعی کے تین ضلع س کو مس کریں اور اس کے راس س̄ پر ہوں تو ثابت کرو کہ بقیہ ضلع کا لفاف

$$(\text{ط}'^{2}-۴\Delta\,\text{ط}')^{2}\,\text{س}+۱۰\,\Delta(\text{ط}'^{3}-۴\Delta\,\text{ط}\,\text{ط}'+۸\Delta'^{2}\,\text{ط}')\,\text{س}'=۰$$

ہے۔

۲۶ — اگر س = ۰ اور س̄ = ۰ کے مشترک مماس س = ۰ کو جن چار نقطوں پر مس کرتے ہیں ان کو س کے کسی نقطہ سے ملایا جائے اور اس طریقہ سے حاصل شدہ خطوں سے ایک موسیقی پنسل بنے تو ثابت کرو کہ

$$۲\,\text{ط}'^{3}-۹\,\text{ط}\,\text{ط}'\,\Delta'+۲۷\,\Delta\,\Delta'^{2}=۰$$

۲۷ — ثابت کرو کہ وہ شرط کہ ایک ایسا مسدس س̄ = ۰ میں کھینچا جا سکے جس کے متصلہ راسوں کا ہر زوج س = ۰ کے لحاظ سے مزدوج ہو یہ ہے کہ

$$\text{ط}'^{3}=۴\Delta(\text{ط}\,\text{ط}'-۲\Delta\,\Delta')$$

اس لیے ثابت کرو کہ ایک ایسے مسدس کو ایک مخروطی کے مرتب دائرہ میں کھینچا جا سکتا ہے کہ اس کے متصلہ راسوں کا ہر زوج مخروطی کے لحاظ سے مزدوج ہو —

متفرق مثالیں

(۲۳۶)

۱ ـــ ثابت کرو کہ ایک ثابت دائرہ اور مستقل نصف قطر کے ایک متغیر دائرہ کا بنیادی محور ایک مکافی کو لمس کرتا ہے جبکہ متغیر دائرہ کا مرکز ہمیشہ ایک ثابت خطِ مستقیم پر رہے۔

۲ ـــ ایک ثابت دائرہ کی مساوات

لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم سہ + ۲ ک لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہے اور ایک دائرہ لا = ۰ اور ما = ۰ کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان دو دائروں کا بنیادی محور مکافیوں

(لا ± ما)^2 + ۲ ک لا + ۲ ف ما + ج = ۰

میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتا ہے۔

۳ ـــ اگر ایک مثلث ف ق ر کو ایک مکافی میں کھینچا جائے اور اس کے دو ضلع دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث ف ق ر کے ہندسی مرکز کا طریق ایک مکافی ہے۔

۴ ـــ ثابت کرو کہ مخروطی

۲ ا لا^2 + ۲ ب ما^2 − ۴ (ا + ب) ج لا − (ا + ب) ج^2 = ۰

کے چار وتر ایسے ہیں جن کے محاذی نقطہ (۰، ۰) پر قائمہ زاویہ بنتا ہے اور نیز یہ وتر دائرہ لا^2 + ما^2 − ۲ ج لا = ۰ کو مس کرتے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ یہ چار خط ایک مربع بناتے ہیں۔

۵ ـــ اگر ایک مکافی کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد نقطہ ل پر ملیں تو وہ خط جو ل کو ف، ق، ر پر کے ماسوں سے بنے ہوئے

مثلث کے مرکز عمودی سے ملاتا ہے مکافی کے محور کے متوازی ہوگا ۔

۶ ۔ اگر ایک مکافی کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد ہم نقطہ ہوں تو اُس مثلث کے ضلعوں کے نقاطِ وسطی جو ف، ق، ر پر کے مماسوں سے بنے ایک ثابت مکافی پر ہوں گے ۔

۷ ۔ ایک مخروطی کے مرتب دائرہ کے کسی نقطہ سے اِس نقطہ کے قطبی (بلحاظ مخروطی) پر عمود کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ اِس عمود کے پائین کا طریق ایک ہم ماسکی مخروطی ہے ۔

(۴۳۷) ۸ ۔ ایک خود قطبی مثلث کے راسوں سے دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ا}^2 = ۰$ کے مماس کھینچے گئے ہیں جن کے طول ت_1، ت_2، ت_3 ہیں ۔ ثابت کرو کہ

(۱) $\text{ت}_1^2 \text{ت}_2^2 \text{ت}_3^2 + ۴\,\text{ا}^2 \Delta^2 = ۰$، (۲) $\text{ت}_2^2 \text{ت}_3^2 + \text{ت}_3^2 \text{ت}_1^2 + \text{ت}_1^2 \text{ت}_2^2 = ۴\Delta^2$ جہاں Δ سے مثلث کا رقبہ تعبیر کیا گیا ہے ۔

۹ ۔ ف ق ر ایک مثلث ہے جو $\text{ما}^2 - ۴\,\text{ا}\,\text{لا} = ۰$ کے لیے خود قطبی ہے اور ف، ق، ر میں سے گذرتے ہوئے قطر مقابل کے ضلعوں سے علی الترتیب ف′، ق′، ر′ پر ملتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ

$$۲\Delta^2 + \text{ا} \times \text{ف ف}' \times \text{ق ق}' \times \text{ر ر}' = ۰$$

۱۰ ۔ اگر ایک مثلث کے راس $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$، $(\text{لا}_3، \text{ما}_3)$ ہوں اور مثلث، $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے لیے خود قطبی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۴\Delta^2}{\text{ا}^2\text{ب}^2} + \left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} - ۱\right)\left(\frac{\text{لا}_2^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_2^2}{\text{ب}^2} - ۱\right)\left(\frac{\text{لا}_3^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_3^2}{\text{ب}^2} - ۱\right) = ۰$$

۱۱ ۔ اگر ایک نقطہ و کے فاصلے تین ناہم خط نقطوں ا، ب، ج سے ع، ہ، جہ ہوں تو و سے دائرہ ا ب ج کے مماس وت کا طول

$$\text{۱۶ وت}^{4}(\Delta\ \text{اب ج})^{2} + \begin{vmatrix} \cdot & \text{عہ}^{2} & \text{بہ}^{2} & \text{جہ}^{2} \\ \text{عہ}^{2} & \cdot & \text{ج}^{2} & \text{ب}^{2} \\ \text{بہ}^{2} & \text{ج}^{2} & \cdot & \text{ا}^{2} \\ \text{جہ}^{2} & \text{ب}^{2} & \text{ا}^{2} & \cdot \end{vmatrix} = \cdot$$

سے حاصل ہوگا۔

۱۲ — اگر ما² − ۴ ا لا = ۰ کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد نقطہ (عہ، بہ) پر ملیں تو اُس مثلث کا حائط دائرہ جو ف، ق، ر پر کے مماسوں سے بنے مساوات

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} - (\text{۳ا} - \text{عہ})\ \text{لا} + \text{بہ ما} + \text{۲ا}^{2} - \text{ا عہ} = \cdot$$

سے حاصل ہوگا۔ نیز دائرہ کا قطر اُس فاصلہ کے مساوی ہوگا جو ماسکہ اور عمادوں کے نقطۂ تقاطع کے درمیان ہے۔

۱۳ — اگر ایک مثلث ایک مکافی کے لیے خود قطبی ہو تو اُس کا حائط مرکز مرتب پر ہوگا۔

۱۴ — اگر ایک مکافی کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد ہم نقطہ ہوں تو اُس مثلث کا نو نقطی دائرہ جو ف، ق، ر پر کے مماسوں سے بنے مکافی کے راس میں سے گذرے گا۔

۱۵ — ایک مکافی کے نقطوں ف، ق، ر پر کے مماس مثلث فَ قَ رَ بناتے ہیں اور مثلثوں ف ق ر اور فَ قَ رَ کے مرکز ہندسی گ، گَ ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر گ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہو تو گَ کا طریق ایک مکافی ہوگا اور یہ کہ اگر گَ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہو تو گ کا طریق ایک مکافی ہوگا۔

۱۶ — ع سے جو ایک ناقص کے کسی نقطہ ف پر کا مرکزِ انحنا ہے دو دوسرے عماد ع ق، ع ر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق ر اور ف پر کے عماد کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔

۱۷ ــــ اگر ایک ناقص کا مرکز ایک اندرونی مثلث کا مرکز عمودی ہو تو مثلث کے راسوں پر کے عماد ہم نقطہ ہوں گے ۔

۱۸ ــــ مخروطیوں ۴ لا^۲ + ما^۲ + ۶ لا ـ ۴ ما = ۰ اور ۴ لا ما + ۳ ما^۲ ـ ۸ لا + ۶ ما + ۱ = ۰ کی مساواتیں ان کے مشترک خود قطبی مثلث کے حوالے سے معلوم کرو ۔

۱۹ ــــ ثابت کرو کہ مساواتوں

لا = ا ت^۲ + ۲ ب ت + ج ، ما = اَ ت^۲ + ۲ بَ ت + جَ

سے جہاں ت متغیر ہے ایک مکافی حاصل ہوتا ہے اور اس کے مرتبہ کی مساوات

ا لا + اَ ما = ا ج ـ ب^۲ + اَ جَ ـ بَ^۲

ہے ۔

۲۰ ــــ اگر ایک مخروطی دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرے اور دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرے تو دیے ہوئے نقطوں پر کے مماس ایک یا دو سرے ثابت خطِ مستقیم پر متقاطع ہوں گے ۔

۲۱ ــــ اگر چار دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرنے والے مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق ج = ۰ ہو تو اس نظام کے تمام مخروطیوں کے لیے ج پر کے کسی نقطہ کے قطبی متوازی خطوطِ مستقیم ہوں گے ۔

۲۲ ــــ ثابت کرو کہ ایک نقطہ کے لحاظ سے ان تمام مخروطیوں کے مکافی جو اس نقطہ میں سے گذریں اور جن کا دائرۂ انحناء اس نقطہ پر وہی ہو مساوی مکافی ہیں ۔

۲۳ ــــ اگر ما^۲ ـ ۴ ا لا = ۰ میں کھینچے ہوئے ایک مثلث کا مرکز ہندسی ثابت نقطہ (ف، گ) پر ہو تو ثابت کرو کہ اس مثلث کے ضلع مکافی

(ما + ۳ گ)^۲ = ۱۶ ا لا ـ ۲۴ ا ف + ۱۸ ا گ^۲

کو مس کریں گے ۔

۲۴ ــــ ایک مثلث کو لا^۲ + ما^۲ ـ ا^۲ = ۰ میں کھینچا گیا ہے اور اس کا

مرکز عمودی نقطہ (د، ۰) پر ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے ضلع ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں جس کے ماسکے مثلث کا حائط مرکز اور مرکز عمودی ہیں اور جس کا امدادی دائرہ مثلث کا نو نقطی دائرہ ہے (یہ دائرہ مثلث کے تمام ممکن محلوں کے لیے وہی ہے)۔

۲۵ ـــ اگر ایک مثلث کو ایک دائرہ میں اور ایک مکافی کے گرد کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے مرکز ہندسی کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مکافی کے محور پر عمود ہے۔

(۴۲۹) ۲۶ ـــ ایک ناقص کے ان نیم قطروں کے مربعوں کا مجموعہ جو ایک اندرونی مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہوں اور ناقص کے مرکز سے مثلث کے حائط دائرہ کے مماس کا مربع نیم محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتے ہیں۔

۲۷ ـــ اگر دو مخروطی س، سَ چار نقطوں پر جو س کے مزدوج قطروں کے سروں پر ہیں متقاطع ہوں تو چار مشترک مماس سَ کو مزدوج قطروں کے سروں پر مس کریں گے۔

۲۸ ـــ اگر ایک مثلث کے دو راس ایک ناقص پر ہوں اور تین ضلع دئے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو تیسرا راس ایک مخروطی مرتسم کرے گا۔

۲۹ ـــ خط ل لا + م ما + ۱ = ۰ پر کے کسی نقطہ ف سے قائم زائد ۲ لا ما − ج۲ = ۰ کے مماس ف ق، ف ر کھینچے گئے ہیں اور دائرہ ف ق ر زائد کو مکرر نقطوں قَ، رَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ قَ رَ مکافی

$$(ل^2 + م^2)(لا^2 + ما^2) = (ل\,لا + م\,ما + ۱)^2$$

کو مس کرتے ہیں۔

۳۰ ـــ اگر ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے مماس ت ف، ت ق

ہوں اور مثلث ت ف ق کا مرکز عمودی ناقص پر ہو تو ثابت کرو کہ ت مخروطی

$$اَ^{۲} لا^{۲} + بَ^{۲} ما^{۲} = (اَ^{۲} + بَ^{۲})^{۲}$$

پر ہوگا۔

۳۱ — ثابت کرو کہ اُس مکافی کی مساوات جو چار خطوط

$$ا لا \pm ب ما = ۱ ، اَ لا \pm بَ ما = ۱$$

کو مس کرتا ہے

$$(ا^{۲} بَ^{۲} - اَ^{۲} ب^{۲}) ما^{۲} = ۴ ا اَ (ا - اَ) \{ لا (اَ^{۲} بَ^{۲} - اَ^{۲} ب^{۲}) + بَ^{۲} اَ - بَ^{۲} ا \}$$

ہے۔

۳۲ — ایک ایسے نقطہ کا طریق جس کے محدد

$$لا = ا_{۱} ت^{۲} + ب_{۱} ت + ج_{۱} ، ما = ا_{۲} ت^{۲} + ب_{۲} ت + ج_{۲}$$

سے حاصل ہوں جہاں ت ایک متغیر مبدل ہے ایک مکافی ہوگا جس کا وتر خاص

$$\frac{(ا_{۱} ب_{۲} - ا_{۲} ب_{۱})^{۲}}{(ا_{۱}^{۲} + ا_{۲}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

ہوگا۔

۳۳ — ایک مثلث کو عہ بہ = جہ^۲ میں کھینچا گیا ہے اور اس کے دو ضلع عہ^۲ + بہ^۲ = ک جہ^۲ کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا ضلع

$$(ک عہ - بہ)(ک بہ - عہ) = جہ^{۲}$$

کو مس کرتا ہے۔

۳۴ — ایک خطِ مستقیم پر تین ثابت نقطے و$_{۱}$، و$_{۲}$، و$_{۳}$ ہیں اور ف ایک دیے ہوئے مخروطی پر کوئی نقطہ ہے۔ ف و$_{۱}$ مخروطی کو

(۲۴۰)

مکرر ق پر، ق و$_1$ مخروطی کو ر$_1$ پر، اور ر$_1$ و$_2$ مخروطی کو س پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف س، خط و$_1$ و$_2$ و$_3$ پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۳۵۔ ان قائم زائدوں کے مرکزوں کا طریق جن کے محور $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے محوروں کے متوازی ہیں اور جو ناقص کے ساتھ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں مساوات

$$(ا^2 لا^2)^{\frac{1}{3}} + (ب^2 ما^2)^{\frac{1}{3}} = (ا^2 + ب^2)^{\frac{2}{3}}$$

سے حاصل ہوگا۔

۳۶۔ ان قائم زائدوں کے مرکزوں کا طریق جن کے محور مکافی کے محوروں کے متوازی ہیں اور جو مکافی $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کے ساتھ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں مساوات

$$۲۷ ا ما^2 = ۴ (لا + ۲ ا)^3$$

سے حاصل ہوگا۔

۳۷۔ اگر ایک مخروطی کے لحاظ سے مزدوج نقطوں کے چار دیے ہوئے زوج ف اور فَ، ق اور قَ، ر اور رَ، س اور سَ ہوں تو ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۳۸۔ اگر ایک مخروطی کے لحاظ سے دیے ہوئے مزدوج خطوں کے چار زوج ل اور لَ، م اور مَ، ن اور نَ، ف اور فَ ہوں تو ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۳۹۔ ایک مخروطی کے نقطہ ف پر کا عاد محوروں کو نقطوں گ، گَ پر قطع کرتا ہے اور گ گَ کا نقطہ وسطی و ہے۔ ثابت کرو کہ تین دیگر نقطوں ق، ر، س پر کے عاد و پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ ق، ر، س، اس مثلث کے راس ہیں جو ناقص میں اعظم رقبہ کا

کھینچا جا سکتا ہے۔

۴۰ — اگر ایک مخروطی دو دیے ہوئے دائروں کے ساتھ دوہرا تماس رکھے اور وتر تماس متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ مخروطی کے متقاربوں کا لفاف ایک مکافی ہوگا۔

۴۱ — ایک مخروطی س ایک مثلث ا ب ج کو حائط کرتا ہے اور راس پر کے تماس مقابل کے ضلعوں سے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو خطِ مستقیم د ع ف پر ہیں۔ وہ خطوط جو د ع ف کے کسی نقطہ کو ا، ب، ج سے ملاتے ہیں مخروطی سے مکرر اَ، بَ، جَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث اَ بَ جَ کے ضلع ایک ثابت مخروطی کو جو ا ب ج میں کھینچا گیا ہو اور س کے ساتھ دوہرا تماس رکھے مس کرتے ہیں۔

۴۲ — اگر ایک مثلث کے راس (لَا، مَا)، (لاً، ماً)، (لاَ، ماَ) ہوں اور مثلث مخروطی س = ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کے لیے خود قطبی ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ

$$\frac{1}{2}\left\{ \text{سَ سً سٓ} \Big\backslash (\text{ا ب ج} + 2\,\text{ف گ ھ} - \text{ا ف}^2 - \text{ب گ}^2 - \text{ج ھ}^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ہے۔

۴۳ — ایک مثلث مخروطی س = ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کو حائط کرتا ہے اور اس کے راس (لا$_1$، ما$_1$)، (لا$_2$، ما$_2$)، (لا$_3$، ما$_3$) ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ

$$\left\{ \frac{\text{س}_1\,\text{س}_2\,\text{س}_3}{\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(۴۴۱)

ہے ۔

۴۴ ۔ ا ب ج د ع ف ایک مسدس ہے جو مخروطی س میں اور مخروطی سَ کے گرد کھینچا گیا ہے۔ خطوط ا و، ب و، وغیرہ جو کسی نقطہ و میں سے کھینچے گئے ہیں س کو مکرر نقطوں اَ، بَ، جَ وغیرہ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مسدس اَ بَ جَ دَ عَ فَ میں ایک مخروطی کھینچا جا سکتا ہے ۔

۴۵ ۔ ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا گیا ہے، یہ مخروطی ایسا ہے کہ نقاط تماس پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کا مرکز ایک کعبی منحنی پر واقع ہے جو ا، ب، ج، مرکز ہندسی گ، مرکز عمودی و، نقاط (± ۱، ± ۱، ± ۱) نقطہ (ا، ب، ج)، اور ا و، ب و، ج و کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے ۔

۴۶ ۔ ایک مخروطی ا، ب، ج میں سے گذرتا ہے اور ا، ب، ج پر کے عماد ہم نقطہ ہیں۔ اگر یہ مخروطی متوازی خطوط مستقیم کا ایک زوج نہ ہو تو ثابت کرو کہ اس کا مرکز ایک کعبی منحنی پر واقع ہے جو ا، ب، ج میں سے گذرتا ہے اور نیز ا ب ج کے مرکز ہندسی اور ان دائروں کے مرکزوں میں سے گذرتا ہے جو ا ب ج کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں ۔

۴۷ ۔ ایک ایسے دائرہ کے مرکز کے طریق کی مساوات معلوم کرو جو تین دیے ہوئے دائروں کو مساوی زاویوں پر قطع کرے اور ثابت کرو کہ یہ طریق ایک خط مستقیم ہے جو ان تین دائروں کے بنیادی مرکز میں سے گذرتا ہے ۔

۴۸ ۔ اگر ایک ناقص کے نقطوں ف، ق، ر پر کے مماس ایک نقطہ و پر جو ثابت نقطہ ف پر کے عماد پر ہے ملیں تو ثابت کرو کہ مثلث کے مرکز ہندسی، حائط مرکز، اور مرکز عمودی کے طریق نقطہ و کے مختلف محلوں کے لیے خطوط مستقیم ہیں ۔

(۴۴۲)

۴۹ — اگر ناقص $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}-1=0$ کا ایک وتر ف ق، ہم ماسکی ناقص $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}+\text{ل}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}+\text{ل}}-1=0$ کو مس کرے تو ف پر کا مماس ق پر کے عماد سے ناقص

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}\{\text{ا}^{2}\text{ب}^{2}+\text{ل}(\text{ا}^{2}-\text{ب}^{2})\}^{2}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}\{\text{ا}^{2}\text{ب}^{2}+\text{ل}(\text{ب}^{2}-\text{ا}^{2})\}^{2}}=\frac{1}{\{\text{ا}^{2}\text{ب}^{2}+\text{ل}(\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2})\}^{2}}$$

پر ملے گا۔

۵۰ — ایک ناقص کے چار نقطوں ا، ب، ج، د پر کے عماد ایک نقطہ ف پر ملتے ہیں اور دائروں ب ج د، ج د ا، د ا ب، ا ب ج کے مرکز اَ، بَ، جَ، دَ ہیں۔ ثابت کرو کہ اَ، بَ، جَ، دَ میں سے گذرنے والے وہ خط جو ا، ب، ج، د پر کے عمادوں کے متوازی ہیں ف میں سے گذرنے والے قطر پر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۵۱ — اگر قائم زائد لا ما − ا^{2} = ۰ کے وتر ف ق کا وسطی نقطہ (لا۰، ما۰) ہو تو وتر ف ق اور ف، ق پر کے مماس مکافی

$$\sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{لا}_{0}}}+\sqrt{\frac{\text{ما}}{\text{ما}_{0}}}=2$$

کو مس کرینگے۔

۵۲ — اگر مثلث ا ب ج کے راس $(\text{لا}_{1}،\text{ما}_{1})$، $(\text{لا}_{2}،\text{ما}_{2})$، $(\text{لا}_{3}،\text{ما}_{3})$ ہوں اور مثلث ناقص $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}-1=0$ کے لیے خود قطبی ہو تو نقطے ا، ب، ج، قائم زائد

$$\frac{لا_1\,لا_2\,لا_3}{ا^2\,لا} + \frac{ما_1\,ما_2\,ما_3}{ب^2\,ما} - 1 = 0$$

پر ہوں گے اور ضلع ب ج، ج ا، ا ب، مکافی

$$\frac{1}{ا^2}\sqrt{لا\,لا_1\,لا_2\,لا_3} + \frac{1}{ب^2}\sqrt{ما\,ما_1\,ما_2\,ما_3} - 1 = 0$$

کو مس کریں گے۔

۵۳ — اگر مثلث ا ب ج ایک ناقص کے لیے خود قطبی ہو تو ان مقطوعوں کے وسطی نقطے جو ناقص کے محوروں سے خطوط ب ج، ج ا، ا ب پر قطع ہوتے ہیں ہم خط ہوں گے اور ان مقطوعوں کو قطر مان کر ان پر کھینچے ہوئے دائرے ہم محور ہوں گے۔

۵۴ — ثابت کرو کہ کسی تین مخروطیوں کے نقاطِ تقاطع میں سے جبکہ انہیں دو دو کر کے لیا گیا ہو تین قائم زائد کھینچے جا سکتے ہیں اور یہ تین قائم زائد چار مشترک نقطے رکھتے ہیں۔

۵۵ — اگر مثلث ا ب ج میں کھینچے ہوئے کسی دو مخروطیوں کے ماسکے ف، فَ اور ق، قَ ہوں تو ف ق، ف قَ، فَ ق، فَ قَ ایک دوسرے مخروطی کو جو ا ب ج میں کھینچا گیا ہو مس کریں گے۔

۵۶ — ایک خطِ مستقیم دو دئے ہوئے مخروطیوں س، سَ کو علی الترتیب نقطوں ف، ق اور فَ، قَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف، ق پر کے مماس فَ، قَ پر کے مماسوں سے ایک ایسے مخروطی پر ملتے ہیں جو س اور سَ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

(۴۴۲) ۵۷ — ایک مخروطی تین دئے ہوئے نقطوں ا، ب، ج میں سے گذرتا ہے اور اس کا ایک متقارب ایک ثابت سمت میں ہے

ثابت کرو کہ دوسرا متقارب ایک ثابت مکافی کو جو مثلث اب ج کے ضلعوں کو مس کرتا ہے مس کرے گا اور اُس کا محور دی ہوئی سمت میں ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک مکافی ہے۔

۵۸ ـــ ایک دیے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے نقاطِ وسطی میں سے دو دو کو تین خطوطِ مستقیم سے ملایا گیا ہے۔ کسی مخروطی کے لحاظ سے جو مثلث میں کھینچا گیا ہے اِن خطوطِ مستقیم کے قطب لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن قطبوں سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ مستقل ہے۔

۵۹ ـــ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ کے نقطوں عہ، بہ، جہ پر کے عمادوں سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ

$$\frac{(\text{و}^2-\text{ب}^2)^2}{2\text{وب}}\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{بہ}-\text{جہ})\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{جہ}-\text{عہ})\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})\left\{\Sigma\,\text{جب}(\text{بہ}+\text{جہ})\right\}^2$$

ہوگا۔

۶۰ ـــ اگر $\frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ کے نقطوں ف، ق، س پر کے عماد ناقص پر نقطہ (لا، ما) پر ملیں تو دائرہ ف ق س کی مساوات

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2-\frac{\text{ب}^2}{\text{و}^2}\text{لا}-\frac{\text{و}^2}{\text{ب}^2}\text{ما}-\text{و}^2-\text{ب}^2=0$$

ہوگی۔

۶۱ ـــ اگر $\frac{\text{ل}}{\text{ر}}=1+\text{ز جم طہ}$ کے نقطوں عہ، بہ، جہ، ضہ پر کے عماد ہم نقطہ ہوں تو

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{عہ}\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{بہ}\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{جہ}\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ضہ}+\left(\frac{1+\text{ز}}{1-\text{ز}}\right)^2=0$$

۶۲ ۔ ایک مخروطی جو تین دئے ہوئے نقطوں میں سے کھینچا گیا ہے ایک دئے ہوئے مخروطی کو نقطوں ف، ق، ر، س پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ ف ق ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے گذرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ر س ایک مخروطی کو لف کرتا ہے ۔

۶۳ ۔ ایک دئے ہوئے مخروطی پر دو ثابت نقطے ف، ق لیے گئے ہیں اور ایک ثابت خطِ مستقیم پر ر کوئی نقطہ ہے ۔ خطوط ف ر، ق ر مخروطی کو مکرر فَ، قَ پر قطع کرتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ فَ قَ ایک مخروطی کو لف کرتا ہے ۔

۶۴ ۔ ایک دئے ہوئے نقطہ ف سے ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک دئے ہوئے نظام کے کسی مخروطی کے مماس کھینچے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جو ف اور ان دو نقاط تماس میں سے گذرتا ہے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے ۔

(۴۴۴) ۶۵ ۔ اگر کسی نقطہ سے ایک ناقص کے مماس ت ف، ت ق کھینچے جائیں تو ت ر ف ق اور ف، ق پر کے عماد ایک مکافی کو جو ناقص کے محوروں کو مس کرتا ہے مس کرینگے ۔

۶۶ ۔ ایک دئے ہوئے ناقص کے نقطہ ف پر کے مماس پر مرکز سے عمود کھینچا گیا ہے جس کا پائین ما ہے اور ما کو ماسکہ قرار دیکر ایک مکافی کھینچا گیا ہے جو ناقص کے محوروں کو مس کرتا ہے ۔ اگر ف اور ما میں سے گذرتا ہوا کوئی دائرہ کھینچا جائے جو ناقص کو ق، ر، س پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ مثلث ق ر س کے ضلع مکافی کو مس کرینگے اور ق، ر، س پر کے عماد اس عماد پر متقاطع ہوں گے جو ف میں سے گذرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر کھینچا گیا ہو ۔

۶۷ ۔ اگر ایک دائرہ پر چار نقطے ا، ب، ج، د ہوں اور دائرہ کا مرکز و ہو تو ا، ب، ج، د میں سے گذرنے والے مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق، اسی نظام کے مخروطیوں کے (و سے کھینچے ہوئے) عمادوں کے

پلیٹوں کا طریق بھی ہوگا۔

۶۸ — مثلث ا ب ج کے تین جانبی دائروں کے مرکز و، و، و۳ ہیں اور متناظر ضلعوں کے نقاط وسطی د، ع، ف ہیں۔ ثابت کرو کہ و د، و ع، و۳ ف، ایک نقطہ ف پر ملتے ہیں۔ نیز اگر وہ خطوط جو ا، ب، ج کو متقابل کے ضلعوں کے نقاطِ تماس سے ملاتے ہیں نقطہ ق پر ملیں تو ثابت کرو کہ ف ق مثلث کے مرکزِ ہندسی میں سے گذرے گا۔

۶۹ — ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے ماسکوں کا طریق جو

$$\text{ل لا} \pm \text{م ما} \pm \text{ن ی} = ۰$$

کو مس کرتے ہیں

$$\begin{vmatrix} \text{ا}^2 & \text{لا}^2 & \text{لا}^2 & (\text{ما}+\text{ی})^2 \\ \text{ب}^2 & \text{ما}^2 & (\text{ی}+\text{لا})^2 & \text{ما}^2 \\ \text{ج}^2 & (\text{لا}+\text{ما})^2 & \text{ی}^2 & \text{ی}^2 \\ ۰ & \text{ن}^2 & \text{م}^2 & \text{ل}^2 \end{vmatrix} = ۰$$

ہے۔

۷۰ — ایک ناقص کے کوئی دو قطر جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں ایک ثابت نقطہ ف پر کے مماس سے نقطوں ق، ر پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق اور ر میں سے گذرنے والے دوسرے دو مماس ایک ثابت خطِ مستقیم پر جو ناقص اور ف پر کے دائرہ انحناء کے مشترک وتر کے متوازی ہے متقاطع ہوتے ہیں۔

۷۱ — اگر ا، ب، ج، د چار دائری نقطے ہوں تو ا، ب، ج، د میں سے گذرنے والے دو مکافیوں کے محور، ف ق ر کے نو نقطی دائرہ پر علی القوائم متقاطع ہوں گے جہاں ا ب اور ج د کا

نقطۂ تقاطع ف، ا ج اور ب د کا ق، ا د اور ب ج کا ر ہے۔

(۴۴۵) ۷۲ — اگر نقطے (ف، ± گ، ± ہ) دائری ہوں تو ان نقطوں کا مرکزِ ہندسی نو نقطی دائرہ پر ہوگا۔

۷۳ — ایک مثلث کے تین عمودوں ا د، ب ع، ج ف پر تین نقطے ف، ق، ر ایسے لیے گیے ہیں کہ

ا ف : ا د = ب ق : ب ع = ج ر : ج ف = لہ : ۱

اور ف، ق، ر سے نا متناظر ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے چھ پائین ایک دائرہ پر واقع ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ (۱) لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے دائروں کا لفاف ایک مخروطی ہے جو حائط دائرہ کے ساتھ دوہرا تماس رکھتا ہے، اور (۲) دائروں کے مرکز و کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۷۴ — ثابت کرو کہ $\sqrt{ل عہ} + \sqrt{م بہ} + \sqrt{ن جہ} = ۰$ کا نصف قطرِ انحنا اُس نقطہ پر جہاں وہ عہ = ۰ کو مس کرتا ہے

$$\frac{۱۶\, ل\, م\, ن\, ر^۲\, \Delta}{(ج\, م + ب\, ن)^۳}$$

ہے۔

۷۵ — اگر دو ہم ماسکی مخروطی ایسے ہوں کہ ایک میں ایسے مثلث کھینچے جا سکیں جن کے ضلع دوسرے کو مس کریں تو مثلث کا گھیرا مستقل ہوگا۔

۷۶ — ثابت کرو کہ ایک مثلث کا اندرونی دائرہ اور نو نقطی دائرہ ایک دوسرے کو اُس قائم زائد کے مرکز پر مس کرتے ہیں جو مثلث کو حائط کرتا ہے اور اندرونی مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۷۷ — ایک مثلث

$$لا^۲ + ما^۲ - ںا^۲ = ۰$$

کو حائط کرتا ہے اور اس کا مرکز عمودی نقطہ (۰، ۱) پر ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کا راس مخروطی

$$\text{لا}^2(\text{ا}^2-\text{د}^2)+2\,\text{ا}^2\,\text{د}\,\text{لا}+\text{ا}^2\,\text{ما}^2=4\,\text{ا}^2-\text{ا}^2\,\text{د}^2$$

پر واقع ہے۔

۷۸ — $\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}=1$ میں مثلث کھینچے گئے ہیں جنکے مرکزِ ہندسی نقطہ $(\frac{\text{ھ}}{3}\text{، }\frac{\text{ک}}{3})$ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن کے ضلع مخروطی

$$\left(\frac{\text{ھ}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ک}^2}{\text{ب}^2}-1\right)^2+4\left(\frac{\text{ھ}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ک}^2}{\text{ب}^2}-1\right)\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}-\frac{\text{ھ}\,\text{لا}}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ک}\,\text{ما}}{\text{ب}^2}\right)-\frac{4}{\text{ا}^2\text{ب}^2}(\text{ک}\,\text{لا}-\text{ھ}\,\text{ما})^2=0$$

کو مس کرتے ہیں۔

۷۹ — ایک مثلث $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}-1=0$ کو حائط کرتا ہے اور اس کا مرکزِ ہندسی نقطہ $(\frac{1}{3}\text{ھ}\text{، }\frac{1}{3}\text{ک})$ پر ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے راس مخروطی

$$\left(\frac{\text{لا}-\text{ھ}}{\text{ا}}\right)^2+\left(\frac{\text{ما}-\text{ک}}{\text{ب}}\right)^2+\left(\frac{\text{لاک}-\text{ماھ}}{\text{اب}}\right)^2=4$$

پر ہیں۔

۸۰ — ایک مثلث کو ایک مکافی میں اور ایک مخروطی کے گرد کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکزِ ہندسی کا طریق عام طور پر ایک مکافی ہوگا، لیکن یہ طریق ایک خطِ مستقیم ہوگا اگر دیا ہوا مخروطی ایک

مکافی ہو ۔

۸۱ ــــ مخروطی ایسے چار دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرتے ہیں کہ اِن میں سے دو کو ملانے والا خط دوسرے دو کو ملانے والے خط کے متوازی ہے ۔ ثابت کرو کہ اِن مخروطیوں کے متقاربوں کا لفاف ایک مکافی ہے ۔

۸۲ ــــ مخروطی ایسے چار دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرتے ہیں کہ اِن میں سے دو کو ملانے والا خط دوسرے کو ملانے والے خط کے متوازی ہے ۔ ثابت کرو کہ اِن مخروطیوں کے محور ایک مکافی کو لف کرتے ہیں ۔

۸۳ ــــ اگر ایک چار ضلعی کے ضلع ایک دائرہ کو مس کریں تو اُن مخروطیوں کے محور جو اِس چار ضلعی میں کھینچے جائیں ایک مکافی کو لف کرینگے ۔

۸۴ ــــ اگر مثلث اَ بَ جَ کو مخروطی $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}-1=0$ میں کھینچا جائے اور ضلع بَ جَ ، جَ اَ ، اَ بَ ، مخروطی $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}-1=0$ کو نقطوں ا ، ب ، ج پر مس کریں تو ا اَ ، ب بَ ، اور ج جَ ، مخروطی

$$\text{اَ}^{2}(\text{ب}+\text{بَ})^{2}\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}+\text{بَ}^{2}(\text{ا}+\text{اَ})\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}-(\text{ا}\,\text{بَ}-\text{اَ}\,\text{ب})^{2}=0$$

پر ایک نقطہ پر ملیں گے ۔

۸۵ ــــ مثلث اَ بَ جَ کو مخروطی

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}-1=0:$$

میں کھینچا گیا ہے اور ضلع بَ جَ ، جَ اَ ، اور اَ بَ ، مخروطی

$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱ = ۰$ کو ا، ب، ج پر مس کرتے ہیں۔ حسب ذیل مسئلے ثابت کرو:

(۱) ا، ب، ج پر کے عماد مخروطی

$$اَ^2 لا^2 + بَ^2 ما^2 = (اَ^2 - بَ^2)^2$$

پر ایک نقطہ میں ملیں گے۔

(۲) اَ، بَ، جَ پر کے عماد مخروطی

$$\frac{اَ^2 لا^2}{ا^2} + \frac{بَ^2 ما^2}{ب^2} = (اَ^2 - بَ^2)^2$$

پر ایک نقطہ میں ملیں گے۔

(۳) اَ بَ جَ کا مرکزِ عمودی مخروطی

$$اَ لا^2 + بَ^2 ما^2 = (ا اَ - ب بَ)^2$$

پر ہوگا۔

(۴) مثلث اَ بَ جَ کا حائط مرکز مخروطی

$$۴ اَ^2 لا^2 (ا - اَ)^2 + ۴ بَ^2 ما^2 (ب - بَ)^2 = (اَ^2 - بَ^2)^2$$

پر ہوگا۔

(۴۴۷)

۸۶ — اگر چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد مخروطی س، میں اور مخروطی س۲ کے گرد کھینچی جا سکے تو ثابت کرو کہ مثلثوں کی لامتناہی تعداد س میں اور س۲ کے گرد کھینچی جا سکتی ہے جہاں س۲ کے لحاظ سے س، کا قطبی تعکافی س۳ ہے۔

۸۷ — اگر تین مخروطی ایک نقطہ میں سے گذریں تو اُس خط کا لفاف ایک مخروطی ہوگا جو اِن مخروطیوں کو نقطوں کے تین زوجوں میں

جو درپیچ میں ہیں قطع کرتا ہے۔

۸۸ — تین مخروطیوں س۱، س۲، س۳ میں نقطہ و مشترک ہے۔ س۲ اور س۳ کے بقیہ نقاطِ تقاطع ا، ب، ج ہیں، س۱ اور س۲ کے ل، م، ن ہیں، اور س۳ اور س۱ کے ف، ق، ر ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثوں ا ب ج، ف ق ر، ل م ن کے نو ضلع ایک ہی مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۸۹ — ثابت کرو کہ اگر مخروطیوں س = ۰، سَ = ۰ میں مشترک وتر ع = ۰، ہ = ۰ ایسے ہوں کہ س - سَ ≡ ع ہ تو مساوات $ک^۲ ع^۲ - ۲ک (س + سَ) + ہ^۲ = ۰$ ایک ایسے مخروطی کو تعبیر کرے گی جو س اور سَ میں سے ہر ایک کے ساتھ دوہرا تماس رکھیگا۔

ایک مخروطی مخروطیوں

$$لا^۲ + ما^۲ - ز^۲ (لا + ج)^۲ = ۰، \quad لا^۲ + ما^۲ - زَ^۲ (لا + ج)^۲ = ۰$$

میں سے ہر ایک کے ساتھ محدود دوہرا تماس رکھتا ہے۔ اس کی عام مساوات لکھو اور ثابت کرو کہ تماس کے وتر مبداء میں سے گذرتے ہوئے عمودی وتر ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اگر $ز^{-۲} + زَ^{-۲} = ۱$ تو ایسے تمام مخروطی قائم زائد ہیں۔

۹۰ — ثابت کرو کہ مخروطیوں $س_۱ ≡ ما^۲ - ۴ ا لا = ۰$،
$س_۲ ≡ لا^۲ - ۴ ب ما = ۰$، اور $س_۳ ≡ لا ما + ۲ ا ب = ۰$ میں ایسا رشتہ ہے کہ مثلثوں کی لا انتہائی تعداد ایک میں کھینچی جا سکتی ہے، دوسرے کے حائط کی جا سکتی ہے، اور تیسرے کے لئے خود قطبی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ان میں سے کسی ایک مخروطی کا مماس دوسرے دو مخروطیوں سے موسیقی طور پر قطع ہوتا ہے، اور وہ مماس جو ایک مخروطی کے کسی نقطہ سے

دوسرے دو مخروطیوں کے کھینچے گئے ہوں ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۹۱ — ثابت کرو کہ مخروطی

$$\text{س}_1 \equiv \text{عہ}^2 - 2\,\text{ل}\,\text{بہ}\,\text{جہ} = 0,\quad \text{س}_2 \equiv \text{بہ}^2 - 2\,\text{م}\,\text{جہ}\,\text{عہ} = 0,$$ (۴۴۸)

$$\text{س}_3 \equiv \text{جہ}^2 - 2\,\text{ن}\,\text{عہ}\,\text{بہ} = 0$$

جو رشتہ ل م ن + ۱ = ۰ کے اس طرح مربوط ہیں کہ اِن کو خواہ کسی ترتیب میں لیا جائے مثلثوں کی لامتناہی تعداد ایک مخروطی میں کھینچی جاسکتی ہے، دوسرے کے حائط کیجا سکتی ہے، اور تیسرے کے لیے خود قطبی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اِن میں سے کسی ایک مخروطی کا مماس دوسرے دو مخروطیوں سے موسیقی طور پر قطع ہوتا ہے اور وہ مماس جو ایک مخروطی کے کسی نقطہ سے دوسرے دو مخروطیوں کے کھینچے گئے ہوں ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۹۲ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1 = 0$ کے اُن مماسوں کو جو وتر

$$\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} - 1 = 0$$

کے سروں پر کھینچے گئے ہیں مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مخروطی اور دائرہ کے تقاطع کے وتروں میں سے وہ وتر جو تماس کے وتروں کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرتا ہے خط

$$\text{لا}\,\text{جم}\,\text{عہ} + \text{ما}\,\text{جب}\,\text{عہ} = 0$$

کے متوازی ہو تو مماسوں کا نقطۂ تقاطع مخروطی

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}} = \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}}$$

پر ہوگا جو ایک قائم زائد، دئے ہوئے ناقص کے ہم ماسکی ہے۔

۹۳ — ثابت کرو کہ س = (ا، ب، ج، ف، گ، ہ) (لا، ما، ا)^۲ = ۰ کے نقطہ (لا، ما) پر قریب ترین تماس کے مکانی کی مساوات

$$\Delta \text{س} + \text{ج ت}^2 = 0$$

سے یا

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & ۱ \\ \text{لا}' & \text{ما}' & ۱ \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix}^2 - 2\Delta \text{ت} = 0$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

۹۴ — اگر ایک مخروطی جس کو ایک مثلث میں کھینچا گیا ہو حائط دائرہ کے مرکز میں سے گذرے تو مخروطی کا مرتب دائرہ مثلث کے حائط دائرہ کو مس کرے گا۔

۹۵ — ثابت کرو کہ اگر ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا جائے اور مخروطی کا مرتب دائرہ مثلث کے حائط دائرہ کو مس کرے تو وہ نو نقطی دائرہ کو بھی مس کرے گا۔

۹۶ — ثابت کرو کہ ہم ماسکی مخروطیوں کے چار زوج ایسے ہوتے ہیں کہ ہر زوج کا ایک مخروطی ایک دیے ہوئے مثلث میں اور دوسرا اس مثلث کے گرد کھینچا جا سکتا ہے۔

(۴۴۹) ۹۷ — تین دیے ہوئے نقطوں ا، ب، ج سے ایک دیے ہوئے دائرہ س کے مماس اف، ب ق، ج ر ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) اگر تین مستطیلوں ب ج × اف، ج ا × ب ق، ا ب × ج ر میں سے ایک، دوسرے دو کے مجموعہ سے بڑا

ہوتو دائرہ ا ب ج دائرہ س کو قطع کرے گا، (۲) اگر ان میں سے ایک مستطیل دوسرے دو کے مجموعہ کے مساوی ہو تو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں گے۔ اور (۳) اگر ان میں سے مستطیل دوسرے دو کے مجموعہ سے کم ہو تو دائروں میں کوئی نقطہ مشترک نہیں ہوں گے۔

۹۸ — ایک چار ضلعی کو

$$\text{س} \equiv \text{ا}\,\text{ع}^{2} + \text{ب}\,\text{ب}^{2} + \text{ج}\,\text{ج}^{2} = 0$$

میں کھینچا گیا ہے اور اس کے تین ضلع

$$\text{سَ} \equiv \text{ء}\,\text{ع}^{2} + \text{د}\,\text{ب}^{2} + \text{ط}\,\text{ج}^{2} = 0$$

کو مس کرتے ہیں، ثابت کرو کہ چوتھا ضلع

$$\text{ء}\left[\left(\frac{\text{ا}}{\text{ء}} + \frac{\text{ب}}{\text{د}} + \frac{\text{ج}}{\text{ط}}\right)^{2} - 4\,\frac{\text{ا}^{2}}{\text{ء}^{2}} - 4\,\frac{\text{ب}\,\text{ج}}{\text{د}\,\text{ط}}\right]^{2}\text{ء}^{2} + \dots = 0$$

کو مس کرتا ہے۔

۹۹ — ایک نقطہ سے مخروطیوں س = ۰، سَ = ۰ کے مماس کھینچے گئے ہیں جو مستقل چلیپی نسبت لہ کی ایک پنسل بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق

$$4\,\Delta\,\bar{\Delta}\,\text{س}\,\text{سَ} - \left(\frac{\text{لہ}-1}{\text{لہ}+1}\right)^{2}\text{ف}^{2} = 0$$

ہے۔

۱۰۰ — ایک دئے ہوئے مخروطی کی مساوات عہ بہ = جہ² ہے۔ ثابت کرو کہ اس مخروطی کی عام مساوات جو نقطوں جہ = ۰، عہ = ۰ اور جہ = ۰، بہ = ۰ میں سے گذرتا ہے اور جو دئے ہوئے مخروطی کو

نقطہ ف پر مس کرتا ہے اور جس کا نصف قطر انحنا، نقطہ ف پر دئے ہوئے مخروطی کے انحنا، (اُسی نقطہ ف پر) کا ک گنا ہے حسب ذیل ہے:

$$ل (ع ب - ج^۲) + (ک - ۱) ج (ع - ۲ ل ج + ل^۲ ب) = ۰$$

نیز ثابت کرو کہ دوسرے مشترک مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق

$$ع ب = \left(\frac{ک - ۱}{ک + ۱}\right)^۲ ج^۲$$

ہے ۔

فہرستِ اصطلاحات

مخروطی تراشیں

انگریزی	اُردو
A	
Anharmonic ratio or cross ratio	غیر موسیقی یا چلیپی نسبتیں
Areal co-ordinates	رقبتی محدد
Asymptote	متقارب
Auxiliary circle	امدادی دائرہ
Auxiliary conic	امدادی مخروطی
Axes	محاور (واحد-محور)
C	
Cartesian co-ordinates	کارٹیزی محدد
Centre locus	مرکز طریق
Centroid	مرکز ہندسی
Circumcentre	حائط مرکز
Circumscribing conic	حائط مخروطی
Class	جماعت

انگریزی	اُردو
Co-axial circles	ہم محور دائرے
Collinear	ہم خط
Complement	تکملہ
Concyclic points	ہم دائری نقطے
Confocal conic	ہم ماسکی مخروطی
Confocals	ہم ماسکات
Conics	مخروطی
Conjugate axis	مزدوج محور
Conoidal surface	مخروط نما سطح
Co-normal points	ہم عمود نقطے
Co-ordinate	محدد
Corresponding chords	نظیری نقطے - متناظر نقطے
D	
Degree	درجہ
Diagonal point	وتری نقطہ

انگریزی	اردو
Director circle	مرتب دائرہ
Directrix	مرتب (جمع - مرتبات)
Discriminant	ممیز
Double points or foci	دوہرے نقطے یا ماسکے
E	
Eccentric angle	خارج المرکز زاویہ
Eccentricity	خروج المرکز
Ellipse	قطع ناقص
Envelope	لفاف
Equi-conjugate diameters	مساوی مزدوج اقطار
F	
Foci	ماسکے
Fociod	ماسکنما
G	
Generating line	تکوینی خط
Generator	مکون
H	
Harmonically conjugate	موسیقی طور پر مزدوج
Harmonic progression	سلسلہ موسیقی
Homogeneous equation	متجانس مساوات
Homographic	ہم رسم
Hyperbola	قطع زائد
I	
In-centre	اندرونی مرکز
Inscribed conic	اندرونی مخروطی
Invariants	غیر متغیر
Involution	در پیچ
L	
Latus-rectum	وتر خاص
Limiting points	انتہائی نقطے
Linear dimensions	خطی ابعاد
Locus	طریق
M	
Major axis	محور اعظم
Minor axis	محور اصغر
N	
Normal	عماد
O	
Oblique axis	مائل محور

انگریزی	اردو
Origin	مبدا
Orthogonal circles	علی القوائم دائرے
Osculating curve	لثمی منحنی
P	
Parabola	قطع مکافی
Pencil	پنسل
Polar	قطبی
Polar co-ordinates	قطبی محدد
Polarity	قطبیت
Projection	تظلیل - اظلال
Projective property	ظلی خواص
Q	
Quadrants	ربعات
R	
Radical axis	بنیادی محور
Radius of curvature	نصف قطرِ انحنا
Radius vector	سمتی نصف قطر
Range	سعت
Reciprocal polar	متکافی قطبی
Reciprocation	تکافات
Rectangular hyperbola	قائم زائد
Re-entrant	متداخل
S	
Scalar quantities	میزانی مقداریں
Self-Polar triangle	خود قطبی مثلث
Semi latus-rectum	نیم وترِ خاص
T	
Tangential equation	مماسی مساوات
Transverse axis	قاطع محور
Triad	ثلاثیہ
Trilinear co-ordinates	سہ خطی محدد
V	
Vertex	راس
Vectorial angle	سمتی زاویہ

اغلاط نامہ

مخروطی تراشیں

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۰	۸	(لا۱، ما۲)	(لا۱، ما۱)	۳۸۷	۹	فائم	قائم
۱۱	۶	(ما۲ + ما۱)	(ما۳ + ما۱)	۳۸۸	۶	لاَ	لآ
۱۶	۶	با	سا	۳۹۰	۱۲	دے	دیے
۱۸	۱۴	کھری	گھڑی	۳۹۲	۱۵	ایل	ایک
۲۳	۴	مجوروں	محوروں	۴۰۱	۱۶	ن، ب،	ن ب،
۲۶	آخری سطر	$\frac{لآ - لا}{ا - ا}$	$\frac{لآ - لا}{اَ - لا}$	۴۰۴	۱۶	ل	معادل
۳۳	۶	=۰ ا	=۰	۴۰۹	۱۰	مراکز	مرکز
۳۸	۱۳	(۳، ۶)	(–۳، ۶)	۴۲۸	۴	–=	•=
۱۴۱	۱۷	مثلاً خذ	مثلہ اخذ	۴۳۴	۱۳	رہی	وہی
۱۴۳	۶	مسلہ	مثلہ	۴۳۸	۳	(عہ + بہ جہ)	(عہ + بہ + جہ)
۱۶۲	۱۵	$\frac{1}{م^2}$	$\frac{ک}{م^2}$	۴۴۰	۱۷	ہے	ہے۔
۱۹۱	۵	$\frac{ا^2}{ج}$	$\frac{ا^2}{ج^2}$	۴۴۶	آخری سطر	نقطون	نقطوں
				۵۴۶	۲۰	[illegible]	[illegible]

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۵۵۰	۸	مساوت	مساوات
۵۵۲	۱۱	=	=۰
۵۵۵	۱۹	المحاورزائد	المحاور زائد
۵۶۱	۱۸	ہے۔	ہوگا۔
۵۶۶	۲۲	محور	محور
۵۰۸	۱۵	تطیل	تظلیل
۵۹۷	۱۱	لغاف	لفاف
۶۱۰/۶۲۳	۳/۹	لاانتہا	لامتناہی
۶۱۹	۵	وٗ	ذٗ
۶۴۵	۱۸	تعکافی	متکافی